ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

136

ΕΜΕ: ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

Β' ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

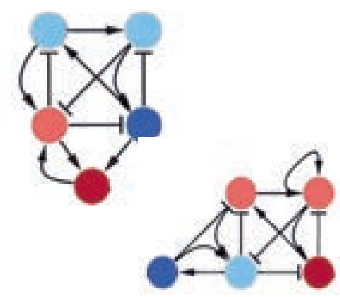
Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

ΑΠΡΙΛΙΟΣ - ΜΑΪΟΣ - ΙΟΥΝΙΟΣ 2025 ευρώ 3,5

EGMO EUROPEAN GIRLS' MATHEMATICAL OLYMPIAD 2025 KOSOVO

Τα Αιγυπτιακά κλάσματα

Απλοποιημένα μαθηματικά μοντέλα



Βραβείο Abel 2025

Θέματα "Αρχιμήδης" 2025

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 136 - Απρίλιος - Μάϊος - Ιούνιος 2025 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Επίκαιρα Θέματα

Α΄ Τάξη

Β΄ Τάξη

Γ΄ Τάξη........

Γενικά Θέματα

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι,
ΟΤΑΝ ...
... όλα έχουν ξεκινήσει ...
και όλα έχουν τελειώσει
και ο χρόνος αφήνεται
πότε πίσω, πότε μπρος ...
με σκέψεις, ελπίδες, όνειρα,
φιλοδοξίες αλλά και επιθυμίες ...
... με νέα ξεκινήματα
σε αδιάκοπη ροή
και κάπου εκεί να φαίνονται
οι στιγμές, η χαρά, η διάθεση ...
η καθημερινότητα,
ο στόχος, ο σκοπός,
το αποτέλεσμα ... ΑΛΛΑ ΚΑΙ
η διάρκεια, η ζωή, η ανάμνηση ...

Καλό Καλοκαίρι

Η επιτροπή σύνταξης του περιοδικού

Υ.Γ. Σας ευχαριστούμε πολύ και από αυτή τη θέση, για τις πολλές εργασίες που λάβαμε. Προσπαθήσαμε να αξιοποιήσαμε τις **περισσότερες**. Σε επόμενα τεύχη θα δημοσιευτούν και οι υπόλοιπες. Τα πολλά **απρόοπτα**, της έκδοσης, έκαναν την **προσπάθεια** αυτή να φαίνεται όλο και πιο **δύσκολη** ... Σας ευχαριστούμε πολύ για την **κατανόηση**

Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:

Α΄ Λυκείου [Γ. Κατσούλης, Λ. Κουτσούρης, Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Χ. Τσίτος],
Β΄ Λυκείου [Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Μ. Σίσκου, Χρ. Τσιφάκης],
Γ΄ Λυκείου [Ν. Αντωνόπουλος, Δ. Αργυράκης, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς]

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση για τα Μαθηματικά και την επικαιρότητα

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής:	8 Νοεμβρίου 2024
Ευκλείδης:	18 Ιανουαρίου 2025
Αρχιμήδης:	22 φεβρουαρίου 2025

$$[2000+25] = [5\cdot 20^2+5^2]=2025$$

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Εκδότης
Φελλούρης Ανάργυρος
Διευθυντής:
Τυρλής Ιωάννης

Επιμέλεια Έκδοσης:
Ζώτος Ευάγγελος

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

- **Οι συνεργασίες** [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στενλονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένεδειξη «Γιοα τον Ευκλείδη Β΄» Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. ¨ολα τα άρθρα υπόκειται σε κρίση με σύστημα κριτών, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρνει ο εισηγητής. **Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = 14 ευρώ). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00.**

Το **αντίτιμο** για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
Με κατάθεση του αντιτίμου της συνδρομής στους παρακάτω λογαριασμούς

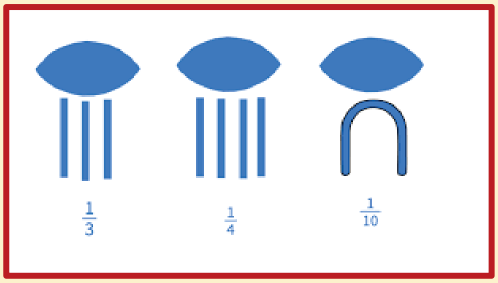
1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA , 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK , 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54, Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε.

Εκτύπωση: **rintfair** **Τηλ.: 2102469799 -2102401695** **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Α. Κρέτσης

Τα Αιγυπτιακά κλάσματα

Ανδρέας Πούλος

Ονομάζουμε **εναδικά κλάσματα** όσα κλάσματα έχουν αριθμητή την μονάδα και παρονομαστή κάποιον θετικό ακέραιο αριθμό. **Αιγυπτιακά κλάσματα** ονομάζονται όσα κλάσματα μπορούν να γραφούν ως άθροισμα διαφορετικών εναδικών κλασμάτων. Για παράδειγμα, το κλάσμα $\frac{1}{3}$ είναι Αιγυπτιακό, διότι γράφεται $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$. Τέτοια κλάσματα είχαν χρησιμοποιήσει οι αρχαίοι Αιγύπτιοι τουλάχιστον πριν 4.000 χρόνια, σύμφωνα με τις γραπτές πηγές που έχουν ανακαλυφθεί. Η παρακάτω εικόνα περιγράφει πως μέσω της ιερογλυφικής γραφής οι αρχαίοι Αιγύπτιοι παρίσταναν τα εναδικά κλάσματα.



Στη συνέχεια, θα διαπιστώσουμε ότι όλοι οι ρητοί αριθμοί είναι Αιγυπτιακά κλάσματα, αλλά αυτό δεν είναι άμεσα εμφανές. Σημειώνουμε ότι άρθρα σχετικά με τα Αιγυπτιακά κλάσματα έχουν δημοσιευθεί αρκετές φορές στα περιοδικά «Ευκλείδης Α΄» και «Ευκλείδης Β΄» της Ε.Μ.Ε., ενδεικτικά αναφέρουμε δύο από αυτά στις βιβλιογραφικές αναφορές. Στο άρθρο αυτό προφανώς, θα πρέπει να παρουσιάσουμε πληροφορίες που δεν έχουν δημοσιευθεί παλαιότερα, τουλάχιστον την τελευταία δεκαετία. Δεν θα εστιάσουμε στη διατύπωση και επίλυση σχετικών προβλημάτων - αυτό σκοπεύουμε να γίνει σε επόμενο τεύχος του περιοδικού - αλλά θα αναφερθούμε σε τεχνικές και θεωρήματα που αφορούν την γραφή των ρητών αριθμών ως άθροισμα εναδικών κλασμάτων.

Ξεκινάμε με ένα φαινομενικά απλό ερώτημα: «**Κάθε ανάγωγο κλάσμα μικρότερο του 1, βρίσκεται μεταξύ δύο εναδικών κλασμάτων;**». Ας πάρουμε για παράδειγμα, τα κλάσματα $\frac{2}{5}$ και $\frac{3}{8}$. Με λίγη προσπάθεια βρίσκουμε ότι $\frac{1}{5}<\frac{2}{5}<\frac{1}{2}$ και ότι $\frac{1}{8}<\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$. Αυτό είναι μια εμπειρική ανακάλυψη, η οποία ισχύει για όσα κλάσματα τα μικρότερα του 1 και αν επιλέξουμε. Αν αυτό μπορεί να αποδειχθεί, τότε αποτελεί θεώρημα. Το θεώρημα αυτό είναι καταγεγραμμένο από παλιά. Καλό όμως είναι ο αναγνώστης που τον ενδιαφέρει το θέμα των Αιγυπτιακών κλασμάτων να προσπαθήσει να το αποδείξει. Αν δεν τα καταφέρει, τότε η λύση είναι απλή, ψάξιμο στο Διαδίκτυο.

Διατυπώνουμε στη συνέχεια ένα δυσκολότερο – ως προς την απάντηση του – ερώτημα: «**Κάθε ανάγωγο κλάσμα μικρότερο του 1 και με αριθμητή διαφορετικό του 1, βρίσκεται πάντα μεταξύ δύο εναδικών κλασμάτων με παρονομαστές διαδοχικούς φυσικούς;»**, δηλαδή υπάρχει πάντα φυσικός ν ώστε για το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}<1$ να ισχύει $\frac{1}{\nu+1}<\frac{\alpha}{\beta}<\frac{1}{\nu}$; Ας πειραματιστούμε πάλι. Επιλέγουμε τα προηγούμενα κλάσματα $\frac{2}{5}$ και $\frac{3}{8}$. Αν $\frac{1}{\nu+1}<\frac{2}{5}<\frac{1}{\nu}$, τότε $5 < 2\nu + 2$ και $2\nu < 5$, άρα $3 < 2\nu < 5$. Συνεπώς, έχουμε $\nu = 2$. Αντίστοιχα, για το κλάσμα $\frac{3}{8}$ θα βρούμε $\nu = 2$.

Πράγματι, $\frac{1}{3}<\frac{1}{8}<\frac{1}{2}$. Ακόμα και για το κλάσμα $\frac{9}{10}$ έχουμε $\frac{1}{2}<\frac{9}{10}<\frac{1}{1}$, αρκεί να θεωρούμε **τη μονάδα ως εναδικό κλάσμα.** Η απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα είναι θετική, άρα και αυτό είναι θεώρημα. Αυτή τη φορά θα παρουσιάσουμε την απόδειξή του, δηλαδή θα αποδείξουμε ότι «Για κάθε ανάγωγο κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}<1$ με α ≠ 1, υπάρχει φυσικός αριθμός ν τέτοιος ώστε $\frac{1}{\nu+1}<\frac{\alpha}{\beta}<\frac{1}{\nu}$».

Απόδειξη: Η διπλή ανισότητα $\frac{1}{\nu+1}<\frac{\alpha}{\beta}<\frac{1}{\nu}$ είναι ισοδύναμη με τις ανισότητες $\beta<\alpha\cdot\nu+\alpha$ και $\alpha\cdot\nu<\beta$. Συνεπώς $\beta-\alpha<\alpha\cdot\nu<\beta$, δηλαδή $\frac{\beta-\alpha}{\alpha}<\nu<\frac{\beta}{\alpha}$. Επειδή ο φυσικός β δεν είναι το 0, επιλέγουμε για $\nu=\beta-1$. Πράγματι, $\frac{\beta-\alpha}{\alpha}<\beta-1$, δηλαδή $\beta<\alpha\cdot\beta$ ή $1<\alpha$, κάτι που ισχύει.

Ένα πιο ενδιαφέρον θεώρημα, το οποίο δεν αποδεικνύουμε εδώ (θα εξηγήσουμε στη συνέχεια για ποιον λόγο) είναι το ακόλουθο: «**Κάθε ανάγωγο κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}<1$, γράφεται ως άθροισμα πεπερασμένων** (δηλ. όχι άπειρων) **εναδικών κλασμάτων, που έχουν όλα διαφορετικούς παρονομαστές**». Το θεώρημα αυτό θα το ονομάσουμε (1^{o} Βασικό θεώρημα). Η αιτία για την παράλειψη της απόδειξης αυτού του θεωρήματος βρίσκεται **στη δυσκολία** που έχει για τους μαθητές-αναγνώστες του περιοδικού. Εξάλλου, αν κάποιος επιθυμεί να τη μελετήσει, αυτή υπάρχει σε πολύ παλιό τεύχος του περιοδικού «Ευκλείδης» της Ε.Μ.Ε. στην εργασία «**Αιγυπτιακά κλάσματα**» που το υπογράφει ο σπουδαίος μαθηματικός **Παρασκευάς Μαρουσάκης** (1913-1990).

Φαίνεται, ότι το θέμα με τα Αιγυπτιακά κλάσματα αρχίζει να αποκτά ενδιαφέρον και να ξεφεύγει από τα απλά κλάσματα, ένα διδακτικό αντικείμενο με το οποίο ασχολούνται οι μαθητές στο Δημοτικό Σχολείο και ομολογουμένως όχι και με μεγάλη επιτυχία. Για να τονίσουμε ότι τα Αιγυπτιακά κλάσματα έχουν ευρύτερο παιδαγωγικό ενδιαφέρον, αναφέρουμε ενδεικτικά την ιστοσελίδα https://nyccami.org/egyptian-fractions/ η οποία σχετίζεται με εκπαιδευτικούς που διδάσκουν Μαθηματικά και σε άλλους ενήλικες και αξίζει να την επισκεφθείτε.

Σχολιάζουμε το 1^{o} Βασικό θεώρημα. Αυτό παράγει μια σειρά ενδιαφερόντων θεωρημάτων και πορισμάτων που έχουν σχέση με την κατασκευή Αιγυπτιακών κλασμάτων μέσω εναδικών κλασμάτων. Ένα τέτοιο θεώρημα απαραίτητο για το άρθρο μας είναι το εξής:

Θεώρημα 2^{o}. Η μονάδα γράφεται ως άθροισμα πεπερασμένου πλήθους εναδικών κλασμάτων που έχουν διαφορετικούς παρονομαστές.

Πράγματι, $1=\frac{\beta}{\beta}=\frac{\beta-\alpha+\alpha}{\beta}=\frac{\beta-\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta}$ με $\alpha<\beta$. Όμως, από το 1^{o} βασικό Θεώρημα προκύπτει ότι τα κλάσματα $\frac{\beta-\alpha}{\beta}$ και $\frac{\alpha}{\beta}$ γράφονται ως αθροίσματα πεπερασμένου πλήθους Αιγυπτιακών κλασμάτων με διαφορετικούς παρονομαστές.

Πόρισμα 1^{o}: Κάθε εναδικό κλάσμα γράφεται πάντοτε ως άθροισμα δύο άλλων εναδικών κλασμάτων με διαφορετικούς παρονομαστές.

Στη συνέχεια θα επιλύσουμε ένα απλό πρόβλημα, το οποίο με διάφορες παραλλαγές εμφανίζεται σε μαθηματικούς διαγωνισμούς, με σκοπό να αναφερθούμε σε ένα άλλο χρήσιμο θεώρημα των εναδικών κλασμάτων.

Πρόβλημα 1: Να βρεθούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει $\frac{1}{3}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$.

Επίλυση: Η δεδομένη εξίσωση γράφεται $\frac{1}{3} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$. Συνεπώς, ισχύει α·β = 3α + 3β ή α·β – 3α = 3β. Ισοδύναμα $\alpha = \frac{3\beta}{\beta-3}$ με β > 3, λόγω της αρχικής ισότητας. Εδώ, εφαρμόζουμε το τέχνασμα της προσθαφαίρεσης και έχουμε $\alpha = \frac{3\beta - 9 + 9}{\beta-3}$ ή $\alpha = 3 + \frac{9}{\beta-3}$. Για να είναι ο α φυσικός αριθμός πρέπει ο β-3 να είναι διαιρέτης του 9. Δηλαδή, πρέπει β – 3 = 1, ή β – 3 = 3 ή β – 3 = 9.

Τελικά β = 4 ή β = 6 ή β = 12.

Αυτό σημαίνει ότι $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$. Οι δυάδες (α, β) λύσεων είναι (4, 12) (6, 6) (12, 4).

Στο παράδειγμα αυτό εμφανίζεται ο αριθμός 9, ο οποίος είναι το τετράγωνο του 3, αλλά αυτό μπορεί να είναι τυχαίο. Ας λύσουμε κι άλλο ένα παρόμοιο πρόβλημα.

Πρόβλημα 2: Να βρεθούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει $\frac{1}{45} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$.

Επίλυση: Η δεδομένη εξίσωση γράφεται $\frac{1}{45} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$. Συνεπώς ισχύει α·β = 45α + 45β ή α·β – 45α = 45β. Ισοδύναμα $\alpha = \frac{45\beta}{\beta-45}$ με β > 45, λόγω της αρχικής ισότητας. Και εδώ εφαρμόζουμε το τέχνασμα της προσθαφαίρεσης και έχουμε $\alpha = \frac{45\beta - 45^2 + 45^2}{\beta-45}$ ή $\alpha = 45 + \frac{45^2}{\beta-45}$. Για να είναι ο α φυσικός αριθμός πρέπει ο β - 45 να είναι διαιρέτης του 45^2. Όμως, πόσους διαιρέτες έχει ο αριθμός 45^2; Ο αριθμός 45 ως γινόμενων πρώτων αριθμών γράφεται $45 = 3^2 \cdot 5$, άρα $45^2 = 3^4 \cdot 5^2$. Ευτυχώς, υπάρχει ένα θεώρημα το οποίο μας βρίσκει το πλήθος των διαιρετών ενός φυσικού αριθμού. Αυτό διατυπώνεται ως εξής:

Αν ο φυσικός αριθμός N αναλύεται σε γινόμενο πρώτων αριθμών σε μορφή

$N = p_1^{n_1} . p_2^{n_2} . p_3^{n_3} \dots . p_k^{n_k}$, τότε το πλήθος των διαιρετών του αριθμού N είναι $(n_1+1)(n_2+1)(n_3+1) \dots (n_k+1)$.

Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός 45^2 έχει (4+1)(2+1) = 15 διαιρέτες. Άρα, οι λύσεις στο 2ο πρόβλημα είναι 15 διατεταγμένες δυάδες φυσικών α και β. Σημειώνουμε, ότι και στην περίπτωση αυτή που είχαμε το εναδικό κλάσμα $\frac{1}{45}$ εμφανίστηκε το τετράγωνό του, ο αριθμός 45^2, ο οποίος σχετίζεται και με το πλήθος των λύσεων της ζητούμενης εξίσωσης. Μάλλον, δεν είναι σύμπτωση. Αυτή η εμπειρική διαπίστωση οδήγησε τους μαθηματικούς στη διατύπωση του σχετικού θεωρήματος:

Θεώρημα 3ο: Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ με ν, α, β φυσικούς αριθμούς (προφανώς διαφορετικών του μηδενός) είναι το πλήθος των διαιρετών του ν^2.

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος δεν δύσκολη. Αρκεί να εφαρμόσουμε τις τεχνικές με τις οποίες επιλύθηκαν τα προβλήματα 1ο και 2ο.

Από εδώ προκύπτει και μια άμεση απάντηση στο ειδικό ερώτημα «Πόσες λύσεις στους φυσικούς αριθμούς έχει η εξίσωση $\frac{1}{19} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$;». Η απάντηση είναι, ακριβώς τρεις. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός 19 είναι πρώτος και οι διαιρέτες του 19^2 είναι μόνο τρεις.

Άρα το 3ο θεώρημα συνδέεται με το αντίστοιχο πόρισμα:

Πόρισμα 2ο: Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ με ν, α, β φυσικούς αριθμούς και ν πρώτος είναι 3.

Τίθεται το εύλογο ερώτημα, πώς επιλύουμε εξισώσεις στις οποίες το πρώτο κλάσμα δεν είναι εναδικό, αλλά Αιγυπτιακό; Ας δούμε λοιπόν το επόμενο πρόβλημα.

Πρόβλημα 3: Να βρεθούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει $\frac{2}{7} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$.

Επίλυση: Η δεδομένη εξίσωση γράφεται 2α·β = 7α + 7β ή 2α·β – 7α = 7β ή α·(2β – 7) = 7β. Πρέπει 2β – 7 > 0, δηλαδή β ≥ 4. Τότε έχουμε $\alpha = \frac{7\beta}{2\beta-7}$. Πάλι με την τεχνική της προσθαφαίρεσης έχουμε $\alpha = \frac{[3(2\beta-7)+\beta+28]}{2\beta-7} = 3 + \frac{\beta+28}{2\beta-7}$. Πρέπει επίσης $\frac{\beta+28}{2\beta-7} \geq 1$ και μετά από απλές πράξεις καταλήγουμε ότι β ≤ 28. Συνεπώς, ελέγχουμε όλες τις τιμές του β από το 4 έως και το 28. Με έλεγχο βρίσκουμε ότι οι δυνατές τιμές είναι β = 4 είτε β = 7 είτε β = 28. Τότε οι αντίστοιχες τιμές του α είναι, α = 28 είτε α = 7 είτε α = 4. Τελικά, οι δυάδες (α, β) των λύσεων είναι οι (4, 28), (7, 7) και (28, 4). Η δυάδα (7, 7) είναι άμεσα προβλέψιμη λόγω του κλάσματος 2/7.

Σημειώνουμε ότι η προηγούμενη εξίσωση και κάθε σχετική εξίσωση $\frac{\mu}{\nu} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ με μ, ν, α, β φυσικούς αριθμούς έχει πάντα λύση. Αυτό σχετίζεται με τα θεωρήματα που αφορούν τα Αιγυπτιακά και τα εναδικά κλάσματα.

Μια άλλη πρακτική για την εμφάνιση εναδικών κλασμάτων ως άθροισμα άλλων εναδικών είναι η αξιοποίηση των ετερομηκών ακεραίων. Ένας φυσικός αριθμός ονομάζεται **ετερομήκης** όταν γράφεται ως γινόμενο δύο διαδοχικών φυσικών. Παράδειγμα, οι φυσικοί 6, 20, 56, 90 είναι ετερομήκεις. Τέτοιου είδους αριθμοί είναι γνωστό ότι είχαν μελετηθεί τουλάχιστον από την εποχή των Πυθαγορείων (6ος αιώνας π.Χ.) και έπαιζαν σπουδαίο ρόλο στη μελέτη των φυσικών και των ρητών αριθμών. Από παλιά, ήταν γνωστή η ταυτότητα $\frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}$, ή με την μορφή που επιθυμούμε εμείς $\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{\nu(\nu+1)}$. Η χρησιμότητα της ταυτότητας για τα Αιγυπτιακά κλάσματα είναι τώρα προφανής. Για παράδειγμα έχουμε $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, $\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$, $\frac{1}{7} = \frac{1}{8} + \frac{1}{56}$ κλπ. Την ταυτότητα αυτή (ως εμπειρική διαπίστωση αφού δεν ενδιαφέρονταν για αποδείξεις) γνώριζαν και οι Αιγύπτιοι.

Επίσης, γνώριζαν εμπειρικά τις ταυτότητες $\frac{2}{3\nu} = \frac{1}{2\nu} + \frac{1}{6\nu}$ και $\frac{2}{\nu} = \frac{1}{\nu} + \frac{1}{2\nu} + \frac{1}{3\nu} + \frac{1}{6\nu}$.

Η ταυτότητα στη αρχική της μορφή $\frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}$ εμφανίζεται συχνά σε απλά θέματα διαγωνισμών. Για παράδειγμα, ζητείται ο υπολογισμός του αθροίσματος:

$$\Sigma = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{99\cdot 100}.$$

Με τη χρήση της ταυτότητα που προαναφέραμε βρίσκουμε εύκολα ότι $\Sigma = \frac{1}{2} - \frac{1}{100} = \frac{49}{100}$.

Ο παραπάνω τύπος των αντιστρόφων των ετερομηκών φυσικών, μας παρέχει μια ευφυή πρακτική για την αναπαράσταση ενός οποιουδήποτε εναδικού κλάσματος ως πεπερασμένο άθροισμα εναδικών κλασμάτων με διαφορετικούς παρονομαστές. Δίνουμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Αφού $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, έχουμε $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$, σχέση (1).

Όμως, $\frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$, άρα $\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$, σχέση (2)

Επίσης, $\frac{1}{12} - \frac{1}{13} = \frac{1}{156}$, δηλαδή $\frac{1}{12} = \frac{1}{13} + \frac{1}{156}$, σχέση (3).

Λόγω των ισοτήτων (1) και (2), η ισότητα (3) γράφεται $\frac{1}{3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{13} + \frac{1}{156}$. Με ανάλογο τρόπο γράφουμε κάθε ένα από τα κλάσματα $\frac{1}{5}, \frac{1}{20}, \frac{1}{13}, \frac{1}{156}$ ως άθροισμα δύο εναδικών κλασμάτων. Έτσι έχουμε γράψει το εναδικό κλάσμα $\frac{1}{3}$ ως άθροισμα οκτώ εναδικών κλασμάτων, αφού αυτά έχουν προκύψει από διαφορετικούς ετερομήκεις φυσικούς αριθμούς.

Αυτή εμπειρική παρατήρηση μας οδηγεί στη μαθηματική πρόταση την οποία είχαμε προαναφέρει ως στη γενικότερη μορφή ως το 1^{ο} Βασικό θεώρημα. Ισχύει λοιπόν η πρόταση «**Κάθε εναδικό κλάσμα $\frac{1}{\alpha}$ γράφεται ως άθροισμα πεπερασμένων εναδικών κλασμάτων, που έχουν όλα διαφορετικούς παρονομαστές**». Στην περίπτωση αυτή η απόδειξη του είναι σχετικά απλή.

Ο Fibonacci είναι πολύ γνωστός από την ομώνυμη ακολουθία φυσικών αριθμών.

Παρόμοια τεχνική για την αναπαράσταση Αιγυπτιακών κλασμάτων (ουσιαστικά όλων των ρητών αριθμών) σε άθροισμα εναδικών κλασμάτων είχε προτείνει ο διάσημος μαθηματικός Fibonacci, ο επονομαζόμενος Λεονάρντο της Πίζας (1175 – 1240 μ.Χ.). Την τεχνική αυτή την είχε εκθέσει στο βιβλίο του, Liber Abacci (1202 και 1208).

Παραθέτουμε ένα παράδειγμα της τεχνικής του Fibonacci, η οποία μας δίνει αφορμή για νέες χρήσιμες παρατηρήσεις και σχόλια.

Έστω ότι θέλουμε να διασπάσουμε το Αιγυπτιακό κλάσμα $\frac{3}{4}$ σε άθροισμα εναδικών κλασμάτων.

Ως πρώτο βήμα βρίσκουμε ένα εναδικό κλάσμα «κοντά» στο $\frac{3}{4}$. Αυτό είναι το $\frac{1}{2}$.

Επειδή $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, έχουμε $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

Ως δεύτερο βήμα, βρίσκουμε το εναδικό κλάσμα που είναι «κοντά» στο $\frac{1}{4}$. Αυτό είναι το $\frac{1}{5}$. Το αφαιρούμε από το $\frac{1}{4}$ και έχουμε $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$. (Εδώ εμφανίζονται οι ετερομήκεις αριθμοί που αναφέραμε πριν). Τώρα έχουμε $\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$. Άρα, γράψαμε το $\frac{3}{4}$ ως $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$.

Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται ως φορές επιθυμούμε. Πάντα, παίρνουμε εναδικά κλάσματα με παρονομαστές διαφορετικούς φυσικούς.

Η βιβλιογραφία, η σχετική με τις τεχνικές αναπαράστασης ενός ρητού αριθμού σε άθροισμα εναδικών κλασμάτων είναι εκτενέστατη. Κάθε τεχνική αναπαράστασης, σε σχέση με τις άλλες, απαντά καλύτερα σε διαφορετικού τύπου ερωτήματα και προβληματισμούς που έχουν τεθεί από τις συνθήκες του κάθε συγκεκριμένου προβλήματος. Δίνουμε μερικά παραδείγματα τέτοιων ερωτημάτων.

1. Ποια είναι η ποιο σύντομη τεχνική αναπαράστασης ενός Αιγυπτιακού κλάσματος ως άθροισμα ενός ζητούμενου πλήθους εναδικών κλασμάτων;

2. Υπάρχει πάντα εναδικό κλάσμα που γράφεται ως άθροισμα εναδικών κλασμάτων με παρονομαστές επιθυμητού πλήθους πρώτους αριθμούς;

3. Για τις εξισώσεις της μορφής $\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ με ν, α, β, γ φυσικούς αριθμούς ≠ 0, υπάρχει πρόβλεψη για το πλήθος των τριάδων (α, β, γ) που τις επαληθεύουν, αν γνωρίζουμε την τιμή του φυσικού ν; Προφανώς, το ερώτημα γενικεύεται για πλήθος τετράδων (α, β, γ, δ) κλπ.

Τα Αιγυπτιακά κλάσματα έχουν περάσει και στον χώρο της εκλαϊκευτικής Ιστορίας των Μαθηματικών. Αναφέρουμε το πολύ ενδιαφέρον βιβλίο του Τεύκρου Μιχαηλίδη (2013), «Αχμές, ο γιος του φεγγαριού». Τα κλάσματα αυτά και οι ιδιότητές τους έχουν απασχολήσει και ερευνητές μαθηματικούς. Για παράδειγμα, όπως αναφέρει ο G. Berzenyi (1995), «ο διάσημος μαθηματικός Paul Erdös έθεσε το ερώτημα αν είναι δυνατόν να αναπαρασταθεί πάντα το Αιγυπτιακό κλάσμα $\frac{4}{\nu}$ ως άθροισμα τριών ή λιγότερων εναδικών κλασμάτων. Αυτό το ερώτημα (εικασία) δεν έχει απαντηθεί πλήρως για όλες τις μορφές του αριθμού ν.

Δεν έχει απαντηθεί για τις μορφές ν = 120k +1 και ν =120k + 49, με k φυσικό ≠ 0. Η εικασία αυτή έχει επαληθευτεί έως σήμερα για όλους τους αριθμούς $\nu < 10^7$, αλλά παραμένει άγνωστο αν ισχύει για τους αριθμούς τους μεγαλύτερους του 10^7.

Παρόμοια εικασία είχε διατυπώσει και ο μεγάλος Πολωνός μαθηματικός V. Sierpinski. Αυτή αφορά τα κλάσματα της μορφής $\frac{5}{\nu}$. Η εικασία αυτή έως το 1995 είχε αποδειχθεί σωστή μόνο για τους αριθμούς $\nu \leq 108$. Δεν είναι τυχαίο ότι η σπουδαία ιστοσελίδα Wolfram για τα Μαθηματικά στην υποσελίδα της https://demonstrations.wolfram.com/UnsolvedConjecturesAboutEgyptianFractions/ ασχολείται με τις εικασίες που προαναφέραμε.

Αξίζει μια επίσκεψη σε αυτήν, για να πάρουμε μια ιδέα πώς τα λογισμικά μας διευκολύνουν για να κατανοήσουμε – εποπτικά – την έρευνα σε δύσκολα μαθηματικά ερωτήματα.

Αλλά και στο Ελληνικό Διαδίκτυο υπάρχουν ιστολόγια που προβάλουν ορισμένες «παράξενες» ιδιότητες των εναδικών κλασμάτων, όπως αυτή που φαίνεται στη διπλανή εικόνα.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Berzenyi George, (1995). Αιγυπτιακά κλάσματα. Ένας εναλλακτικός τρόπος ζωής χωρίς προπαίδεια. *Περιοδικό Quantum*, τόμος 2ος, τεύχος 1, σελίδα 24.

Guy Richard (2004). *Unsolved problems in number theory*. Springer Verlag. Ειδικά η ενότητα «Αιγυπτιακά κλάσματα», σελίδες 252-262.

Katz Victor, (2013). *Ιστορία των Μαθηματικών*. Μετ. Κώστας Χατζηκυριάκου. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης. Ειδικά οι σελίδες 11-14.

Μαρουσάκης Παρασκευάς, (1968). Αιγυπτιακά κλάσματα. Περιοδικό «*Ευκλείδης*». Σελ. 158-160.

Μιχαηλίδης Τεύκρος, (2013). *Αχμές, ο γιός του Φεγγαριού*. Εκδόσεις Πόλις.

Παλαιογιαννίδης Δ. (2013). Ιστορίες με κλάσματα. Περιοδικό «*Ευκλείδης Α΄*», Τεύχος 90, σελ. 25-27.

Απλοποιημένα μαθηματικά μοντέλα
… η υπεράριθμη κράτηση (Overbooking)

Νίκος Ντόρβας

Ένα από τα προβλήματα που παρουσιάζεται όλο και συχνότερα τα τελευταία χρόνια, από ορισμένες αεροπορικές εταιρείες, σε ταξίδια με αεροπλάνο είναι **η υπεράριθμη κράτηση (Overbooking).** Ως αποτέλεσμα ένας αριθμός επιβατών με επιβεβαιωμένη κράτηση που έχουν φτάσει εγκαίρως στο αεροδρόμιο υπερβαίνει τον αριθμό των διαθέσιμων θέσεων στην πτήση, αναγκάζοντας πολλούς εξ αυτών να μην μπορούν να επιβιβαστούν.

Η υπερκράτηση (overbooking)[1] αποτελεί μια στρατηγική διαχείρισης εσόδων που βασίζεται στην παραδοχή ότι ένα ποσοστό των επιβατών δεν θα εμφανιστεί στην πτήση του (no-show rate), επιτρέποντας στις αεροπορικές εταιρείες να μεγιστοποιήσουν την πληρότητα των πτήσεών τους και, κατά συνέπεια, τα έσοδά τους. Ωστόσο, η αβεβαιότητα που διέπει την εμφάνιση των επιβατών δημιουργεί την ανάγκη για τη χρήση μαθηματικών μοντέλων που επιτρέπουν την πρόβλεψη της ζήτησης και τη διαχείριση του κινδύνου υπερκάλυψης θέσεων.

Με μια πρώτη ανάγνωση, το να πρέπει να πληρώσει μια αεροπορική εταιρεία **έως και 600 ευρώ (σε πτήσεις εντός Ε.Ε)** σε μετρητά για να απομακρύνει έναν επιβάτη **από μια θέση που μπορεί να κόστιζε πολύ λιγότερο**, φαίνεται αντίθετο προς το συμφέρον της. Όμως, αν εξετάσουμε το θέμα πιο αναλυτικά, θα δούμε γιατί **όλες οι αεροπορικές εταιρείες εφαρμόζουν την υπερκράτηση σε κάποιο βαθμό**.

Στα οικονομικά, συχνά χρησιμοποιούνται **"toy models", δηλαδή απλοποιημένα μαθηματικά μοντέλα** που προσπαθούν να εξηγήσουν μια οικονομική συμπεριφορά ή φαινόμενο. Στην περίπτωσή μας, θέλουμε να κατανοήσουμε **πώς επηρεάζεται το έσοδο μιας πτήσης από διαφορετικά επίπεδα υπερκράτησης**.

Ας δούμε μερικές από τις βασικές παραμέτρους - μεταβλητές που θα μπορούσαν να επηρεάσουν αυτό το μοντέλο: *Αριθμός διαθέσιμων θέσεων, Τιμή κάθε θέσης, Πιθανότητα να πουληθούν όλες οι θέσεις, Πιθανότητα ένας πελάτης να μην εμφανιστεί (no-show), Κόστος απομάκρυνσης ενός επιβάτη από μια υπερκρατημένη θέση, Ποσό χρημάτων που επιστρέφεται στους επιβάτες που δεν εμφανίζονται, Τύπος πτήσης (προορισμός, διάρκεια κ.λπ.) κ.ά.*

Για να δημιουργήσουμε ένα πιο διαχειρίσιμο μοντέλο, κάνουμε ορισμένες σημαντικές (και ίσως μη ρεαλιστικές) υποθέσεις: *Όλες οι θέσεις έχουν την ίδια τιμή, όλες οι θέσεις πωλούνται, το κόστος απομάκρυνσης ενός επιβάτη είναι σταθερό για κάθε άτομο, κάθε επιβάτης έχει την ίδια γνωστή πιθανότητα να μην εμφανιστεί.*

Με αυτές τις υποθέσεις, μπορούμε να δημιουργήσουμε φόρμουλες υπολογισμού των εσόδων (ανά πτήση), του κόστους αποζημιώσεων σε περίπτωση υπερκράτησης, επιστροφή χρημάτων σε επιβάτες που ακύρωσαν εγκαίρως την πτήση τους. Έτσι προκύπτει ότι:

Αξία εισιτηρίου × **Αριθμός εισιτηρίων** − **Κόστος Overbooking** − **Επιστροφές χρημάτων λόγω ακυρώσεων** = **Πρόσοδος**

Ένα βασικό σημείο εδώ είναι ότι ο αριθμός των ατόμων που δεν εμφανίζονται (no-shows) (επηρεάζοντας κυρίως τη μεταβλητή του κόστους αποζημιώσεων για Overbooking) δεν είναι ένας ντετερμινιστικός αριθμός· ποικίλει και οι αεροπορικές εταιρείες δεν μπορούν ποτέ να γνωρίζουν ακριβώς πόσοι επιβάτες δεν θα παρουσιαστούν. Ωστόσο, επειδή γνωρίζουμε την πιθανότητα να μην εμφανιστεί ένα άτομο (από τα δεδομένα των αεροπορικών εταιρειών), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτήν την πληροφορία για

---

[1] Το **overbooking** άρχισε να εφαρμόζεται ευρέως από τις αεροπορικές εταιρείες στις δεκαετίες του **1940-1950**. Οι αεροπορικές εταιρείες παρατήρησαν ότι ένα ποσοστό επιβατών δεν εμφανιζόταν στις πτήσεις τους (no-shows), οπότε άρχισαν να πωλούν περισσότερα εισιτήρια από τις διαθέσιμες θέσεις για να μεγιστοποιήσουν τα έσοδά τους. Η πρακτική αυτή ενισχύθηκε τη δεκαετία του **1970**, όταν στις ΗΠΑ απελευθερώθηκε η αεροπορική αγορά (Deregulation Act του 1978), επιτρέποντας στις εταιρείες να εφαρμόζουν πιο δυναμικές στρατηγικές τιμολόγησης και διαχείρισης κρατήσεων. Σήμερα, το **overbooking** εφαρμόζεται όχι μόνο στις αεροπορικές εταιρείες αλλά και σε ξενοδοχεία, εταιρείες ενοικίασης αυτοκινήτων και άλλες υπηρεσίες, βασισμένο σε αλγόριθμους που προβλέπουν την πιθανότητα ακύρωσης ή μη εμφάνισης των πελατών.

να δημιουργήσουμε μια κατανομή του συνολικού αριθμού των αναμενόμενων no-shows.
Κάθε άτομο που αγοράζει ένα εισιτήριο έχει πιθανότητα **p** να παρουσιαστεί για την πτήση, συνεπώς η πιθανότητα να μην εμφανιστεί είναι **q = 1 - p**. Υποθέτουμε ότι αυτές οι πιθανότητες είναι ομοιογενείς για όλους τους επιβάτες και ότι οι αποφάσεις εμφάνισης είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Ωστόσο, αυτές οι υποθέσεις δεν είναι απολύτως ρεαλιστικές, καθώς διαφορετικές κατηγορίες επιβατών ενδέχεται να παρουσιάζουν διαφοροποιημένη συμπεριφορά ως προς την πιθανότητα ακύρωσης. Επιπλέον, σε ορισμένες περιπτώσεις, η απόφαση ακύρωσης ενός επιβάτη μπορεί να επηρεάζει την πιθανότητα ακύρωσης άλλων (π.χ. σε περίπτωση σοβαρών κυκλοφοριακών διαταραχών κοντά στο αεροδρόμιο, είναι πιθανό ένας σημαντικός αριθμός επιβατών να μην προλάβει την πτήση). Παρά τις απλοποιήσεις αυτές, το παραπάνω μοντέλο αποτελεί μια εύλογη πρώτη προσέγγιση. Έστω ότι το αεροσκάφος διαθέτει **Κ** καθίσματα και η αεροπορική εταιρεία έχει διαθέσει **ν** εισιτήρια, όπου ν ≥ **Κ**. Το βασικό ζήτημα απόφασης για την εταιρεία είναι ο προσδιορισμός της τιμής του **ν**, δηλαδή ο αριθμός των επιπλέον εισιτηρίων που θα εκχωρηθούν πέραν της χωρητικότητας του αεροσκάφους (overbooking). Για να διαμορφώσουμε ένα αναλυτικό μοντέλο, εξετάζουμε την **τυχαία μεταβλητή Χ** [2], η οποία αντιπροσωπεύει τον συνολικό αριθμό των επιβατών που εμφανίζονται για την πτήση, δεδομένου ότι έχουν πωληθεί **ν** εισιτήρια. Το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί στο πλαίσιο της **διωνυμικής κατανομής** *(binomial distribution),* η οποία περιγράφει την πιθανότητα εμφάνισης ενός δεδομένου αριθμού επιτυχιών σε **κ** ανεξάρτητες δοκιμές, όπου κάθε δοκιμή έχει δύο δυνατές εκβάσεις (επιτυχία ή αποτυχία). Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, **κάθε επιβάτης θεωρείται ως μια ανεξάρτητη δοκιμή: η εμφάνισή του στην πτήση αποτελεί επιτυχία, ενώ η απουσία του αποτελεί αποτυχία**. Συνεπώς, ο αριθμός των επιβατών που εμφανίζονται ακολουθεί μια διωνυμική κατανομή με παραμέτρους **ν** (συνολικός αριθμός εισιτηρίων) και **p** (πιθανότητα εμφάνισης κάθε επιβάτη). Χρησιμοποιώντας τη **διωνυμική κατανομή**, μπορούμε να εκφράσουμε την πιθανότητα ότι **k** επιβάτες θα εμφανιστούν στην πτήση, δεδομένου ότι έχουν πωληθεί **ν** εισιτήρια, ως εξής: $P(X=\kappa)=\binom{\nu}{\kappa}\cdot p^{\kappa}\cdot(1-p)^{\nu-\kappa}, \nu\ge\kappa$

- **Χ** είναι η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον αριθμό των επιβατών που εμφανίζονται,
- **ν** είναι ο συνολικός αριθμός των εισιτηρίων που έχουν πωληθεί,
- **p** είναι η πιθανότητα κάθε μεμονωμένος επιβάτης να εμφανιστεί στην πτήση,
- **k** είναι ο αριθμός των επιβατών που τελικά εμφανίζονται,
- $\binom{\nu}{\kappa}$ είναι ο συντελεστής των συνδυασμών, που εκφράζει το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε **k** επιβάτες από τους **ν** που αγόρασαν εισιτήριο.

Αυτή η εξίσωση περιγράφει τη **διωνυμική κατανομή** η οποία είναι κατάλληλη για καταστάσεις όπου έχουμε ανεξάρτητες, δυαδικές εκβάσεις (επιτυχία/αποτυχία) με σταθερή πιθανότητα εμφάνισης.
Τώρα έχουμε ένα σύνολο εξισώσεων που μας δίνουν τις πιθανότητες για διαφορετικούς αριθμούς επιβατών που θα εμφανιστούν στην πτήση. Εξετάζουμε την περίπτωση όπου θέλουμε να περιορίσουμε την υπεράριθμη κράτηση (overbooking) έτσι ώστε να απορρίπτονται επιβάτες μόνο σε ένα μικρό ποσοστό πτήσεων.
Για να απορριφθεί ένας επιβάτης λόγω έλλειψης θέσεων, ο αριθμός των επιβατών που εμφανίζονται, **Χ**, πρέπει να είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των διαθέσιμων θέσεων **Κ**, δηλαδή $P(X>K)$.

Μπορούμε να εκφράσουμε αυτήν την πιθανότητα χρησιμοποιώντας την **διωνυμική κατανομή** που ορίσαμε νωρίτερα. Συγκεκριμένα, η πιθανότητα υπεράριθμων επιβατών (δηλαδή το ενδεχόμενο ότι περισσότεροι από **Κ** επιβάτες θα εμφανιστούν) είναι το συμπληρωματικό άθροισμα των πιθανοτήτων

[2] Στη θεωρία πιθανοτήτων, μια **τυχαία μεταβλητή** (random variable) είναι μια μεταβλητή που λαμβάνει τιμές σύμφωνα με την πιθανότητα εμφάνισης διαφορετικών ενδεχομένων σε ένα τυχαίο πείραμα. Με άλλα λόγια, μια τυχαία μεταβλητή είναι μια μαθηματική συνάρτηση που αντιστοιχίζει κάθε πιθανό αποτέλεσμα ενός τυχαίου πειράματος σε έναν αριθμό.

μέχρι το **Κ**: $$P(X>K)=1-P(X\le K)=1-\sum_{i=0}^{K}P(X=i)$$

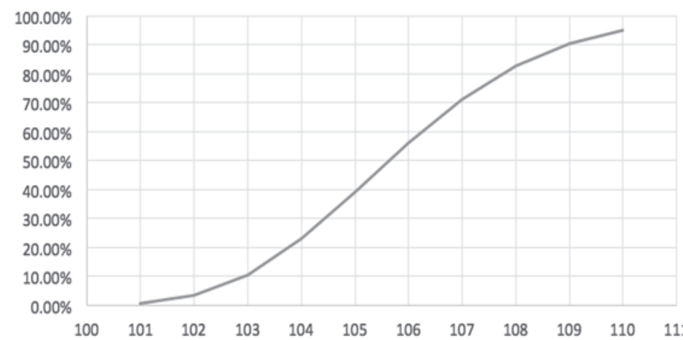
Χρησιμοποιώντας τη **διωνυμική κατανομή** που ορίσαμε προηγουμένως:

$$P(X>K)=1-\sum_{i=0}^{K}\binom{\nu}{i}\cdot p^{i}\cdot(1-p)^{\nu-i}$$

Αυτή η εξίσωση μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την πιθανότητα να εμφανιστούν περισσότεροι επιβάτες από τις διαθέσιμες θέσεις, γεγονός που οδηγεί σε επιβάτες που δεν μπορούν να επιβιβαστούν.
Για να διασφαλίσουμε ότι η πιθανότητα απόρριψης επιβατών παραμένει χαμηλή π.χ. μικρότερη από ένα αποδεκτό όριο **α,** η αεροπορική εταιρεία πρέπει να επιλέξει τον αριθμό των πωληθέντων εισιτηρίων **ν** έτσι ώστε: $$P(X>K)\le\alpha$$

Αυτή η συνθήκη επιτρέπει τη βελτιστοποίηση της πολιτικής overbooking, διατηρώντας παράλληλα υψηλά ποσοστά πληρότητας και ελαχιστοποιώντας τις περιπτώσεις απορριφθέντων επιβατών.

Ας δούμε πώς λειτουργεί αυτό με ένα παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι το ποσοστό ακύρωσης είναι 5% (οπότε *p = 0.05*) και αντίστοιχα, το ποσοστό εμφάνισης είναι 95% (οπότε *1−p = 0.95*). Για ένα αεροπλάνο με χωρητικότητα Κ=100, μπορεί να θέλουμε η πιθανότητα να εμφανιστούν περισσότερα άτομα από τη διαθέσιμη χωρητικότητα να είναι κάτω από 5%. Αυτό σημαίνει ότι λιγότερες από 1 στις 20 πτήσεις θα χρειαστεί να απορρίψουν κάποιον επιβάτη. Ο πίνακας και το γράφημα που παρατίθενται δείχνουν τις σχετικές πιθανότητες, όπως δίνονται από τη διωνυμική κατανομή.



Πιθανότητα μη επιβίβασης συναρτήσει του συνολικού αριθμού κρατήσεων

Παρατηρούμε για παράδειγμα ότι $P(X_{101}>100)=0,56\%$, δηλαδή ότι για 101 κρατημένες θέσεις, η πιθανότητα να εμφανιστούν και οι 101 επιβάτες είναι ίση με $0,56\%$.
Μελετώντας και τα υπόλοιπα αποτελέσματα προκύπτει ότι η αεροπορική εταιρεία πρέπει να κάνει κράτηση μέχρι και 102 θέσεων (2 περισσότερων από τον μέγιστο αριθμό θέσεων του αεροπλάνου) αφού: $P(X_{102}>100)=3,4\%<5\%<10,65\%=P(X_{103}>100)$.

Το **overbooking** αποτελεί μια καθιερωμένη πρακτική στις αεροπορικές μεταφορές, καθώς επιτρέπει τη βέλτιστη διαχείριση των διαθέσιμων θέσεων και τη μεγιστοποίηση των εσόδων των αεροπορικών εταιρειών. Η εφαρμογή της βασίζεται σε μαθηματικά μοντέλα που επιτρέπουν την πρόβλεψη της ζήτησης, τον υπολογισμό του ποσοστού των επιβατών που δεν θα εμφανιστούν (no-shows) και τη διαχείριση του κινδύνου υπερκάλυψης των θέσεων.
Στον πυρήνα της μαθηματικής ανάλυσης του overbooking βρίσκεται η **θεωρία πιθανοτήτων και η στατιστική**. Η πρόβλεψη του αριθμού των επιβατών που τελικά θα εμφανιστούν σε μια πτήση μπορεί να περιγραφεί με τη **διωνυμική κατανομή**, δεδομένου ότι κάθε επιβάτης έχει μια γνωστή πιθανότητα εμφάνισης ή απουσίας. Συγκεκριμένα, αν ένας επιβάτης εμφανίζεται με πιθανότητα *p* και δεν εμφανίζεται με πιθανότητα *1-p*, τότε ο συνολικός αριθμός επιβατών που θα επιβιβαστούν σε μια πτήση με *n* κρατήσεις ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή *B(n, p).* Σε περιπτώσεις μεγάλων δειγμάτων, η διωνυμική κατανομή προσεγγίζεται από την **κανονική κατανομή**, γεγονός που επιτρέπει τον υπολογισμό του κινδύνου υπερκράτησης μέσω της εύρεσης των ορίων εμπιστοσύνης.
Αντίστοιχα, για περιπτώσεις όπου ο αριθμός των no-shows είναι μικρός, χρησιμοποιείται η **κατανομή Poisson** ως προσέγγιση, η οποία περιγράφει σπάνια γεγονότα.

Εκτός από τα πιθανοθεωρητικά μοντέλα, οι αεροπορικές εταιρείες χρησιμοποιούν **αλγόριθμους βελτιστοποίησης** για τη διαχείριση της υπερκράτησης. Ο κύριος στόχος είναι η εξισορρόπηση μεταξύ των εσόδων που προκύπτουν από την πώληση επιπλέον εισιτηρίων και του κόστους που συνεπάγεται η αποζημίωση των επιβατών που δεν μπορούν να επιβιβαστούν. Το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως μια συνάρτηση κέρδους της μορφής: ***max (Έσοδα από εισιτήρια – Κόστος αποζημιώσεων)*** όπου το πλήθος των επιπλέον εισιτηρίων επιλέγεται έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η πιθανότητα μεγάλης οικονομικής ζημίας λόγω υπερκράτησης.

Παράλληλα, η **θεωρία ουρών** χρησιμοποιείται για την ανάλυση της εξυπηρέτησης επιβατών σε περιπτώσεις όπου απαιτείται η μεταφορά τους σε άλλη πτήση. Τα μαθηματικά μοντέλα αναμονής, όπως η ουρά αναμονής **M/M/1** , μπορούν να προβλέψουν τον μέσο χρόνο αναμονής των επιβατών που επηρεάζονται από την υπερκράτηση, βοηθώντας στην οργάνωση της διαδικασίας διαχείρισης της επιβατικής κίνησης.

Αριθμός Κρατημένων (Booked) Θέσεων	Πιθανότητα εμφάνισης K>100
101	0,56%
102	3,4%
103	10,65%
104	23,08%
105	39,24%
106	56,22%
107	71,21%
108	82,67%
109	90,4%
110	95,08%

Συνολικά, η μαθηματική μοντελοποίηση του overbooking αποτελεί κρίσιμο εργαλείο για τις αεροπορικές εταιρείες, καθώς τους επιτρέπει να λαμβάνουν στρατηγικές αποφάσεις που βελτιστοποιούν την οικονομική τους απόδοση, ενώ παράλληλα διασφαλίζουν την ικανοποίηση των επιβατών μέσω αποδοτικών μηχανισμών διαχείρισης των υπερκρατήσεων. Παρακάτω παρατίθεται μια επιλογή βιβλιογραφικών πηγών που εξετάζουν τα μαθηματικά μοντέλα που εφαρμόζονται στην πρακτική της υπερκράτησης (overbooking) στις αεροπορικές εταιρείες:

Συμπερασματικά, η πρακτική της υπερκράτησης (overbooking) στις αεροπορικές μεταφορές δεν αποτελεί απλώς μια επιχειρηματική στρατηγική, αλλά βασίζεται σε αυστηρά μαθηματικά μοντέλα που επιτρέπουν τη βέλτιστη διαχείριση των διαθέσιμων πόρων. Η χρήση της θεωρίας πιθανοτήτων, των στατιστικών κατανομών και των μοντέλων βελτιστοποίησης εσόδων επιτρέπει στις αεροπορικές εταιρείες να εκτιμήσουν τον αριθμό των no-shows και να ισορροπήσουν ανάμεσα στην οικονομική αποδοτικότητα και την ικανοποίηση των επιβατών. Παρόλο που τα υπάρχοντα μαθηματικά μοντέλα έχουν βελτιώσει σημαντικά τη διαχείριση του overbooking, εξακολουθούν να υπάρχουν προκλήσεις, όπως οι μη προβλέψιμες μεταβολές στη συμπεριφορά των επιβατών και οι ρυθμιστικοί περιορισμοί. Η εξέλιξη της τεχνητής νοημοσύνης και της ανάλυσης δεδομένων σε πραγματικό χρόνο αναμένεται να ενισχύσει περαιτέρω την ακρίβεια των προβλέψεων και να συμβάλει στη διαμόρφωση ακόμη πιο αποδοτικών στρατηγικών. Σε έναν κλάδο όπου ο ανταγωνισμός είναι έντονος και η εμπειρία των επιβατών αποτελεί καθοριστικό παράγοντα, η συνεχής ανάπτυξη και εφαρμογή προηγμένων μαθηματικών μοντέλων θα εξακολουθήσει να διαδραματίζει κρίσιμο ρόλο στη διαχείριση της αεροπορικής επιβατικής κίνησης.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Παπαριστοδήμου, Έ., Μελετίου-Μαυροθέρη, Μ., & Serradó, A. (2017). *Μοντελοποιώντας προβλήματα στατιστικού συλλογισμού*. Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών.

Κρίνος, Γ. (2011). *Αεροπορικές εταιρείες χαμηλού κόστους και προβλήματα ανάπτυξής τους παγκοσμίως και στην Ελλάδα*. Διπλωματική εργασία, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

Talluri, K. T., & van Ryzin, G. J. (2004). *The Theory and Practice of Revenue Management*. Springer.

McGill, J. I., & van Ryzin, G. J. (1999). *Revenue Management: Research Overview and Prospects*. Transportation Science, 33(2), 233-256.

Weatherford, L. R., & Bodily, S. E. (1992). *A Taxonomy and Research Overview of Perishable-Asset Revenue Management: Yield Management, Overbooking, and Pricing*. Operations Research, 40(5), 831-844.

42η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
22 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2025
Ενδεικτικές λύσεις
Θέματα τάξεων Λυκείου

Πρόβλημα 1

Η εξίσωση $x^4+5x^3+mx^2+5nx+4=0$, όπου m,n θετικοί ακέραιοι,

έχει δύο απλές πραγματικές λύσεις με άθροισμα -5. Να προσδιορίσετε την τιμή των m,n και όλες τις λύσεις της εξίσωσης.

Λύση

Έστω $\rho_1<\rho_2$ οι δύο πραγματικές λύσεις της δεδομένης εξίσωσης με $\rho_1+\rho_2=-5$ και $\rho_1\rho_2=b$. Τότε το πολυώνυμο $(x-\rho_1)(x-\rho_2)=x^2-(\rho_1+\rho_2)x+\rho_1\rho_2=x^2+5x+b$ είναι διαιρέτης του πολυωνύμου $x^4+5x^3+mx^2+5nx+4$, οπότε έχουμε την ισότητα πολυωνύμων $\quad x^4+5x^3+mx^2+5nx+4=(x^2+5x+b)(x^2+cx+d)$,

με $b,c,d\in\mathbb{R}$, $25-4b>0$ και $c^2-4d<0$ και m,n θετικοί ακέραιοι. Επομένως, έχουμε την ισότητα πολυωνύμων

$$x^4+5x^3+mx^2+5nx+4=x^4+(c+5)x^3+(b+d+5c)x^2+(bc+5d)x+bd,$$

$$\Leftrightarrow c+5=5, b+d+5c=m, bc+5d=5n, bd=4,$$
$$\Leftrightarrow c=0,\qquad b+d=m,\qquad d=n,\qquad bd=4.$$

Επειδή $d=n$ θετικός ακέραιος, από την ισότητα $b+d=m$, όπου m θετικός ακέραιος, έπεται ότι και ο $b=m-n$ είναι θετικός ακέραιος, αφού $bd=4>0$, οπότε έχουμε:

$$n(m-n)=4\Leftrightarrow (n,m-n)\in\{(1,4),(4,1),(2,2)\}\Leftrightarrow (m,n)\in\{(5,1),(5,4),(4,2)\}.$$

Για την εύρεση των ριζών της εξίσωσης έχουμε τις περιπτώσεις:

(α) Αν $(m,n)=(5,1)$ τότε $b=4, d=1$ και η εξίσωση γίνεται

$$(x^2+5x+4)(x^2+1)=0\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=-4 \text{ ή } x=i \text{ ή } x=-i.$$

(β) Αν $(m,n)=(5,4)$, τότε $b=1,\ d=4$ και η εξίσωση γίνεται

$$(x^2+5x+1)(x^2+4)=0\Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2} \text{ ή } x=2i \text{ ή } x=-2i.$$

(γ) Αν $(m,n)=(4,2)$, τότε $b=2,\ d=2$ και η εξίσωση γίνεται

$$(x^2+5x+2)(x^2+2)=0\Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2} \text{ ή } x=\sqrt{2}\,i \text{ ή } x=-\sqrt{2}\,i.$$

2ος τρόπος. Έστω $P(x) = x^4 + 5x^3 + mx^2 + 5nx + 4$ και έστω b το γινόμενο των δύο πραγματικών ριζών του P(x). Η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης $P(x)$: $(x^2 + 5x + b)$ είναι $P(x) = (\,x^2 + 5x + b)(x^2 + m - b) + (5b - 5m + 5n)x + b^2 - bm + 4.$
Το υπόλοιπο της διαίρεσης, αφού έχει δύο πραγματικές ρίζες (δηλαδή αυτές του τριωνύμου $x^2 + 5x + b$), είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Αυτό ισχύει αν, και μόνο αν,

$$b = m - n \quad \text{και} \quad b^2 - bm + 4 = 0.$$

Έτσι, $m = b + n$, ενώ με αντικατάσταση της πρώτης σχέσης στη δεύτερη παίρνουμε $bn = 4$. Αφού ο b είναι θετικός ακέραιος, παίρνουμε τις τριάδες $(b, m, n) = (1{,}5{,}4), (2{,}4{,}2)$, και $(4{,}5{,}1)$. Η εύρεση των ριζών γίνεται όπως στον πρώτο τρόπο.

Σχόλιο. Οι σχέσεις $b = m - n$ και $bn = 4$ προκύπτουν και από τους τύπους Vieta για τις ρίζες του $P(x)$. Πράγματι, το άθροισμα των ριζών $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ του $P(x)$ είναι ίσο

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 = -5,$$

οπότε το $P(x)$ έχει δύο ρίζες ρ_3, ρ_4 οι οποίες είναι συζυγείς μη πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα μηδέν. Άρα είναι της μορφής $\rho_3 = \alpha i$ και $\rho_4 = -\alpha i$ για κάποιο $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$. Από την $P(\alpha i) - P(-\alpha i) = 0$, παίρνουμε $10 i \alpha^3 - 10 i \alpha n = 0$, και αφού $\alpha \neq 0$, έπεται ότι $n = a^2$. Επιπλέον, από τους τύπους του Vieta, έχουμε: $\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 = 4$,
η οποία δίνει $bn = ba^2 = 4$. Και πάλι από τους τύπους του Vieta, έχουμε

$$\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_1\rho_4 + \rho_2\rho_3 + \rho_2\rho_4 + \rho_3\rho_4 = m.$$

Αφού

$$\rho_1\rho_3 + \rho_1\rho_4 + \rho_2\rho_3 + \rho_2\rho_4 = (\rho_1 + \rho_2)(\rho_3 + \rho_4) = -5 \cdot 0 = 0,$$

$\rho_1\rho_2 = b$, και $\rho_3\rho_4 = a^2 = n$, παίρνουμε $b + n = m$.

Πρόβλημα 2

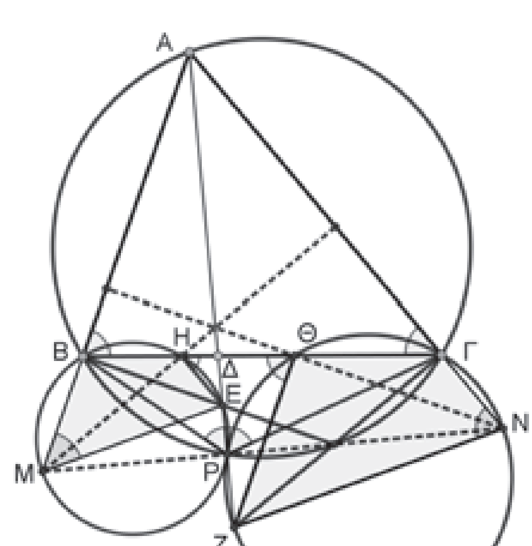
Έστω ΑΒΓ οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο και έστω Δ ένα σημείο της πλευράς ΒΓ. Θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ στην ευθεία ΑΔ τέτοια, ώστε ΕΒ ⊥ ΑΒ και ΖΓ ⊥ ΑΓ, και τα σημεία Η και Θ στην ευθεία ΒΓ τέτοια, ώστε ΕΗ ∥ ΑΓ και ΖΘ ∥ ΑΒ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΗΕ τέμνει για δεύτερη φορά την ευθεία ΑΒ στο σημείο Μ (Μ ≠ Β), και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΘΖ τέμνει για δεύτερη φορά την ευθεία ΑΓ στο σημείο Ν (Ν ≠ Γ). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΜΗ, ΝΘ και ΑΔ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση

Παρατηρούμε ότι από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΜΒΗΕ προκύπτει η ισότητα

$$\mathrm{M\widehat{H}E} = \mathrm{M\widehat{H}E} = 90^0,$$

οπότε από την παραλληλία ΕΗ ∥ ΑΓ προκύπτει ότι ΜΗ ⊥ ΑΓ. Ομοίως προκύπτει και η σχέση ΝΘ ⊥ ΑΒ, οπότε οι ευθείες ΜΗ και ΝΘ ορίζουν δύο ύψη του τριγώνου ΑΜΝ. Επομένως για τη λύση του προβλήματος, αρκεί να αποδείξουμε ότι ΑΔ ⊥ ΜΝ.
Έστω Ρ το σημείο τομής της ευθείας ΑΔ με τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ. Από τη σχέση ΖΘ ∥ ΑΒ και τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα ΒΜΕΗ και ΖΝΓΘ έχουμε:



$$\mathrm{B\widehat{M}E} = \mathrm{E\widehat{H}\Gamma} = \mathrm{H\widehat{\Gamma}A} = \mathrm{B\widehat{\Gamma}A} = \mathrm{B\widehat{P}A}.$$

Επομένως το τετράπλευρο ΒΜΡΕ είναι εγγράψιμο, οπότε το σημείο Ρ ανήκει στο περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΒΗΕ. Άρα είναι

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{P}}\mathrm{M} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{P}}\mathrm{M} = 180^o - \mathrm{M}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = 180^o - 90^o = 90^o$$

και συνεπώς $\mathrm{AP} \perp \mathrm{MP}$.
Ομοίως, από τη σχέση $\mathrm{EH} \parallel \mathrm{A\Gamma}$ και τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα ΒΜΕΗ και ΖΝΓΘ έχουμε:

$$\Gamma\hat{\mathrm{P}}\mathrm{A} = \Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = \mathrm{B}\hat{\Theta}\mathrm{Z} = \mathrm{Z}\hat{\mathrm{N}}\Gamma.$$

Επομένως το τετράπλευρο ΡΖΝΓ είναι εγγράψιμο, οπότε το σημείο Ρ ανήκει στο περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΓΘΖ. Άρα είναι $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{P}}\mathrm{N} = \mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{N} = 90^o$ και συνεπώς

$$\mathrm{AP} \perp \mathrm{PN}.$$

Από τις σχέσεις $\mathrm{AP} \perp \mathrm{MP}$ και $\mathrm{AP} \perp \mathrm{PN}$ προκύπτει ότι τα σημεία Μ, Ρ, Ν είναι συνευθειακά και ότι $\mathrm{A\Delta} \perp \mathrm{MN}$.

Πρόβλημα 3

Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $\boldsymbol{f}: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, για τις οποίες ισχύει:

$$\boldsymbol{f(x+2y) + f(2x-y) = 5f(x) + 5f(y)}, \text{ για κάθε } \boldsymbol{x, y} \in \mathbb{Q}.$$

Λύση

Με $x = y = 0$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε: $f(0) = 0$.
Με $x \in \mathbb{Q}^*$, $y = 0$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε:

$$f(x) + f(2x) = 5f(x) + 5f(0) \Rightarrow f(2x) = 4f(x) \Rightarrow f(2x) = 2^2 f(x)$$

Με $x = y \in \mathbb{Q}^*$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε:

$$f(3x) + f(x) = 10f(x) \Rightarrow f(3x) = 9\,f(x) = 3^2\,f(x).$$

Επιπλέον, με $x = 0$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε:

$$f(2y) + f(-y) = 5f(y) \Rightarrow f(-y) = 5f(y) - 4f(y) \Rightarrow f(-y) = f(y),$$

για κάθε $y \in \mathbb{Q}^*$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι άρτια.
Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε ισχυρή επαγωγή.
Αν υποθέσουμε ότι $f(kx) = k^2 f(x), k = 1,2, \dots, 2n-1 \in \mathbb{N}^*$, για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, τότε:

- Από τη δεδομένη σχέση με $y = 0$ και το nx αντί του x, λαμβάνουμε:
$$f(2nx) + f(nx) = 5f(nx) + 5f(0) \Rightarrow f(2nx) = 4f(nx) = 4n^2 f(x)$$
- Από τη δεδομένη σχέση με $y = nx$ λαμβάνουμε
$$f(x+2nx) + f(2x-nx) = 5f(x) + 5f(nx)$$
$$\xRightarrow{f\ \text{άρτια}} f\big((2n+1)x\big) + f\big((n-2)x\big) = 5f(x) + 5f(nx)$$
$$\Rightarrow f\big((2n+1)x\big) = 5f(x) + 5n^2 f(x) - (n-2)^2 f(x)$$
$$\Rightarrow f\big((2n+1)x\big) = (5n^2 - n^2 + 4n - 4 + 5)f(x)$$
$$\Rightarrow f\big((2n+1)x\big) = (2n+1)^2 f(x).$$

Άρα έχουμε $f(nx) = n^2 f(x)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{Q}$, οπότε για $x = 1$ λαμβάνουμε

$$f(n) = n^2 f(1), n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(n) = an^2, a = f(1), \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

Θεωρούμε τώρα το τυχόν $x = \frac{p}{q} > 0$, με $p, q \in \mathbb{N}^*$. Τότε έχουμε:

$$q^2 f(x) = f(qx) = f(p) = p^2 f(1) \Rightarrow f(x) = \left(\frac{p}{q}\right)^2 f(1),$$

οπότε τελικά, λόγω της αρτιότητας της συνάρτησης f έχουμε

$$f(x) = ax^2, a = f(1), \qquad x \in \mathbb{Q}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = ax^2, a = f(1)$ ικανοποιούν τη δεδομένη συνθήκη.

2ος τρόπος. Παρατηρούμε ότι με $y = 0$, η δοθείσα εξίσωση δίνει

$$f(2x) = 4f(x) + 5f(0) \qquad (1)$$

για κάθε $x \in \mathbb{Q}$. Η (1) με $x = 0$ δίνει $f(0) = 0$, οπότε γράφεται

$$f(2x) = 4f(x), \qquad (2)$$

για κάθε $x \in \mathbb{Q}$. Από την (2) παίρνουμε $f(4x) = 4f(2x) = 16f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, και από την αρχική με $x = y$ παίρνουμε $f(3x) = 10f(x) - f(x) = 9f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{Q}$. Θα αποδείξουμε με επαγωγή επί του n ότι για κάθε $x \in \mathbb{Q}$ ισχύει

$$f(nx) = n^2 f(x) \qquad (3)$$

για κάθε ακέραιο $n \geq 0$. Από τις παραπάνω σχέσεις, η (3) ισχύει για $n = 0, 1, 2, 3$, και 4. Έστω ότι η (3) ισχύει για κάθε $n = 1,2,..,k$, για κάποιο $k \geq 4$. Τότε

$$f\big((k+1)x\big) = f((k-3)x + 4x) = 5f((k-3)x) + 5f(2x) - f(2(k-3)x - 2x).$$

Από την (2) με $(k-4)x$ στη θέση του x, και την επαγωγική υπόθεση παίρνουμε

$$f(2(k-3)x - 2x) = f(2(k-4)x) = 4f\big((k-4)x\big) = 4(k-4)^2 f(x).$$

Έτσι, $\quad f\big((k+1)x\big) = 5(k-3)^2 f(x) + 20f(x) - 4(k-4)^2 f(x) = (k+1)^2 f(x),$

Αφού $\qquad 5(k-3)^2 + 20 - 4(k-4)^2 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2,$

δηλ. η (3) ισχύει και για $n = k+1$, οπότε η επαγωγή ολοκληρώθηκε.
Αν $x = \frac{n}{m} > 0$ θετικός ρητός, τότε $\quad m^2 f(x) = f(mx) = f(n) = n^2 f(1),$

οπότε $f(x) = f(1)x^2$. Με $x = 0$ και $y = x$ στην αρχική εξίσωση, παίρνουμε:

$$f(2x) + f(-x) = 5f(x),$$

οπότε $f(x) = f(-x)$, και άρα $f(x) = f(1)x^2$για κάθε $x \in \mathbb{Q}$. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Πρόβλημα 4

Να αποδείξετε ότι, για κάθε ακέραιο y, ο αριθμός $y^2 + 108$ δεν είναι τέλειος κύβος ακεραίου.

Λύση.

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση

$$y^2 + 108 = x^3 \qquad (1)$$

δεν έχει ακέραιες λύσεις.

Η (1) γράφεται

$$y^2 + 100 = x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4),$$

με $x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 \geq 3$. Αν ο x είναι περιττός, τότε

$$x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 \equiv 3 \ (mod\ 4)$$

οπότε υπάρχει πρώτος αριθμός $p \equiv 3(mod\ 4)$ με $y^2 \equiv -100(mod\ p)$. Τότε, όμως, το -1 θα είναι τετραγωνικό υπόλοιπο $mod\ p$, και άρα $p \equiv 1(mod\ 4)$, άτοπο.
Άρα ο x είναι άρτιος, οπότε το ίδιο ισχύει και για τον y. Έστω $x = 2m$, και $y = 2n$, για κάποιους ακέραιους m, n. Τότε η εξίσωση (1) γράφεται

$$n^2 = 2m^3 - 27.$$

Προφανώς ο n είναι περιττός. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Ο m είναι άρτιος. Τότε $m^3 \equiv 0(mod\ 8)$, οπότε

$$n^2 = 2m^3 - 27 \equiv -3(mod\ 8),$$

άτοπο.

- Ο m είναι περιττός. Τότε $2m^3 \equiv 2(mod\ 4)$ και

$$n^2 = 2m^3 - 27 \equiv -25 \equiv -1 \equiv 3(mod\ 4), \text{άτοπο.}$$

Συνεπώς, δεν υπάρχουν ακέραιοι x, y τέτοιοι ώστε $y^2 + 108 = x^3$.

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 135

Ν59. Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (α, β) για τα οποία ο αριθμός $\frac{7^\alpha - 5^\beta}{8}$ είναι πρώτος.

(ΜΟ Ρουμανίας 2024)

Λύση. Επειδή για κάθε θετικό ακέραιο κ ισχύει ότι:

$$5^{2\kappa} = \pi o\lambda.8 + 1, \quad 5^{2\kappa+1} = \pi o\lambda.8 + 5, \quad 7^{2\kappa} = \pi o\lambda.8 + 1, \quad 7^{2\kappa+1} = \pi o\lambda.8 + 7,$$

έπεται ότι: $8 \big| 7^\alpha - 5^\beta$, μόνον όταν οι α, β είναι άρτιοι. Έστω $\alpha = 2\mu, \beta = 2\nu, \mu, \nu \in \mathbb{N}^*$.
Θα προσδιορίσουμε τους $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$ για τους οποίους ισχύει η ισότητα:

$$7^{2\mu} - 5^{2\nu} = 8\rho, \quad \text{όπου } \rho \text{ πρώτος} \quad \Leftrightarrow \quad (7^\mu - 5^\nu)(7^\mu + 5^\nu) = 8\rho, \quad \text{όπου } \rho \text{ πρώτος.}$$

- Αν $\rho = 2$, τότε $(7^\mu - 5^\nu)(7^\mu + 5^\nu) \neq 16$.
- Αν $\rho \geq 3$, τότε, αφού $7^\mu - 5^\nu, 7^\mu + 5^\nu$ άρτιοι με $7^\mu - 5^\nu < 7^\mu + 5^\nu$, έπεται ότι:
  $\{7^\mu - 5^\nu = 4, \quad 7^\mu + 5^\nu = 2\rho\}$ (I) ή $\{7^\mu - 5^\nu = 2, \quad 7^\mu + 5^\nu = 4\rho\}$. (II)

Περίπτωση I. Επειδή $7^\mu = \pi o\lambda.3 + 1$ και $5^\nu = \pi o\lambda.3 \pm 1$, έπεται ότι:

$$7^\mu - 5^\nu = \pi o\lambda.3, \text{αν } \nu \text{ άρτιος και } 7^\mu - 5^\nu = \pi o\lambda.3 + 2, \text{ αν } \nu \text{ περιττός.}$$

Επειδή $4 = \pi o\lambda.3 + 1$, δεν υπάρχουν λύσεις.

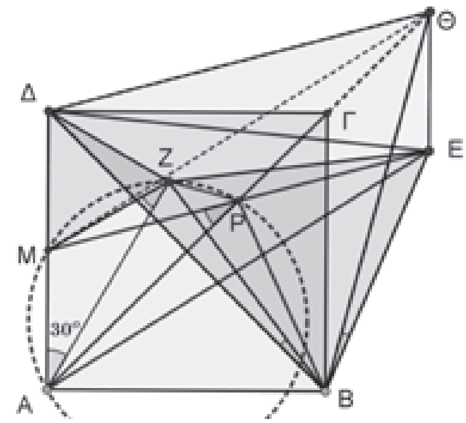
Περίπτωση II. Με πρόσθεση των δύο εξισώσεων κατά μέλη λαμβάνουμε: $2\rho = 7^\mu - 1$.
Επειδή $3|7^\mu - 1$, έπεται ότι $3|2\rho \Rightarrow \rho = 3$. Άρα $\mu = \nu = 1, \rho = 3$ και $(\alpha, \beta) = (2,2)$.

Γ70. Έστω Μ το μέσο της πλευρά ΑΔ τετραγώνου ΑΒΓΔ. Θεωρούμε σημείο Ζ στο εσωτερικό του τετραγώνου ΑΒΓΔ και σημείο Ε στο εξωτερικό του έτσι ώστε τα τρίγωνα ΔΜΖ και ΒΖΕ να είναι ισόπλευρα και η πλευρά ΖΕ να τέμνει την πλευρά ΒΓ. Αν Ρ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΜΕ, να αποδείξετε ότι:
(α) **το σημείο Ρ ανήκει στην ευθεία ΑΓ και**
(β) **η ημιευθεία ΡΜ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ΑΡΖ}$.**

(ΜΟ Ρουμανίας 2024)

Λύση

(α) Κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΔΒΘ έτσι ώστε το σημείο Γ να είναι στο εσωτερικό του. Επειδή τα σημεία Α και Θ βρίσκονται στη μεσοκάθετη του ευθυγράμμου τμήματος ΒΔ έπεται ότι τα σημεία Α, Γ και Θ είναι συνευθειακά.



Τα τρίγωνα ΔΒΖ και ΘΒΕ έχουν ίσες τις πλευρές

$$\Delta\mathrm{B} = \Theta\mathrm{B},\ \mathrm{ZB} = \mathrm{EB}$$

και τις περιεχόμενες γωνίες

$$\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = \Theta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = 60^0 - \mathrm{Z}\hat{\mathrm{B}}\Theta.$$

Άρα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και

$$\mathrm{B}\widehat{\Theta}\mathrm{E} = \mathrm{B}\widehat{\Delta}\mathrm{Z} = \mathrm{M}\widehat{\Delta}\mathrm{Z} - \mathrm{M}\widehat{\Delta}\mathrm{B} = 60^o - 45^o = 15^o \qquad (1)$$

$$\Theta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{Z} = \Delta\mathrm{M} = \mathrm{MA}.$$

Επειδή $\Theta\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = \Theta\widehat{\mathrm{B}}\Delta - \Gamma\widehat{\mathrm{B}}\Delta = 60^o - 45^o = 15^o = \mathrm{B}\widehat{\Theta}\mathrm{E}$, έπεται ότι: $\Theta\mathrm{E} \parallel \mathrm{B}\Gamma \parallel \mathrm{A}\Delta$.

Επομένως, το τετράπλευρο ΘΕΑΜ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε το μέσο Ρ της διαγωνίου ΜΕ είναι και μέσο της διαγωνίου ΑΘ, δηλαδή βρίσκεται στην ευθεία ΑΓ, αφού τα Α, Γ και Θ είναι συνευθειακά.

(β) Επειδή $\Theta\mathrm{E} \parallel \mathrm{DM}$ και $\Theta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{M}$ το τετράπλευρο ΔΜΕΘ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε: $\Delta\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{E} = \Delta\widehat{\Theta}\mathrm{E} = 75^o$. Επομένως έχουμε

$$\mathrm{Z}\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{P} = \Delta\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{P} - \Delta\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{Z} = 75^o - 60^o = 15^o.$$

Επειδή στο τρίγωνο ΑΖΔ η διάμεσος ΖΜ ισούται με το μισό της πλευράς ΑΔ, έπεται ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Delta = 90^o$ και $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z} = 30^o$. Άρα έχουμε

$$\mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{P} = \Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{P} - \Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z} = 45^o - 30^o = 15^o \quad \text{και} \quad \mathrm{M}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{A} = \Delta\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{A} - \Delta\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{M} = 90 - 60^o = 30^o.$$

Επειδή $\mathrm{Z}\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{P} = \mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{P} = 15^o$ το τετράπλευρο ΑΜΖΡ είναι εγγράψιμο με

$$\mathrm{M}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{A} = \mathrm{M}\hat{\mathrm{P}}\mathrm{A} = 30^o \quad \text{και} \quad \mathrm{Z}\hat{\mathrm{P}}\mathrm{M} = \mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{M} = 30^o \Rightarrow \mathrm{Z}\hat{\mathrm{P}}\mathrm{M} = \mathrm{M}\hat{\mathrm{P}}\mathrm{A} = 30^o,$$

οπότε η ημιευθεία ΡΜ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{P}}\mathrm{Z}$.

Ασκήσεις για λύση

Γ71. Δίνεται εγγράψιμο πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ με $\mathrm{AB} = \mathrm{B}\Gamma = \Gamma\Delta$ και του οποίου το κέντρο βάρους συμπίπτει με το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του. Να αποδείξετε ότι το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ είναι κανονικό.

Σημείωση. Το κέντρο βάρους ενός πενταγώνου είναι το σημείο του επιπέδου του πενταγώνου, του οποίου το διάνυσμα θέσης ισούται με τον αριθμητικό μέσο των διανυσμάτων θέσης των κορυφών του.

Α87. Έστω a δεδομένος θετικός ακέραιος και η ακολουθία $(x_n)_{n\geq 1}$ με τύπο

$$x_n = \frac{1}{1+na}, \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

Να αποδείξετε ότι, για κάθε θετικό ακέραιο $k \geq 3$, υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ τέτοιοι ώστε οι αριθμοί $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Η 14η Ευρωπαϊκή Μαθηματική Ολυμπιάδα για Κορίτσια
11 - 17 Απριλίου 2025
Πρίστινα, Κόσοβο

Η 14η Ευρωπαϊκή Μαθηματική Ολυμπιάδα για Κορίτσια πραγματοποιήθηκε από 11 έως 17 Απριλίου 2025 στην πόλη Πρίστινα του Κοσόβου. Συνολικά συμμετείχαν πενήντα έξι χώρες από όλο τον κόσμο με διακόσιες δεκαεννιά μαθήτριες.

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, μέσω των διαγωνισμών «ΘΑΛΗΣ», «ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ» και «ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ» επέλεξε τις παρακάτω τέσσερις (4) μαθήτριες ως μέλη της ελληνικής αποστολής:

Ζάχου Ιωάννα	Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη	Εύφημη Μνεία
Κολέττα Μαρία Στεφανία	Αμερικάνικο Κολλέγιο Ανατόλια	Συμμετοχή
Κράτσα Λυδία	Σχολή Μωραΐτη	Εύφημη Μνεία
Μανώλου Ιφιγένεια	Σχολή Μωραΐτη	Συμμετοχή

Τις μαθήτριες συνόδευσαν ως αρχηγός της Ελληνικής ομάδας ο διδάκτωρ μαθηματικός Αχιλλέας Συνεφακόπουλος, στον οποίο οφείλεται και η επιμέλεια των λύσεων που ακολουθούν, και ως υπαρχηγός ο μαθηματικός Ευάγγελος Ζώτος.

Τα προβλήματα και οι λύσεις τους

Πρόβλημα 1 (Λιθουανία). Για κάθε θετικό ακέραιο N, έστω $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ όλοι οι θετικοί ακέραιοι μικρότεροι του N οι οποίοι είναι σχετικά πρώτοι με τον N. Να βρείτε όλους τους αριθμούς $N \geq 3$ τέτοιους ώστε

$$\text{ΜΚΔ}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

για κάθε $1 \leq i \leq m-1$.

Λύση. Θα αποδείξουμε ότι ο N είναι άρτιος ή $N = 3^k$ για κάποιο θετικό ακέραιο k.

Αρχικά είναι φανερό ότι για κάθε άρτιο ακέραιο N, όλοι οι θετικοί ακέραιοι μικρότεροι του N οι οποίοι είναι σχετικά πρώτοι με τον N είναι περιττοί. Αφού το άθροισμα δύο περιττών είναι άρτιος, ισχύει $\text{ΜΚΔ}(N, c_i + c_{i+1}) \geq 2 > 1$ για κάθε $1 \leq i \leq m-1$.

Αν ο N είναι περιττός, τότε θα έχει $c_1 = 1$ και $c_2 = 2$, οπότε $\text{ΜΚΔ}(N, 3) = \text{ΜΚΔ}(N, c_1 + c_2) > 1$. Αφού ο 3 είναι πρώτος, είναι $\text{ΜΚΔ}(N, 3) = 3$, και άρα ο N είναι πολλαπλάσιο του 3.

Αν $N = 3^k$ και $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ είναι όλοι οι θετικοί ακέραιοι μικρότεροι του N οι οποίοι είναι σχετικά πρώτοι με τον N, τότε θα αφήνουν εναλλάξ υπόλοιπα 1 και 2 κατά τη διαίρεση τους με το 3, και άρα $\text{ΜΚΔ}(N, c_i + c_{i+1}) \geq 3 > 1$ για κάθε $1 \leq i \leq m-1$.

Έστω ότι $N = 3^k m$ για κάποιους ακέραιους k, με $k \geq 1$, και $m > 3$ περιττό, ο οποίος δεν διαιρείται από το 3. Έχουμε τις περιπτώσεις:

ii) $m \equiv 1 \pmod 3$. Τότε δύο διαδοχικοί όροι της ακολουθίας (c_n) είναι ο $m-2$ και ο $m+1$. Πράγματι, ο $m-2$ είναι περιττός με $m-2 \equiv 2 \pmod 3$. Άρα ΜΚΔ$(m-2, N) = 1$, οπότε υπάρχει i τέτοιο ώστε $c_i = m-2$.

Αφού ο $m-1$ διαιρείται από το 3, είναι ΜΚΔ$(m-1, N) \geq 3 > 1$, και άρα ο $m-1$ δεν είναι όρος της ακολουθίας (c_n), ενώ είναι προφανές ότι ούτε ο m είναι, αφού ΜΚΔ$(N, m) = m > 1$.

Όμως, έχουμε $m+1 \equiv 2 \pmod 3$ και ΜΚΔ$(m, m+1) = 1$, οπότε ΜΚΔ$(N, m+1) = 1$. Δηλαδή, $c_{i+1} = m+1$. Τότε

$$c_i + c_{i+1} = m - 2 + m + 1 = 2m - 1,$$

με ΜΚΔ$(m, c_i + c_{i+1}) = 1$. Επίσης, αφού $2m - 1 \equiv 1 \pmod 3$, είναι ΜΚΔ$(3^k, c_i + c_{i+1}) = 1$. Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε ότι ΜΚΔ$(N, c_i + c_{i+1}) = 1$.

iii) $m \equiv 2 \pmod 3$. Τότε δύο διαδοχικοί όροι της ακολουθίας (c_n) είναι ο $m-1$ και ο $m+2$.

Ο $m-1$ είναι άρτιος με ΜΚΔ$(m-1, m) = 1$ και $m-1 \equiv 1 \pmod 3$. Άρα ΜΚΔ$(m-1, N) = 1$, οπότε υπάρχει i τέτοιο ώστε $c_i = m-1$.

Είναι προφανές, όπως πριν, ότι ΜΚΔ$(N, m) = m > 1$, ενώ αφού ο $m+1$ διαιρείται από το 3, είναι ΜΚΔ$(m+1, N) \geq 3 > 1$, και άρα οι αριθμοί m και $m+1$ δεν είναι όροι της ακολουθίας (c_n).

Όμως, έχουμε $m+2 \equiv 1 \pmod 3$ και ΜΚΔ$(m, m+2) = 1$, αφού m περιττός, οπότε ΜΚΔ$(N, m+2) = 1$. Δηλαδή, $c_{i+1} = m + 2$. Τότε

$$c_i + c_{i+1} = m - 1 + m + 2 = 2m + 1,$$

με ΜΚΔ$(m, c_i + c_{i+1}) = 1$. Επίσης, αφού $2m + 1 \equiv 2 \pmod 3$, είναι ΜΚΔ$(3^k, c_i + c_{i+1}) = 1$. Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε ότι ΜΚΔ$(N, c_i + c_{i+1}) = 1$.

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Πρόβλημα 2 (Ολλανδία). Μια άπειρη γνησίως αύξουσα ακολουθία $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ θετικών ακέραιων αριθμών αποκαλείται *κεντρική* αν για κάθε θετικό ακέραιο n, ο μέσος όρος των πρώτων a_n όρων της ακολουθίας είναι ίσος με a_n.

Να δείξετε ότι υπάρχει μια άπειρη ακολουθία $b_1, b_2, b_3, \ldots$ θετικών ακέραιων αριθμών τέτοια, ώστε για κάθε κεντρική ακολουθία $a_1, a_2, a_3, \ldots$, υπάρχουν άπειροι θετικοί ακέραιοι n με $a_n = b_n$.

Λύση. Ισχυριζόμαστε ότι η ακολουθία $b_1, b_2, b_3, \ldots$ με $b_i = 2i - 1$ έχει αυτή την ιδιότητα.

Έστω $d_i = a_i - b_i = a_i - 2i + 1$. Τότε η συνθήκη $a_i < a_{i+1}$ γίνεται $d_i + 2i - 1 < d_{i+1} + 2i + 1$, η οποία γράφεται $d_{i+1} \geq d_i - 1$. Έτσι, αν $d_{i+1} < d_i$, τότε αναγκαστικά είναι $d_{i+1} = d_i - 1$. Αυτό σημαίνει ότι αν $d_{i_0} \geq 0$ αλλά $d_{i_1} \leq 0$ για κάποιους δείκτες $i_1 > i_0$, τότε υπάρχει κάποιος ενδιάμεσος δείκτης $i_0 \leq i \leq i_1$ με $d_i = 0$.

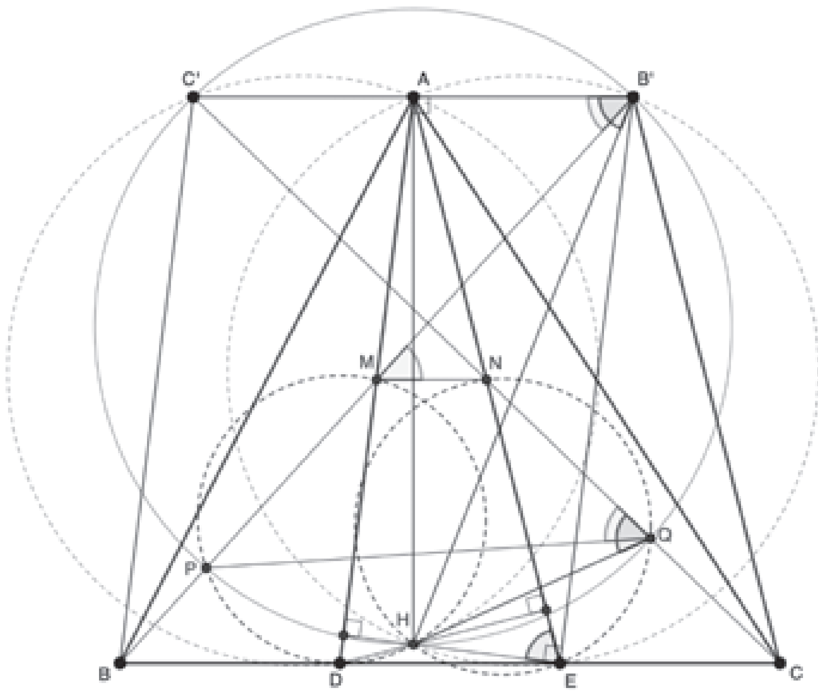
Επειδή ο μέσος όρος των πρώτων a_n όρων της ακολουθίας είναι ίσος με a_n, γνωρίζουμε ότι για κάθε n ισχύει

$$\sum_{i=1}^{a_n} d_i = \sum_{i=1}^{a_n} (a_i - 2i + 1) = \sum_{i=1}^{a_n} a_i - \sum_{i=1}^{a_n} (2i - 1) = a_n^2 - a_n^2 = 0.$$

Αφού η ακολουθία (a_n) είναι γνησίως αύξουσα, από την παραπάνω σχέση έπεται ότι η ακολουθία (d_i) περιέχει άπειρους σε πλήθος μη-αρνητικούς όρους ($d_i \geq 0$) και άπειρους σε πλήθος μη-θετικούς όρους ($d_i \leq 0$). Έτσι, μπορούμε να βρούμε αρκούντως μεγάλους δείκτες $i_0 \leq i_1$ τέτοιους ώστε $d_{i_0} \geq 0$ και $d_{i_1} \leq 0$. Από την προηγούμενη παρατήρηση μας, έπεται ότι υπάρχουν άπειροι σε πλήθος δείκτες i τέτοιοι ώστε $d_i = 0$, όπως θέλαμε.

Πρόβλημα 3 (Σλοβακία). Έστω ABC ένα οξυγώνιο τρίγωνο. Τα σημεία B, D, E, και C βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία με αυτή τη σειρά, και ικανοποιούν την σχέση $BD = DE = EC$. Έστω M και N τα μέσα των AD και AE, αντίστοιχα. Έστω ότι το τρίγωνο ADE είναι οξυγώνιο και έστω H το ορθόκεντρό του. Έστω P και Q σημεία στις ευθείες BM και CN, αντίστοιχα, τέτοια, ώστε τα σημεία D, H, M, και P να είναι ομοκυκλικά και διαφορετικά ανά δύο, και τα σημεία E, H, N, και Q να είναι επίσης ομοκυκλικά και διαφορετικά ανά δύο. Να δείξετε ότι τα σημεία P, Q, N, και M είναι ομοκυκλικά.

Λύση. Έστω B' και C' τα συμμετρικά σημεία των B και C ως προς M και N, αντίστοιχα.



Σχήμα 1: Πρόβλημα 3

Προφανώς τα σημεία C', A, και B' είναι συνευθειακά και το $DEB'A$ είναι παραλληλόγραμμο. Αφού $EH \perp AD$, έπεται ότι $EH \perp EB'$. Επίσης, $HA \perp AB'$, οπότε τα σημεία H, E, B', και A είναι ομοκυκλικά. Έτσι είναι

$$C'\widehat{Q}H = N\widehat{Q}H = N\widehat{E}H = A\widehat{E}H = A\widehat{B'}H = C'\widehat{B'}H,$$

οπότε τα σημεία C', B', Q, και H είναι ομοκυκλικά. Αναλόγως, τα σημεία C', B', P, και H είναι ομοκυκλικά, οπότε όλα τα σημεία B', C', P, Q, και H είναι ομοκυκλικά. Τότε έχουμε

$$N\widehat{M}B' = A\widehat{B'}M = C'\widehat{B'}P = C'\widehat{Q}P = N\widehat{Q}P,$$

η οποία αποδεικνύει ότι τα σημεία P, Q, N, και M είναι ομοκυκλικά.

Πρόβλημα 4 (Σλοβακία). Έστω ABC οξυγώνιο τρίγωνο με έγκεντρο I και $AB \neq AC$. Έστω ότι οι ευθείες BI και CI τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC στα σημεία $P \neq B$ και $Q \neq C$, αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία R και S τέτοια ώστε τα $AQRB$ και $ACSP$ να είναι παραλληλόγραμμα (με $AQ \parallel RB$, $AB \parallel QR$, $AC \parallel SP$, και $AP \parallel CS$). Έστω T το σημείο τομής των ευθειών RB και SC. Να δείξετε ότι τα σημεία R, S, T, και I είναι ομοκυκλικά.

Λύση. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι $AB < AC$, όπως στο παρακάτω σχήμα. Αρχικά παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα AQP και IBC είναι όμοια ($\angle AQP = \frac{\angle B}{2} = \angle IBC$, $\angle APQ = \frac{\angle C}{2} = \angle ICB$), οπότε $\frac{IB}{AQ} = \frac{IC}{AP}$. Αφού τα $AQRB$ και $ACSP$ είναι παραλληλόγραμμα, παίρνουμε $AQ = BR$ και $AP = CS$, οπότε η παραπάνω αναλογία γράφεται

$$\frac{IB}{BR} = \frac{IC}{CS}.$$

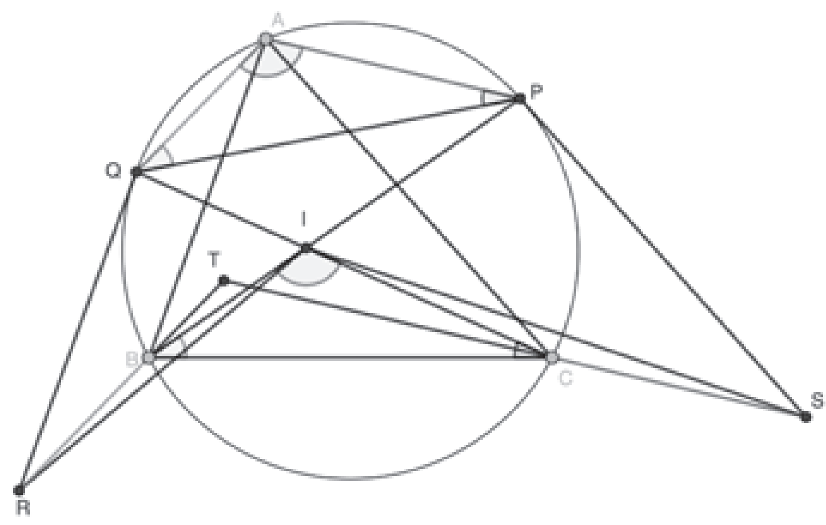
Επιπλέον, είναι

$$\angle IBR = 360^\circ - \angle RBA - \angle ABI = 360^\circ - \left(180^\circ - \frac{\angle C}{2}\right) - \frac{\angle B}{2} = 180^\circ + \frac{\angle C}{2} - \frac{\angle B}{2}.$$

και

$$\angle ICS = \angle SCA + \angle ACI = \left(180^\circ - \frac{\angle B}{2}\right) + \frac{\angle C}{2} = 180^\circ + \frac{\angle C}{2} - \frac{\angle B}{2},$$

οπότε $\angle IBR = \angle ICS$. Η ισότητα των γωνιών αυτών σε συνδυασμό με την τελευταία παραπάνω αναλογία μας δίνει την ομοιότητα των τριγώνων IBR και ICS με $\angle BRI = \angle CSI$. Από την τελευταία ισότητα γωνιών, και αφού τα σημεία T, B, R είναι συνευθειακά, όπως και τα σημεία T, C, S, βλέπουμε ότι $\angle TRI = \angle TSI$. Συνεπώς, τα σημεία R, S, T, και I είναι ομοκυκλικά.



Σχήμα 2: Πρόβλημα 4

Πρόβλημα 5 (Τουρκία). Έστω $n > 1$ ένας ακέραιος. Σε μια *διάταξη* ενός $n \times n$ πίνακα, κάθε ένα από τα n^2 κελιά περιέχει ένα βέλος, το οποίο δείχνει προς τα πάνω, προς τα κάτω, προς τα αριστερά, ή προς τα δεξιά. Δεδομένης μιας αρχικής διάταξης, η Turbo το σαλιγκάρι ξεκινά από ένα από τα κελιά του πίνακα και μετακινείται από κελί σε κελί. Σε κάθε της κίνηση, η Turbo μετακινείται κατά ένα κελί προς την κατεύθυνση που υποδεικνύεται από το βέλος στο κελί όπου βρίσκεται (ενδεχομένως να βγει και εκτός του πίνακα). Μετά από κάθε κίνηση, όλα τα βέλη σε όλα τα κελιά περιστρέφονται κατά 90° αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Ονομάζουμε ένα κελί *καλό* αν, ξεκινώντας από αυτό το κελί, η Turbo επισκέπτεται κάθε κελί του πίνακα ακριβώς μία φορά, χωρίς να βγει ποτέ εκτός του πίνακα, και στο τέλος επιστρέφει στο αρχικό της κελί.

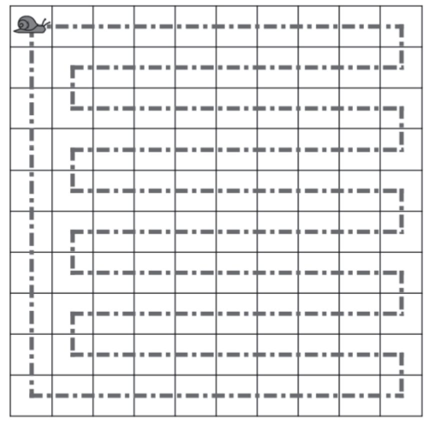
Να προσδιορίσετε, σε σχέση με το n, τον μέγιστο αριθμό καλών κελιών που μπορεί να υπάρχουν, λαμβάνοντας υπόψη όλες τις δυνατές αρχικές διατάξεις.

Λύση. Θα δείξουμε ότι ο μέγιστος αριθμός καλών κελιών σε όλες τις πιθανές αρχικές διαμορφώσεις είναι: 0, αν ο n είναι περιττός, και $\frac{n^2}{4}$, αν ο n είναι άρτιος.

Έστω ότι ο n είναι περιττός. Για να μπορέσει η Turbo να πετύχει τον στόχο της, πρέπει να επιστρέψει στο αρχικό της κελί αφού επισκεφθεί κάθε κελί ακριβώς μία φορά. Θεωρούμε τον χρωματισμό σκακιέρας του πίνακα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η Turbo ξεκινά σε ένα μαύρο κελί. Εφόσον σε κάθε βήμα, η Turbo μετακινείται σε ένα κελί διαφορετικού χρώματος, θα βρίσκεται σε ένα λευκό κελί μετά από $n^2 \equiv 1 \pmod 2$ κινήσεις. Έτσι, είναι αδύνατο για την Turbo να επιστρέψει στο αρχικό της μαύρο κελί στην n^2-οστή κίνηση, γεγονός που αποτελεί αντίφαση. Επομένως, δεν υπάρχουν καλά κελιά όταν ο n είναι περιττός.

Έστω ότι ο n είναι άρτιος. Θα κατασκευάσουμε τώρα μια αρχική διαμόρφωση με $\frac{n^2}{4}$ καλά κελιά για άρτιο n. Έστω ότι (i,j) είναι το κελί στη γραμμή i και τη στήλη j. Θεωρήστε τον ακόλουθο κύκλο:

$$
\begin{aligned}
(1,1) &\to (1,2) \to (1,3) \to \ldots \to (1,n) \\
&\to (2,n) \to (2,n-1) \to \ldots \to (2,2) \\
&\quad \ldots \\
&\to (2i-1,2) \to (2i-1,3) \to \ldots \to (2i-1,n) \\
&\to (2i,n) \to (2i,n-1) \to \ldots \to (2i,2) \\
&\quad \ldots \\
&\to (n,n) \to (n,n-1) \to \ldots \to (n,2) \\
&\to (n,1) \to (n-1,1) \to \ldots \to (2,1) \to (1,1)
\end{aligned}
$$



Σημειώνουμε ότι ο κύκλος επιστρέφει στο αρχικό κελί αφού επισκεφθεί κάθε κελί ακριβώς μία φορά. Για να αποδείξουμε ότι το $(1,1)$ είναι καλό, πρέπει να βρούμε μια αρχική διάταξη τέτοια ώστε η Turbo να διασχίζει αυτόν τον κύκλο.

Έστω c_i το $(i+1)$-οστό κελί στον κύκλο· έτσι έχουμε $c_0 = (1,1)$, $c_1 = (1,2)$, $\ldots$, $c_{n^2-1} = (2,1)$. Για κάθε i, σχεδιάζουμε το βέλος στο κελί c_i να δείχνει προς το c_{i+1} (ή προς το c_0 αν $i = n^2-1$) και στη συνέχεια περιστρέφουμε αυτό το βέλος κατά i φορές 90° δεξιόστροφα. Μετά από i κινήσεις, το βέλος στο c_i θα έχει περιστραφεί i φορές 90° αριστερόστροφα και θα είναι στην ίδια κατεύθυνση όπως στη διαδρομή που ορίστηκε παραπάνω. Έτσι, η Turbo θα διασχίζει τον κύκλο $c_0, c_1, \ldots, c_{n^2-1}, c_0$ και το $(1,1)$ είναι καλό.

Μετά από κάθε τέσσερις κινήσεις, όλα τα βέλη δείχνουν προς την ίδια κατεύθυνση όπως στην αρχή. Επιπλέον, ο πίνακας θα επιστρέψει στην αρχική του διάταξη αφού η Turbo διανύσει ολόκληρο τον κύκλο, αφού το n^2, το μήκος του κύκλου, διαιρείται από το 4. Επομένως, η Turbo μπορεί να ξεκινήσει από οποιοδήποτε κελί c_i με $4 \mid i$ και να ακολουθήσει την ίδια διαδρομή. Έτσι, τα $\frac{n^2}{4}$ κελιά $c_0, c_4, \ldots, c_{n^2-4}$ είναι καλά κελιά.

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε άρτιο n και κάθε αρχική διαμόρφωση υπάρχουν το πολύ $\frac{n^2}{4}$ καλά κελιά. Έστω a_0 ένα καλό κελί. Έστω $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n^2-1}, a_{n^2} = a_0$ η ακολουθία των κελιών που επισκέπτεται η Turbo όταν ξεκινά από το a_0. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα άλλο καλό κελί b_0 και έστω $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n^2-1}, b_{n^2} = b_0$ η ακολουθία των κελιών που επισκέπτεται η Turbo όταν ξεκινά από το b_0.

Αφού $4 \mid n^2$, τα βέλη επιστρέφουν στην αρχική τους διαμόρφωση μετά από n^2 βήματα. Έτσι, αν η Turbo ξεκινούσε περπατώντας πίσω από το αρχικό της κελί, θα ακολουθούσε απλώς τον ίδιο κύκλο ξανά και ξανά.

Θεωρούμε την επάνω αριστερή γωνία του πίνακα. Με την τυπική αρίθμηση γραμμών και στηλών, το γωνιακό κελί είναι το $(1,1)$ και έχει μόνο δύο γείτονες. Η a-ακολουθία και η b-ακολουθία πρέπει να έχουν κελιά $(1,2)$, $(1,1)$, $(2,1)$ με αυτή τη σειρά ή $(2,1)$, $(1,1)$, $(1,2)$ με αυτή τη σειρά. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι $a_{i-1} = (2,1)$, $a_i = (1,1)$, και $a_{i+1} = (1,2)$ για κάποιο i. Έστω j τέτοιο ώστε $b_j = (1,1)$. Αν $b_{j-1} = (2,1) = a_{i-1}$, τότε το βέλος στο κελί $(2,1)$ θα πρέπει επίσης να δείχνει προς την ίδια κατεύθυνση μετά από $i-1$ βήματα και μετά από $j-1$ βήματα, οπότε $i \equiv j \pmod 4$. Αλλά τότε το βέλος στο κελί $b_j = (1,1) = a_i$ πρέπει να δείχνει προς την ίδια κατεύθυνση μετά από i

βήματα και μετά από j βήματα, οπότε η Turbo μετακινείται στο $b_{j+1} = a_{i+1}$ και στις δύο περιπτώσεις, και βρίσκει ξανά το βέλος να δείχνει προς την ίδια κατεύθυνση και στις δύο περιπτώσεις. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, βρίσκουμε ότι το b-δρομολόγιο είναι στην πραγματικότητα πανομοιότυπο με το a_{4t}, a_{4t+1}, $\ldots$, $a_{n^2} = a_0$, a_1, a_{4t-1}, a_{4t}, για κάποιο t, καθώς οποιοδήποτε άλλο σημείο εκκίνησης θα είχε τα βέλη αρχικά στη λάθος κατεύθυνση.

Τώρα υποθέτουμε ότι $b_{j+1} = (2,1) = a_{i-1}$. Θεωρώντας το a-δρομολόγιο, τα βέλη στα επάνω αριστερά κελιά μετά από $i-1$ βήματα πρέπει να είναι κάπως έτσι:

$\downarrow$	$\leftarrow$	
$\uparrow$		

ή

$\downarrow$	$\uparrow$	
$\uparrow$		

.

Θεωρώντας το b-δρομολόγιο, τα βέλη στα επάνω αριστερά κελιά μετά από $j-1$ βήματα πρέπει να είναι κάπως έτσι:

$\leftarrow$	$\leftarrow$	
$\uparrow$		

ή

$\leftarrow$	$\leftarrow$	
$\leftarrow$		

.

Από τα βέλη στο κελί $(1,1)$ βλέπουμε ότι $i \equiv j+1 \pmod 4$. Όμως, για τα κελιά $(2,1)$ και $(1,2)$ αυτό δίνει άτοπο. Συμπεραίνουμε ότι τα μόνα πιθανά καλά κελιά είναι τα a_{4t} για $t = 0, 1, \ldots, \frac{n^2}{4} - 1$, οπότε υπάρχουν το πολύ $\frac{n^2}{4}$ καλά κελιά.

Πρόβλημα 6 (Λιθουανία). Σε κάθε κελί ενός 2025×2025 πίνακα, είναι γραμμένος ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός έτσι ώστε το άθροισμα των αριθμών σε κάθε γραμμή να είναι ίσο με 1, και το άθροισμα των αριθμών σε κάθε στήλη να είναι επίσης ίσο με 1. Έστω r_i η μεγαλύτερη τιμή στη γραμμή i, και έστω $R = r_1 + r_2 + \cdots + r_{2025}$. Έστω c_i η μεγαλύτερη τιμή στη στήλη i, και έστω $C = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2025}$. Ποια είναι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του $\frac{R}{C}$;

Λύση. Η απάντηση είναι $\frac{2025}{89}$. Γενικότερα, αν ο πίνακας είναι $m^2 \times m^2$, τότε η απάντηση είναι $\frac{m^2}{2m-1}$.

Το παράδειγμα έχει ως εξής: αριθμούμε τις γραμμές και τις στήλες από 1 έως m^2, από πάνω προς τα κάτω και από αριστερά προς τα δεξιά. Για τις πρώτες m στήλες, γράφουμε $\frac{1}{m}$ σε όλα τα τετράγωνα των οποίων οι συντεταγμένες έχουν το ίδιο υπόλοιπο κατά τη διαίρεση με το m και γράφουμε 0 παντού αλλού. Για τις υπόλοιπες $m^2 - m$ στήλες, γράφουμε $\frac{1}{m^2}$ παντού. Τότε έχουμε:

$$R = m^2 \cdot \frac{1}{m} = m, \quad \text{και} \quad C = m \cdot \frac{1}{m} + (m^2 - m) \cdot \frac{1}{m^2} = 2 - \frac{1}{m}.$$

$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Άρα ο λόγος είναι όπως ισχυριστήκαμε. Συγκεκριμένα, όταν $n = 2025$ παίρνουμε $\frac{2025}{89}$. Τώρα πρέπει να δείξουμε ότι:

$$\frac{R}{C} \leq \frac{n}{2\sqrt{n} - 1}.$$

Για κάθε γραμμή, επιλέγουμε ένα κελί με τη μεγαλύτερη τιμή στη γραμμή και το χρωματίζουμε κόκκινο. Τότε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να αναδιατάξουμε τις στήλες ώστε τα κόκκινα κελιά να εμφανίζονται στις πρώτες k στήλες από τα αριστερά, και κάθε τέτοια στήλη να περιέχει τουλάχιστον ένα κόκκινο κελί, για κάποιο $k \leq n$.

Για την $j-$οστή στήλη, για όλα τα $1 \leq j \leq k$, έστω p_j και n_j το άθροισμα και ο αριθμός των κόκκινων κελιών σε αυτήν, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι $c_j \geq \frac{p_j}{n_j}$ για όλα τα $j \leq k$. Για όλες τις άλλες στήλες, η μεγαλύτερη τιμή που περιέχουν είναι τουλάχιστον $\frac{1}{n}$ αφού το άθροισμά τους είναι 1. Άρα:

$$C \geq \frac{p_1}{n_1} + \frac{p_2}{n_2} + \cdots + \frac{p_k}{n_k} + \frac{n-k}{n}.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι $R = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$. Άρα πρέπει να δείξουμε ότι:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k \leq \frac{n}{2\sqrt{n}-1} \cdot \left(\frac{p_1}{n_1} + \frac{p_2}{n_2} + \cdots + \frac{p_k}{n_k} + \frac{n-k}{n} \right). \qquad (*)$$

Από κατασκευή, $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, και επειδή οι αριθμοί σε κάθε στήλη είναι μη αρνητικοί, βλέπουμε ότι $p_j \leq 1$ για κάθε j. Επίσης, επειδή κάθε αριθμός σε κόκκινο κελί είναι τουλάχιστον $\frac{1}{n}$, έχουμε και $p_j \geq \frac{n_j}{n}$.

Αφού η ανισότητα είναι γραμμική ως προς κάθε p_j, αρκεί να την αποδείξουμε όταν κάθε μεταβλητή παίρνει μία από τις δύο κρίσιμες τιμές της. Με αλλαγή ονοματολογίας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p_j = \frac{n_j}{n}$ για $1 \leq j \leq t$, και $p_j = 1$ για $t+1 \leq j \leq k$, για κάποιο ακέραιο $0 \leq t \leq k$.

Αρχικά, αν $t = k$, παρατηρούμε ότι: $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = \frac{n_1}{n} + \cdots + \frac{n_k}{n} = 1$, και ότι: $\frac{p_1}{n_1} + \cdots + \frac{p_k}{n_k} = \frac{k}{n}$, οπότε η ανισότητα γίνεται:

$$1 \leq \frac{n}{2\sqrt{n}-1} \cdot \left(\frac{k}{n} + \frac{n-k}{n} \right) = \frac{n}{2\sqrt{n}-1},$$

που ισχύει.

Από εδώ και στο εξής μπορούμε να υποθέσουμε ότι $t < k$. Πρέπει να δείξουμε ότι:

$$\frac{n_1 + \cdots + n_t}{n} + k - t \leq \frac{n}{2\sqrt{n}-1} \cdot \left(\frac{t}{n} + \frac{1}{n_{t+1}} + \cdots + \frac{1}{n_k} + \frac{n-k}{n} \right).$$

Από την ανισότητα Cauchy - Schwarz έχουμε ότι:

$$\frac{1}{n_{t+1}} + \cdots + \frac{1}{n_k} \geq \frac{(k-t)^2}{n_{t+1} + \cdots + n_k} = \frac{(k-t)^2}{n - (n_1 + \cdots + n_t)}. \qquad \text{(CS)}$$

Έστω $n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n \cdot q$, όπου $0 \leq q < 1$. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$q + k - t \leq \frac{n}{2\sqrt{n}-1} \cdot \left(\frac{t}{n} + \frac{(k-t)^2}{n-nq} + \frac{n-k}{n} \right).$$

Έστω $k - t = \ell \geq 1$. Η ανισότητα γίνεται:

$$q + \ell \leq \frac{1}{2\sqrt{n}-1} \cdot \left(n - \ell + \frac{\ell^2}{1-q} \right).$$

Αναδιατάσσοντας παίρνουμε:

$$n + q + \frac{\ell^2}{1-q} \geq 2(q+\ell)\sqrt{n}.$$

Αν $q = 0$, τότε η ανισότητα ισχύει τετριμμένα από την ανισότητα Αριθμητικού Μέσου - Γεωμετρικού Μέσου. Έστω τώρα $0 < q < 1$. Τότε, από την Cauchy-Schwarz, έχουμε:

$$q + \frac{\ell^2}{1-q} = \frac{q^2}{q} + \frac{\ell^2}{1-q} \geq (q+\ell)^2.$$

Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$n + (q+\ell)^2 \geq 2(q+\ell)\sqrt{n},$$

που αληθεύει από την ανισότητα Αριθμητικού Μέσου - Γεωμετρικού Μέσου, ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Συναρτησιακές σχέσεις στους ακεραίους

Ορέστης Λιγνός
Πρωτοετής φοιτητής του Τμήματος Μαθηματικών του Ε.Κ.Π.Α.

Οι συναρτησιακές σχέσεις είναι μία κατηγορία προβλημάτων που είναι αρκετά συνηθισμένη στο πλαίσιο των Μαθηματικών Διαγωνισμών. Στην συγκεκριμένη εργασία επικεντρωνόμαστε στις συναρτησιακές σχέσεις που χειρίζονται συναρτήσεις ορισμένες στους *ακεραίους* ή στους *θετικούς ακεραίους* (δηλαδή, ουσιαστικά, μιλάμε για *ακολουθίες*). Θα δούμε μία συλλογή προβλημάτων διαβαθμισμένης δυσκολίας, που εμπλέκουν τόσο **αλγεβρικές όσο και αριθμοθεωρητικές τεχνικές.** Τέλος, παρατίθενται και κάποιες προτεινόμενες ασκήσεις για λύση.

Στα πιο κάτω, με $\mathbb{N}$ συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών (ειδικότερα, $0 \in \mathbb{N}$). Ακόμη, με $\mathbb{N}^*$ συμβολίζουμε το σύνολο των θετικών ακεραίων και με $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων. Τέλος, με $\gcd(x, y)$ συμβολίζουμε τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη των ακεραίων αριθμών x και y.

Πρόβλημα 1. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ που είναι τέτοιες, ώστε:

$$x + y + z \mid f(x) + f(y) + f(z), \text{ για κάθε } x, y, z \in \mathbb{Z}.$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι: $x + y + z + 1 \mid f(x) + f(y + 1) + f(z)$
Και $x + y + z + 1 \mid f(x + 1) + f(y) + f(z)$,
οπότε $x + y + z + 1 \mid [f(y + 1) - f(y) + f(x) - f(x + 1)]$. Σταθεροποιώντας τα x, y και επιλέγοντας το z αυθαίρετα μεγάλο, έχουμε ότι: $f(x + 1) - f(x) = f(y + 1) - f(y)$,
για κάθε $x, y \in \mathbb{Z}$. Άρα, υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{Z}$ με $f(x + 1) - f(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{Z}$. Συνεπώς, μια απλή επαγωγή δείχνει ότι $f(x) = cx + f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{Z}$. Αντικαθιστώντας τώρα στην δεδομένη σχέση προκύπτει ότι $f(0) = 0$. Άρα οι λύσεις είναι όλες οι συναρτήσεις της μορφής $f(x) = cx$, με $c \in \mathbb{Z}$ σταθερά ■

Πρόβλημα 2: Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ που είναι τέτοιες, ώστε:

$$f\big(f(x) + f(y) + f(z)\big) = x + y + z, \text{ για κάθε } x, y, z \in \mathbb{Z}.$$

Λύση. Έστω $P(x, y, z)$ η δεδομένη σχέση. Από την $P(x, 0, 0)$ είναι προφανές ότι η f είναι επί. Έστω $u \in \mathbb{Z}$ με $f(u) = 0$. Τότε, η $P(x, u, u)$ δίνει ότι: $f\big(f(x)\big) = x + 2u$, για κάθε $x \in \mathbb{Z}$.
Άρα, $f\big(f(x) + f(y) + f(z)\big) = x + y + z = f\big(f(x)\big) + f\big(f(y)\big) + f\big(f(z)\big) - 6u$,
και αφού η f είναι επί έπεται ότι: $f(x + y + z) = f(x) + f(y) + f(z) - 6u$,
για κάθε $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Άρα, με $z = 0$ σε αυτήν την σχέση έχουμε ότι:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + (f(0) - 6u).$$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $g(x) = f(x) + (f(0) - 6u)$. Από την προηγούμενη σχέση έχουμε εύκολα ότι $g(x + y) = g(x) + g(y)$. Αφού η g είναι ορισμένη στους ακεραίους, είναι γνωστό ότι $g(x) = ax$ για κάποιο $a \in \mathbb{Z}$. Άρα, μπορούμε να γράψουμε $f(x) = ax + b$ με $a, b \in \mathbb{Z}$. Αντικαθιστώντας στην αρχική σχέση, εύκολα προκύπτει ότι $b = 0$ και $a \in \{-1, 1\}$, άρα οι μόνες λύσεις είναι η $f(x) = x$ και η $f(x) = -x$. ■

Πρόβλημα 3. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ που είναι τέτοιες, ώστε:

$$f(y) + x \mid f\big(f(x)\big) + y, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{N}^*.$$

Λύση. Έστω $P(x, y)$ η δεδομένη σχέση. Έχουμε τον ακόλουθο Ισχυρισμό:
Ισχυρισμός: Υπάρχουν σταθερές $a \in \mathbb{Z}$ και $N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιες, ώστε $f(x) = x + a$, για κάθε $x > N$.
Απόδειξη. Η $P(1, x)$ δίνει ότι $f(x) + 1 \mid f\big(f(1)\big) + x$, οπότε υπάρχει σταθερά $a \in \mathbb{Z}$ τέτοια, ώστε $f(x) \le x + a$, για κάθε $x \in \mathbb{N}^*$. Η $P(x, 1)$ δίνει ότι: $f(1) + x \mid f\big(f(x)\big) + 1$.
Όμως, μπορούμε να γράψουμε: $f\big(f(x)\big) + 1 \le f(x) + a + 1 \le x + 2a + 1 < 2(f(1) + x)$,
για κάθε $x > 2a + 1 - 2f(1) \coloneqq N_1$, άρα για αυτά τα x θα πρέπει να ισχύει $f\big(f(x)\big) + 1 = f(1) + x$.
Άρα, για $x > N_1$ είναι: $f(1) + x = f\big(f(x)\big) + 1 \mid f\big(f(1)\big) + f(x)$,
και μπορούμε να γράψουμε: $f\big(f(1)\big) + f(x) \le f\big(f(1)\big) + x + a < 2(f(1) + x)$,
για κάθε $x \ge f\big(f(1)\big) + a - 2f(1) \coloneqq N_2$, άρα για $x \ge \max\{N_1, N_2\} \coloneqq N$ προκύπτει ότι $f\big(f(1)\big) + f(x) = f(1) + x$, δηλαδή ότι (θέτοντας $a = f(1) - f\big(f(1)\big)$): $f(x) = x + a$, για κάθε $x \ge N$. ■
Πίσω στο πρόβλημα, για αρκετά μεγάλο x και σταθερό y συνάγουμε ότι:
$x + f(y) \mid f\big(f(x)\big) + y = x + 2a + y$, οπότε $x + f(y) \mid \big(2a + y - f(y)\big)$, συνεπώς επιλέγοντας το x αρκούντως μεγάλο έχουμε ότι $f(y) = y + 2a$, για κάθε y. Παίρνοντας $y \ge N$ έχουμε ότι $a = 0$, και άρα η f είναι η ταυτοτική συνάρτηση. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί την δεδομένη σχέση και άρα είναι η μοναδική λύση ■

Πρόβλημα 4. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ που είναι τέτοιες, ώστε:

- **$\gcd\big(xy, f(xy)\big) = \gcd\big(yf(x), xf(y)\big)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{N}^*$.**
- **$p \mid f(p!)$ για κάθε πρώτο αριθμό p.**

Λύση. Ονομάζουμε $P(x, y)$ την πρώτη σχέση. Η $P(1, 1)$ δίνει ότι $f(1) = 1$, ενώ η $P(x, x)$ δίνει ότι $xf(x) \mid x^2$, άρα $f(x) \mid x$ για κάθε $x \in \mathbb{N}^*$. Θεωρούμε το σύνολο: $S = \{x \in \mathbb{N} : f(x) = x\}$ των σταθερών σημείων της συνάρτησης f.
Ισχυρισμός: $S = \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι $1 \in S$, ενώ αν $x, y \in \mathbb{N}^*$ με $x, y \in S$, τότε έχουμε ότι:
$$\gcd\big(xy, f(xy)\big) = \gcd\big(yf(x), xf(y)\big) = xy,$$
και αφού $f(xy) \mid xy$, προκύπτει ότι $xy \in S$. Τέλος, η $P(p,(p-1)!)$ δίνει ότι:
$$\gcd\big(p!, f(p!)\big) = \gcd\Big((p-1)!\,f(p), pf\big((p-1)!\big)\Big),$$
οπότε λόγω της δεύτερης συνθήκης προκύπτει ότι $p \mid (p-1)!\,f(p)$, και αφού από το Θεώρημα Wilson είναι $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$, έχουμε ότι $p \mid f(p)$ για κάθε πρώτο p.
Συνεπώς, $f(p) = p$ για κάθε πρώτο p. Από την προηγούμενη παρατήρηση όμως, έχουμε επαγωγικά ότι, αν $n \in \mathbb{N}^*$ και θεωρήσουμε την ανάλυση του σε πρώτους παράγοντες $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$, τότε, αφού $p_i \in S$ για κάθε i και $x, y \in S \Rightarrow xy \in S$, είναι και $n \in S$, όπως θέλαμε. ■
Πίσω στο πρόβλημα, είναι άμεσο να επαληθεύσουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x$ ικανοποιεί την δοσμένη σχέση. ■

Πρόβλημα 5. Έστω $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ μονότονη συνάρτηση που είναι τέτοια, ώστε:
$$\boldsymbol{f\big(f(n)\big) = 3n}, \text{ για κάθε } \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*. \text{ Να προσδιορίσετε το } \boldsymbol{f(2025)}.$$

Λύση. Αρχικά, παρατηρούμε ότι η f είναι 1-1. Επίσης, ισχύει ότι $f(3n) = f\Big(f\big(f(n)\big)\Big) = 3f(n)$, και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα και $f(3n) = 3f(n)$. Ακόμη, $f\big(f(1)\big) = 3$. Αν $f(1) = 1$, τότε $f\big(f(1)\big) = 1$, άτοπο. Αν $f(1) \geq 3$, τότε $3 = f\big(f(1)\big) > f(1) = 3$, άτοπο. Άρα, $f(1) = 2$ και $f(2) = 3$.
Επαγωγικά έχουμε ότι $f(3^k) = 2\cdot 3^k$ και $f(2\cdot 3^k) = 3^{k+1}$, για κάθε $k \geq 0$. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, συμπεραίνουμε ότι το διάστημα $[3^k, 2\cdot 3^k)$ απεικονίζεται, διαδοχικά, μέσω της f, στο διάστημα $[2\cdot 3^k, 3^{k+1})$. Ακόμη, αν $n \in [2\cdot 3^k, 3^{k+1})$, τότε:
$$f(n) = f\big(2\cdot 3^k + (n - 2\cdot 3^k)\big) = f\Big(f\big(3^k + (n-2\cdot 3^k)\big)\Big) = f\big(f(n-3^k)\big) = 3n - 3^{k+1}.$$
Άρα αφού $2025 \in [2\cdot 3^6, 3^7)$, έχουμε ότι $f(2025) = 3\cdot 2025 - 3^6 = 5346$ ■
Παρατήρηση. Παρατηρείστε ότι με βάση τα προηγούμενα προσδιορίζεται μονοσήμαντα ο τύπος της f.

Πρόβλημα 6. Να βρείτε όλες τις $1-1$ συναρτήσεις $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ που είναι τέτοιες, ώστε:
$$\boldsymbol{2f\big(f(n)\big) \leq n + f(n)}, \text{ για κάθε } \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}.$$

Λύση. Έχουμε τον ακόλουθο Ισχυρισμό:
Ισχυρισμός: $f(n) \geq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιος φυσικός k για τον οποίο αυτό δεν ισχύει.
Τότε, είναι: $2f\big(f(k)\big) \leq k + f(k) < 2k$, άρα $f\big(f(k)\big) < k$.
Ακόμη: $2f\Big(f\big(f(k)\big)\Big) \leq f(k) + f\big(f(k)\big) < 2k$,οπότε $f\Big(f\big(f(k)\big)\Big) < k$. Επαγωγικά έχουμε εύκολα ότι $f^n(k) < k$, για κάθε $n \geq 1$ (όπου το f^n συμβολίζει επαναλαμβανόμενη σύνθεση της f με τον εαυτό της). Άρα, είναι: $T = \{f^n(k) : n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \{1, 2, \ldots, k-1\}$, συνεπώς από την αρχή της περιστεροφωλιάς υπάρχουν $n_1 > n_2$ με $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ και $f^{n_1}(k) = f^{n_2}(k)$. Όμως, αφού η f είναι $1-1$, προκύπτει ότι $f^{n_1-n_2}(k) = k$, που είναι άτοπο, διότι $f^n(k) < k$, για κάθε $n \geq 1$. ■
Πίσω στο πρόβλημα, από τον Ισχυρισμό έχουμε: $n + f(n) \geq 2f\big(f(n)\big) \geq 2f(n)$,
άρα $f(n) \leq n$, συνεπώς ισχύει η ισότητα και πρέπει $f(n) = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Είναι τετριμμένο ότι η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί την δοσμένη συναρτησιακή σχέση.

Πρόβλημα 7. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ που είναι τέτοιες, ώστε:
$$\boldsymbol{f(m+n)f(m-n) = f(m^2)}, \text{ για κάθε } \boldsymbol{m, n} \in \mathbb{N}^*.$$

Λύση. Παρατηρούμε: $f(2n+2)f(2) = f((n+2)^2) = f(2n)f(4)$ για κάθε $n \geq 3$. Θέτουμε $g(n) = \frac{f(n+2)}{f(n)}$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε, η προηγούμενη σχέση δίνει ότι $g(2n) = g(2)$ για κάθε $n \geq 3$. Συνεπώς, για κάθε $n \geq 3$, προκύπτει ότι $f(2n) = g(2n-2)g(2n-4)\cdots g(2)f(2) = f(2)g(2)^{n-1} = AB^n$, όπου οι $A = \frac{f(2)}{g(2)}$ και $B = g(2)$ είναι σταθερές. Άμεσα έχουμε επίσης και ότι: $f((n+2)^2) = f(2n+2)f(2) = AB^{n+1}AB = A^2B^{n+2}$, για $n \geq 2$. Άρα, μπορούμε να γράψουμε ότι: $A^2B^{2k+2} = f((2k+2)^2) = AB^{2(k+1)^2}$, για κάθε $k \geq 1$. Συνεπώς, $A = B^{2k^2+2k}$, οπότε, αν $B \neq 1$ μπορούμε εύκολα να πάρουμε άτοπο αφήνοντας το k να γίνει αυθαίρετα μεγάλο. Συνεπώς, $A = B = 1$. Άρα, $f(2n) = 1$, για κάθε $n \geq 3$. Τώρα, παρατηρούμε ότι: $f(2m+n)f(n) = f((m+n)^2)$, για κάθε $n \geq 1$, άρα επιλέγοντας το m ώστε ο $m+n$ να είναι άρτιος αριθμός και ≥ 4, είναι από τα προηγούμενα $f((m+n)^2) = 1$, άρα πρέπει και $f(n) = 1$, που δίνει ότι η f είναι η σταθερή συνάρτηση που ισούται με 1, και είναι άμεσο να ελέγξουμε ότι αυτή ικανοποιεί την αρχική σχέση. ■

Πρόβλημα 8. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ που είναι τέτοιες, ώστε:
$$\boldsymbol{f\big(x - f(y)\big) = f\big(f(x)\big) - f(y) - 1}, \text{ για κάθε } \boldsymbol{x, y} \in \mathbb{Z}.$$

Λύση. Έστω $P(x,y)$ η δεδομένη συναρτησιακή σχέση.
Τότε, με $y = f(x)$ προκύπτει ότι $f\Big(x - f\big(f(x)\big)\Big) = -1$, άρα υπάρχει $u \in \mathbb{Z}$ με $f(u) = -1$. Τότε, η $P(x,u)$ δίνει ότι $f(x+1) = f(f(x))$. Άρα, η αρχική σχέση γράφεται: $f\big(x - f(y)\big) = f(x+1) - f(y) - 1$.
Άρα, έχουμε ότι: $f(x+1) - f(x) - 1 = f\big(f(x)\big) - f(x) - 1 = f\big(f(x) - 1 - f(x)\big) = f(-1)$,
συνεπώς η f είναι γραμμική. Αν η f είναι σταθερή, τότε $f(x) = -1$, που ικανοποιεί την δοσμένη σχέση. Αν όχι, τότε

είναι $1-1$, οπότε αφού $f(x+1)=f(f(x))$ προκύπτει ότι $f(x)=x+1$, και προφανώς η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί την δοσμένη σχέση ■

Πρόβλημα 9. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ που είναι τέτοιες, ώστε:

$$y!+f(x)!\mid f(y)!+f(x!),\ \text{για κάθε } x,y\in\mathbb{N}^*.$$

Λύση. Έστω $P(x,y)$ η δοσμένη σχέση. Αποδεικνύουμε δύο Ισχυρισμούς:

Ισχυρισμός 1: $f(1)=1$.

Απόδειξη. Η $P(1,1)$ δίνει ότι $f(1)!+1\mid f(1)!+f(1)$, άρα $f(1)!+1\mid (f(1)-1)$. Αν $f(1)\geq 2$, τότε:
$f(1)>f(1)-1\geq f(1)!+1>f(1)!>f(1)$, άτοπο. Άρα $f(1)=1$. ■

Ισχυρισμός 2: Ισχύει ότι $f(p-1)=p-1$, για κάθε πρώτο p.

Απόδειξη. Έστω p πρώτος. Η $P(1,p-1)$, καθώς και το Θεώρημα Wilson, δίνουν ότι: $p\mid (p-1)!+1\mid f(p-1)!+1$, Άρα $p\nmid f(p-1)!$, και συνεπώς $f(p-1)\leq p-1$. Επίσης, από την $P(p-1,1)$ παίρνουμε ότι $(p-1)!+1\mid f(p-1)!+1$, και άρα $p-1\leq f(p-1)$. Συνεπώς, ισχύει η ισότητα, και άρα $f(p-1)=p-1$. ■

Πίσω στην άσκηση, έστω $n=p-1$ με p πρώτο. Τότε:

$$(p-1)!+f(m)!\mid (p-1)!+f(m!)\Rightarrow (p-1)!+f(m)!\mid f(m!)-f(m)!,$$

και άρα σταθεροποιώντας το m και παίρνοντας το p αυθαίρετα μεγάλο πρώτο, έχουμε ότι
$f(m!)=f(m)!$, για κάθε $m\in\mathbb{N}^*$. Άρα η $P(x,y)$ δίνει ότι $y!+f(x)!\mid f(y)!+f(x)!$.
Συνεπώς: $y!+f(x)!\mid f(y)!-y!$, και άρα σταθεροποιώντας το y και παίρνοντας το $x=p-1$ για αυθαίρετα μεγάλο πρώτο p, έχουμε ότι $f(y)=y$, για κάθε $y\geq 1$.
Τέλος, είναι προφανές ότι η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί την δοσμένη σχέση. ■

Πρόβλημα 10. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ που είναι τέτοιες, ώστε:

$$f\big(2x+f(x)+f(x)f(y)\big)=yf(x)+x,\ \ \text{για κάθε } m,n\in\mathbb{Z}.$$

Λύση. Έστω $P(x,y)$ η δοσμένη συναρτησιακή σχέση. Η $P(x,0)$ δίνει ότι $f\big(2x+f(x)+f(x)f(0)\big)=x$, οπότε η f είναι επί. Παίρνουμε $u\in\mathbb{Z}$ τέτοιο, ώστε $f(u)=-1$. Τότε, η $P(0,u)$ δίνει ότι $f(0)=uf(0)$, και άρα $f(0)=0$ ή $u=1$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $f(0)=0$. Τότε, η $P(x,0)$ δίνει ότι $f(f(x)+2x)=x$, $(*)$. Επιπλέον, η $P(u,u)$ δίνει ότι $f(2u)=0$, και άρα από την $P(u,2u)$ και την $(*)$ έχουμε ότι: $-u=2uf(u)+u=f(f(u)+2u)=u$,
δηλαδή $u=0$, που σημαίνει ότι $-1=f(0)=0$, άτοπο.

Περίπτωση 2: $u=1$. Τότε, $f(1)=-1$. Αφού η f είναι επί, παίρνουμε $t\in\mathbb{Z}$ τέτοιο, ώστε $f(t)=1$. Η $P(x,t)$ δίνει ότι $f(2f(x)+2x)=tf(x)+x$. Επιπλέον, η $P(x,1)$ δίνει ότι $f(2x)=f(x)+x$, και άρα μπορούμε να γράψουμε: $tf(x)+x=f\big(2(f(x)+x)\big)=f(f(x)+x)+f(x)+x$, οπότε $f(f(x)+x)=(t-1)f(x)$. Με $x=t$ και $x=t+1$ διαδοχικά στην σχέση αυτή συνάγουμε ότι $f(t+1)=t-1$ και $f(2t)=(t-1)^2$. Όμως, $(t-1)^2=f(2t)=f(t)+t=t+1$,οπότε προκύπτει ότι $t\in\{0,3\}$. Διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις:

Υποπερίπτωση 2.1: $t=0$. Τότε, $f(0)=1$, οπότε η $P(0,x)$ δίνει $f(f(x)+1=x$, συνεπώς η f είναι και $1-1$. Επιπλέον, η $P(1,x)$ δίνει ότι $f\big(1-f(x)\big)=1-x$. Συνεπώς, $f(f(x)+1)+f\big(1-f(x)\big)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{Z}$. Αφού όμως η f είναι επί, η προηγούμενη σχέση δίνει ότι $f(x+1)+f(1-x)=1$, για κάθε $x\in\mathbb{Z}$. Άρα, έχουμε ότι $f(-1)=1-f(1)=2$, ενώ από την $f(2x)=f(x)+x$ συνάγουμε ότι:

$$f(4)=f(2)+2=(f(1)+1)+2=2=f(-1),\ \text{που είναι άτοπο καθώς η } f \text{ είναι } 1-1.$$

Υποπερίπτωση 2.2: $t=3$. Τότε, $f(3)=1$. Είναι $f\big(1-f(x)\big)=1-x$, και επίσης η $P(3,x)$ δίνει ότι $f(f(x)+7)=x+3$, οπότε $f\big(1-f(x)\big)+f(f(x)+7)=4$.
Αφού η f είναι επί, ισοδύναμα έχουμε ότι $f(x+7)+f(1-x)=4$, για κάθε $x\in\mathbb{Z}$. Υπολογίζουμε τώρα (χρησιμοποιώντας και την σχέση $f(2x)=f(x)+x$): $f(1)=-1$, $f(2)=f(1)+1=0$, $f(3)=1$, $f(4)=f(2)+2=2$, $f(8)=f(4)+4=6$, $f(0)=4-f(8)=-2$, $f(5)=f((f(0)+7)=0+3=3$. Συνεπώς, έχουμε ότι $f(x)=x-2$, για κάθε $x\in\{0,1,2,3,4,5\}$. Επαγωγικά δείχνουμε ότι η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{N}$. Για $x\leq 5$ το έχουμε ήδη αποδείξει. Παρατηρούμε τώρα ότι αν ισχύει $f(x)=x-2$ για κάθε $0\leq x\leq k$, τότε: $f(k+1)=f(f(k-4)+7)=k-4+3=k-1$. Επομένως επαγωγικά έχουμε ότι $f(x)=x-2$, για κάθε $x\geq 0$. Όμως, από την σχέση $f(x+7)+f(1-x)=4$ προκύπτει άμεσα ότι: $f(x)=4-f(8-x)=x-2$, για κάθε $x<0$.
Επομένως, $f(x)=x-2$, για κάθε $x\in\mathbb{Z}$, που προφανώς επαληθεύει, άρα είναι και η μοναδική λύση της συναρτησιακής εξίσωσης. ■

Ασκήσεις για λύση

Άσκηση 1. Να βρείτε όλες τις $1-1$ συναρτήσεις $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ που είναι τέτοιες, ώστε:

$$f(x^2+y^2)=xf(x)+f(y)^2\ \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{N}.$$

Άσκηση 2. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ που είναι τέτοιες, ώστε: $\frac{f(x)+y}{x+f(y)}+\frac{f(x)y}{xf(y)}=\frac{2(x+y)}{f(x+y)}$, για κάθε $x,y\in\mathbb{N}^*$.

Άσκηση 3. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ που είναι τέτοιες, ώστε $f(0)=0$ και

$$f(x^2-y^2)=f(x)f(y),\ \text{για κάθε } x,y\in\mathbb{N} \text{ με } x>y.$$

Άσκηση 4. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ που είναι τέτοιες, ώστε:

$$f\big(xy+f(x+y)\big)=yf\big(f(x)\big)+f(x)-y+1,\ \text{για κάθε } x,y\in\mathbb{Z}.$$

Άσκηση 5. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ που είναι τέτοιες, ώστε:$x+f(y)\mid x^2+yf(x)$, για κάθε $x,y\in\mathbb{N}^*$ με $x+y>2025$. **Υπόδειξη.** Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα του Dirichlet: Αν a,d θετικοί ακέραιοι με $\gcd(a,d)=1$, τότε υπάρχουν άπειροι θετικοί ακέραιοι n τέτοιοι, ώστε ο $a+nd$ να είναι πρώτος.

HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

ΙΙ. Ευκλείδεια Γεωμετρία αγάπη μου
1ο θέμα: Μετά την Ευκλείδεια Γεωμετρία, χρειάζονται οι άλλες Γεωμετρίες;

Ισχυρισμός (αξίωμα του ***Ευκλείδη***):

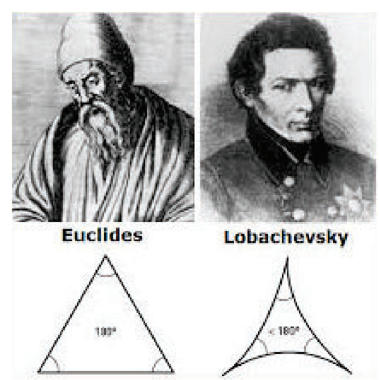
(α). από σημείο που βρίσκεται έξω από μια ευθεία, δεν μπορούμε να φέρουμε περισσότερες από μια ευθεία, παράλληλη προς τη δοσμένη.

Με βάση αυτόν τον ισχυρισμό δημιουργείται η Γεωμετρία του Ευκλείδη. Στη Γεωμετρία του Ευκλείδη το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών του τριγώνου είναι ίσο με 180^o .

Με το αξίωμα του (Νικολάι Ιβάνοβιτς) Lobachevsky (1826), σύμφωνα με το οποίο:

(β). από σημείο εκτός ευθείας στο δοσμένο επίπεδο μπορούν να περάσουν τουλάχιστο δύο ευθείες που δεν τέμνουν τη δοσμένη ευθεία.

δημιουργήθηκε η λεγόμενη Γεωμετρία Lobachevsky.



Η Γεωμετρία του Lobachevsky (1826) βασίζεται στα ίδια αξιώματα με την ευκλείδεια Γεωμετρία, αν εξαιρέσουμε το αξίωμα των παραλλήλων που αντικαταστάθηκε με τον ισχυρισμό ***(β)***.

Το ζήτημα, ποια γεωμετρία του Ευκλείδη ή του Lobachevsky περιγράφει ακριβέστερα τον κόσμο των ακτίνων του φωτός, δεν λύνεται και τόσο εύκολα, αν και το αξίωμα του Lobachevsky από πρώτη άποψη φαίνεται παράδοξο. Η τεράστια προσφορά του Lobachevsky ήταν ότι έθεσε αυτό το ζήτημα.

Αργότερα δημιουργήθηκαν πολλές άλλες γεωμετρίες, δηλ. άλλα νοερά μοντέλα του πραγματικού κόσμου. Ωστόσο το ερώτημα **αν θα χρειαστεί** ποτέ καμιά απ΄ **αυτές τις γεωμετρίες** για τη μελέτη του πραγματικού κόσμου των ακτίνων του φωτός, παρέμεινε, ουσιαστικά, ανοιχτό ως το 1916, οπότε ο μέγας φυσικός Αλμπερτ Άϊνστάϊν (Albert Einstein) διατύπωσε τη λεγόμενη γενική θεωρία της σχετικότητας.

Είναι πασίγνωστο το ανέκδοτο ότι ο Νεύτωνας (sir Isaac Newton) ανακάλυψε το νόμο της βαρύτητας παρατηρώντας το πέσιμο μήλου από τη μηλιά. Με πόση όμως ακρίβεια απεικονίζει ο νόμος του Νεύτωνα την πραγματική κατάσταση πραγμάτων; Μήπως μπορούμε, χρησιμοποιώντας όργανα μεγάλης ακρίβειας, να ανακαλύψουμε ότι η βαρύτητα των σωμάτων μπορεί να αποκλίνει (έστω και ελάχιστα) από το νόμο του Νεύτωνα; Εδώ μπορεί να τεθούν τα ίδια ερωτήματα που μας απασχόλησαν και όταν εξετάσαμε το **ευκλείδειο θεώρημα** των παραλλήλων.

Το ζήτημα είναι ότι οι νόμοι του Νεύτωνα αποτελούν κι αυτοί κάποιο αφηρημένο, εγκεφαλικό μοντέλο , ενώ η ευκλείδεια αρχή των αξιωμάτων είναι γεωμετρικό μοντέλο. Έτσι και οι νόμοι της ηλεκτρικής αλληλεπίδρασης, νόμος του Charles Augustin de Coulomb αποτελούν κι αυτοί ένα ορισμένο **φυσικό μοντέλο** του **πραγματικού κόσμου**.

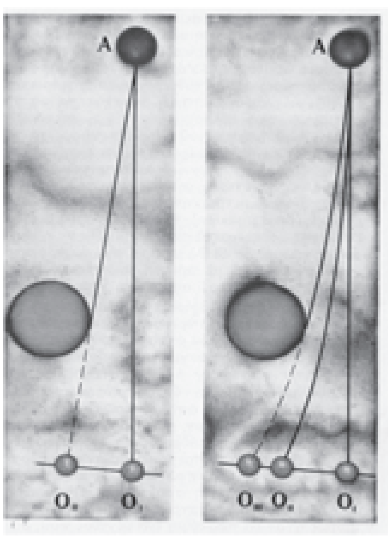
Ως τη διατύπωση της θεωρίας της σχετικότητας θεωρούσαν απόλυτα εξακριβωμένο ότι ο πραγματικός κόσμος είναι κάτι που μοιάζει με ένα απέραντο αδειανό «ευκλείδειο δωμάτιο» όπου, σαν έπιπλα, βρίσκονται τοποθετημένα τα πραγματικά σώματα, αντικείμενα που αλληλεπιδρούν το ένα στο άλλο. Φαινόταν τελείως αναμφισβήτητο ότι οι ιδιότητες αυτές «του ευκλείδειου δωματίου» δεν συνδέονται καθόλου με τη μετατόπιση και με την αλληλεπίδραση των επίπλων που βρίσκονται στο «δωμάτιο».

Ο νόμοι της μετατόπισης και της αλληλεπίδρασης της ύλης σ΄ αυτό το κενό, περιγράφονταν στις φυσικές θεωρίες-μοντέλα. Ωστόσο επικρατούσε η γνώμη ότι οι θεωρίες αυτές μπορούν να διατυπώνονται ανεξάρτητα από το αν κατασκευάστηκε το γεωμετρικό μοντέλο. Εκτός απ΄ αυτά, θεωρούσαν **το μοντέλο του Νεύτωνα** το ίδιο απόλυτα τέλειο και ακριβές, όσο και **το ευκλείδειο γεωμετρικό μοντέλο**. Τα πειράματα όμως απόδειξαν ότι οι γνωστές φυσικές θεωρίες είναι τόσο ατελείς, όσο και η ευκλείδεια Γεωμετρία. Για να γίνει αυτό πιο κατανοητό, θα σας διηγηθούμε σχετικά μ΄ ένα πείραμα που το έχουν επαναλάβει πολλές φορές ως τώρα οι αστρονόμοι και κάθε φορά επιβεβαιώνει τα συμπεράσματα της **θεωρίας της σχετικότητας**, που έβγαιναν ως τώρα.

Ας φανταστούμε πάνω στη Γη έναν παρατηρητή, που βρίσκεται σε μια ορισμένη στιγμή στο σημείο O_1 (σχήμα (α)), βλέπει το άστρο Α και σιμά του τον Ήλιο (με κόκκινο χρώμα) (Σημειώνουμε ότι τέτοια πειράματα γίνονται κατά την ολική ηλιακή έκλειψη, όταν ο δίσκος του Ήλιου κρύβεται για τον παρατηρητή πίσω από τον δίσκο της Σελήνης). Η παρατήρηση γίνεται σε μικρό χρονικό διάστημα, έτσι ώστε το άστρο κι ο Ήλιος θεωρούνται ακίνητα σώματα, ενώ η τροχιά της Γης θεωρείται ευθύγραμμη. Η Γη κινείται στην τροχιά της με τη γνωστή ταχύτητα (στην κατεύθυνση από O_I προς O_{II}) και χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα της ευκλείδειας γεωμετρίας, βρίσκουμε εύκολα τη χρονική στιγμή που ο Ήλιος θα κρύψει το άστρο Α από το μάτι του παρατηρητή. Η κάλυψη αυτή θα συμβεί όταν η Γη θα έχει μετατοπιστεί στο σημείο O_{II}.

Ωστόσο το πείραμα, (σχήμα (α)), δείχνει ότι στην πραγματικότητα το άστρο Α κρύβεται από τον Ήλιο με κάποια καθυστέρηση, που το μέγεθός της συμφωνεί ικανοποιητικά με τις προβλέψεις της θεωρίας της σχετικότητας.

Πώς εξηγείται αυτό το φαινόμενο; Οφείλεται στο ότι το ισχυρό πεδίο έλξης που δημιουργεί ο Ήλιος αναγκάζει τις ακτίνες του φωτός που περνάνε σιμά στον Ήλιο, να μη συμπεριφέρονται όπως απαιτεί η ευκλείδεια γεωμετρία (σχήμα α΄) . Και να πώς: οι ακτίνες κατά κάποιον τρόπο στραβώνουν και δημιουργείται η εικόνα που παριστάνεται σχηματικά στην παραπάνω εικόνα (α). Από το σημείο O_{II} ο παρατηρητής βλέπει το άστρο και μόνο όταν μετακινηθεί στο σημείο O_{III}. Ο Ήλιος θα του κρύψει το άστρο Α.



(σχήμα α΄)

Ας δοκιμάσουμε να ερμηνεύσουμε την απόκλιση που αναφέραμε, παραμένοντας στα πλαίσια της ευκλείδειας γεωμετρίας και του νόμου της βαρύτητας του Νεύτωνα. Αν ξέρουμε τη μάζα του Ήλιου και τη μάζα του κινούμενου φωτονίου (του **κβάντα** του φωτός), μπορούμε με βάση το νόμο της βαρύτητας του Νεύτωνα, να υπολογίσουμε την απόκλιση του φωτονίου από την ευκλείδεια ευθεία γραμμή.

Το πείραμα ωστόσο μας δείχνει ότι η πραγματική απόκλιση θα είναι περίπου διπλάσια από την απόκλιση που υπολογίσαμε με την παραπάνω μέθοδο.

Έτσι, υποχρεωνόμαστε να θεωρήσουμε ότι η ευκλείδεια γεωμετρία και η θεωρία της βαρύτητας του Νεύτωνα (ή και οι δυο τους) είναι ανεπαρκώς ακριβή πρότυπα του πραγματικού κόσμου, αφού δεν μας επιτρέπουν να εξηγήσουμε τα παρατηρούμενα φαινόμενα. Η γενική θεωρία της Σχετικότητας όμως μας έδωσε το νέο, το πιο ακριβές μοντέλο. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, η συμπεριφορά των **ακτίνων του φωτός δεν** είναι καθόλου **υποχρεωμένη** να ακολουθήσει τους **νόμους της ευκλείδειας γεωμετρίας**. Η κατάλληλη για την περιγραφή της συμπεριφοράς των ακτίνων φωτός γεωμετρία πρέπει να καθορίζεται με απόλυτη πληρότητα από την κατανομή και την 331αρ κατάσταση της ύλης στον κόσμο. Κάθε μετατόπιση μάζας και κάθε μεταβολή της ενέργειας της ύλης έχει σαν επακόλουθο την αλλαγή της δομής ολόκληρου του φυσικού χώρου και συνεπώς επιβάλλει την ανάγκη εκλογής ενός μοντέλου που θα είναι πιο κατάλληλο από το ευκλείδειο γεωμετρικό μοντέλο.

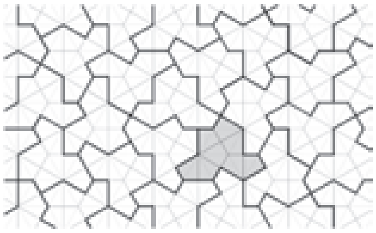
Δεν πρέπει να θεωρούμε τις ακτίνες φωτός στον κοντινό χώρο γύρω από τον Ήλιο έπαψαν να είναι ευθείες, ότι στράβωσαν. Κι αυτές, όπως κι οι ακτίνες που περνούν μακριά από τον Ήλιο, είναι ιδανικές ευθείες. Ωστόσο,

η συμπεριφορά των ευθειών αυτών πρέπει να περιγράφεται όχι με το ευκλείδειο σύστημα αξιωμάτων, όχι με την ευκλείδεια Γεωμετρία, αλλά με κάποια άλλη Γεωμετρία.

Αφού η κατανομή και η κατάσταση της ύλης στον πραγματικό χώρο μεταβάλλονται στο χρόνο, η Γεωμετρία που περιγράφει τον πραγματικό χώρο μας με αρκετή ακρίβεια δεν παραμένει κι αυτή αμετάβλητη, αλλά μεταβάλλεται στο χρόνο. Συνεπώς στη διατύπωση των αξιωμάτων της Γεωμετρίας πρέπει να υπολογίζεται κι ο χρόνος.

Οι έννοιες χώρος και χρόνος είναι αδιαχώριστες, αδιάσπαστες.

Η θεωρία της σχετικότητας του Άϊνστάϊν συνένωσε σε ενιαίο σύνολο τη μελέτη των φυσικών και των γεωμετρικών ιδιοτήτων του πραγματικού κόσμου. Είναι σα να μας έδωσε ένα <u>ενιαίο φυσικογεωμετρικό</u> μοντέλο του κόσμου μας.



Έτσι βλέπουμε ότι ο κόσμος δεν πρέπει να θεωρείται κενός ευκλείδειος χώρος, γεμάτος ύλη. Κάθε μεταβολή του πεδίου έλξης, κάθε μετατόπιση και κάθε μεταβολή της ενέργειας της ύλης έχουν σαν επακόλουθο να μεταβάλλεται η δομή ολόκληρου του φυσικού χώρου και συνεπώς μας αναγκάζουν να διαλέξουμε πιο κατάλληλο γεωμετρικό μοντέλο.

Σύμφωνα με τη θεωρία του Einstein ***η εκλογή της κατάλληλης γεωμετρίας καθορίζεται από την κατανομή και την κατάσταση της ύλης στον πραγματικό κόσμο.***

2ο θέμα: Πώς τα διαγράμματα John Venn συνδέουν τη λογική με τη γεωμετρία

Η παράξενη ιστορία και η ελκυστικότητα αυτών των από μαθηματική σκοπιά απλών διαγραμμάτων.

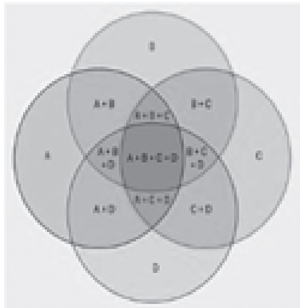
Τα διαγράμματα του (*John) Venn* μπορεί να μην έλυσαν κάποιο άλυτο μέχρι την εμφάνισή τους μαθηματικό πρόβλημα, αλλά οι αλληλοτεμνόμενοι δακτύλιοί τους αποτελούν μια συμπαγή και εύχρηστη αναπαράσταση των σχέσεων μεταξύ συνόλων και γι' αυτό συνεχίζουν να χρησιμοποιούνται στη σχολική εκπαίδευση, σε γραφήματα και σε διαδικτυακά μιμίδια.

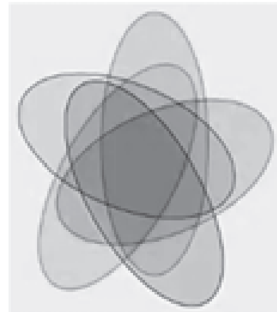
Πέρα από την αξιοποίησή τους ως οπτικών βοηθημάτων μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην επίλυση προβλημάτων λογικής που προκύπτουν στην καθημερινή ζωή, ενώ γίνονται και αφορμή για τη διατύπωση γεωμετρικών ερωτημάτων προς απάντηση. Για παράδειγμα, κανείς δεν έχει δει **διάγραμμα Venn** με τέσσερις αλληλεπικαλυπτόμενους κύκλους, επειδή απλώς κάτι τέτοιο είναι αδύνατο να υπάρξει. Ο ίδιος ο Venn το ανακάλυψε και βρήκε έξυπνο τρόπο να το παρακάμψει, που όμως έφερε στην επιφάνεια **βαθύτερα γεωμετρικά αινίγματα**, τα οποία οι μαθηματικοί ακόμη μελετούν.

Η γιορτή κι οι προσκεκλημένοι

Ο Venn παρουσίασε τα διαγράμματα που πήραν το όνομά του το **1880**, ως μέθοδο οπτικοποίησης των προόδων στη λογική εκείνη την εποχή. Τα διαγράμματα δεν άργησαν να βρουν εφαρμογή στη θεωρία συνόλων, που ασχολείται με συλλογές αντικειμένων. Τα τυπικά διαγράμματα Venn αποτελούνται από αλληλεπικαλυπτόμενους κύκλους, που ο καθένας αντιπροσωπεύει ένα σύνολο στοιχείων (π.χ. κινηματογραφικών έργων που ανήκουν στην ίδια κατηγορία). Η κοινή περιοχή δύο κύκλων περιέχει τα στοιχεία που ανήκουν και στα δύο σύνολα.

Φανταστείτε ότι θα διοργανώσετε μια γιορτή με προσκεκλημένους τρεις φίλους σας, που δεν τα πάνε και τόσο καλά μεταξύ τους. Αν έρθει η Μαρία, τότε το ίδιο θα κάνει και ο Φίλιππος. Αν έρθει ο Βασίλης, τότε θα έρθει και κάποιος άλλος. Ο Βασίλης δεν θα έρθει αν έρθει η Μαρία, αλλά θα έρθει εφόσον αλλά θα έρθει εφόσον εκείνη δεν έρθει.





Διάγραμμα του** Grünbaum **με χρήση** 5 **ελλείψεων αντί κύκλων

Αν και ο Φίλιππος και ο Βασίλης έρθουν στη γιορτή, τότε θα έρθει και η Μαρία. Ποιος λέτε ότι τελικά θα σας κάνει την τιμή; Η απάντηση στο πρόβλημα αυτό είναι δύσκολη όταν διατυπωθεί μόνο λεκτικά. Φανταστείτε ότι θα διοργανώσετε μια γιορτή με προσκεκλημένους τρεις φίλους σας, που δεν τα πάνε και τόσο καλά μεταξύ τους. Αν έρθει η Μαρία τότε το ίδιο θα κάνει και ο Φίλιππος. Αν έρθει ο Βασίλης, τότε θα έρθει και κάποιος άλλος. Ο Βασίλης δεν θα έρθει αν έρθει η Μαρία, αλλά θα έρθει εφόσον εκείνη δεν έρθει. Αν και ο Φίλιππος και ο Βασίλης έρθουν στη γιορτή, τότε θα έρθει και η Μαρία. Ποιος λέτε ότι τελικά θα σας κάνει την τιμή; Η απάντηση στο πρόβλημα αυτό είναι δύσκολη όταν διατυπωθεί μόνο λεκτικά. Όμως, ένα **διάγραμμα Venn** επιτρέπει την **οπτικοποίησή** του και μέσω αυτής την επίλυσή του. Κάθε προϋπόθεση αποκλείει κάποια ενδεχόμενα, πράγμα που σηματοδοτείται με τη διαγράμμιση των αντίστοιχων περιοχών στο διάγραμμα Venn (βλ. σταδιακά την εφαρμογή των προϋποθέσεων στο γραφικό με τα 4 διαγράμματα).

Το πρόβλημα των τεσσάρων κύκλων

Τα περισσότερα διαγράμματα Venn απεικονίζουν δύο ή τρεις αλληλεπικαλυπτόμενους κύκλους. Το διάγραμμα με τους τέσσερις κύκλους, που χαρακτηρίζονται με τα γράμματα A, B, C και D, δείχνει ότι είναι αδύνατο να οπτικοποιηθούν όλα τα δυνατά ενδεχόμενα που σχετίζονται με τέσσερις κύκλους. Στο διάγραμμα δεν υπάρχει μια περιοχή που μόνο ο A και ο C να αλληλεπικαλύπτονται επιμέρους, ούτε περιοχή που μόνο ο B και ο D να αλληλεπικαλύπτονται επιμέρους. Το πρόβλημα είναι ότι δεν υπάρχει περιοχή αλληλεπικάλυψης των A και C ή των B και D, που να μην επικαλύπτεται από τουλάχιστον έναν ακόμη κύκλο. Οποιαδήποτε μετακίνηση των κύκλων δεν αλλάζει αυτό το γεγονός. Κάθε διάγραμμα με τέσσερις κύκλους πάσχει από αυτό το πρόβλημα. Τόσο ο ίδιος όσο και άλλοι μαθηματικοί θεωρούσαν ότι οι ελλείψεις δεν θα ήταν αποτελεσματικές για 5 σύνολα, μέχρι που ο **Grunbaum**, με ένα όμορφο διάγραμμα, που εμφανίζει **περιστροφική συμμετρία**, απέδειξε πως έκαναν λάθος. Περιστρέφοντάς το κατά το ένα πέμπτο μιας πλήρους περιστροφής, καταλήγει να είναι το ίδιο σχήμα όπως πριν από την περιστροφή. Αντιθέτως, το διάγραμμα με τις 4 ελλείψεις δεν εμφανίζει περιστροφική συμμετρία. Τι είναι αυτό που έχουν κοινό το 3 και το 5 και δεν το έχει το 4;

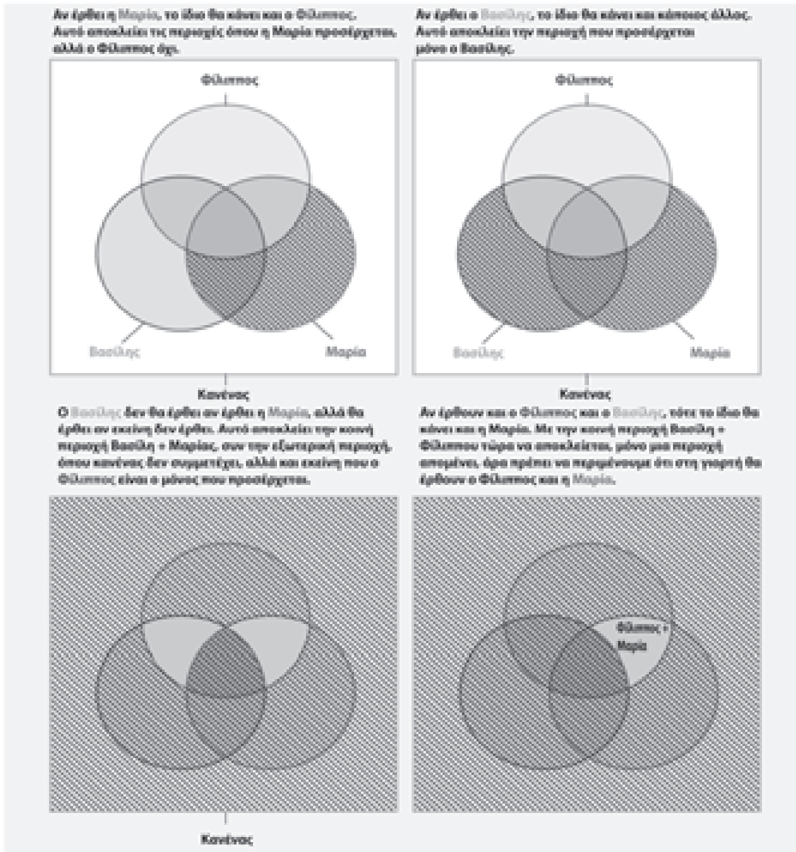
Έρευνα

Οι ελλείψεις είναι αποτελεσματικές για διαγράμματα με 4 ή 5 σύνολα, αλλά μετά αποτυγχάνουν το ίδιο όπως και οι κύκλοι. Όσο ο αριθμός των συνόλων αυξάνεται, τόσο πιο περίπλοκα πρέπει να είναι τα σχήματα που τα απεικονίζουν. Βέβαια, ήδη από τα 4 σύνολα, τα διαγράμματα αρχίζουν να γίνονται δυσανάγνωστα, αλλά οι μαθηματικοί διέκριναν στο ζήτημα ένα προκλητικό γεωμετρικό ερώτημα, που έγινε αφορμή για τη συνεχιζόμενη και σήμερα διερεύνηση της γεωμετρίας των διαγραμμάτων Venn.

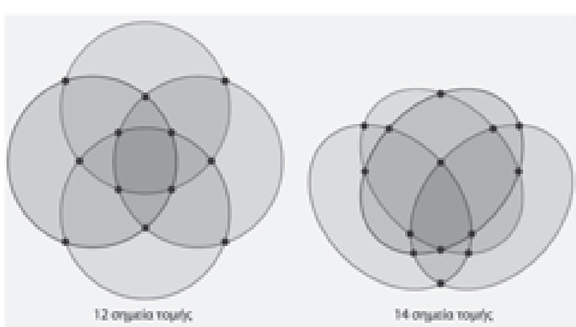
Όπως απέδειξε το 1960 ένας φοιτητής, ο Ντ. Χέντερσον, συμμετρικά μπορούν να είναι τα διαγράμματα Venn που ο αριθμός των εικονιζόμενων συνόλων είναι πρώτος αριθμός, δηλαδή 2, 3, 5, αλλά όχι 4. Ο Χέντερσον **δεν απέδειξε** πως κάθε πρώτος αριθμός συνόλων μπορεί να απεικονιστεί ως διάγραμμα Venn. Άρχισε τότε ένας διαγωνισμός μεταξύ των μαθηματικών για διαγράμματα με όλο και μεγαλύτερο αριθμό συνόλων, μέχρι που το 2004 μαθηματικοί του Πανεπιστημίου της Νότιας Καρολίνας έδειξαν ότι **υπάρχουν περιστροφικώς**

συμμετρικά διαγράμματα Venn για κάθε **πρώτο** αριθμό συνόλων. Τώρα η μαθηματική κοινότητα αναζητά σχήματα για τα διαγράμματα Venn με ακόμη πιο εκλεπτυσμένες ιδιότητες...

*[**πηγή**: «Scientific American»]*



Σε αντίθεση με τους κύκλους, οι ελλείψεις μπορούν να τέμνονται σε 4 και όχι μόνο σε 3 σημεία. Αυτό επιτρέπει το ξεπέρασμα των περιορισμών των κύκλων, αλλά όχι για πολύ



Δεν υπάρχει λόγος να περιοριστεί κανείς στους κύκλους, αλλά αν χρησιμοποιηθούν κατάλληλα καμπυλωμένα σχήματα, ώστε να παραπάνω αντιμετωπίζονται τα διάγραμμα θα χάσει τη χάρη και την ευκρίνειά του.

Οι τρισδιάστατες σφαίρες θα έλυναν το πρόβλημα, αλλά τα τρισδιάστατα σχήματα γίνονται πιο δύσκολα κατανοητά.

O Venn πρότεινε ως λύση τη χρήση ελλείψεων αντί κύκλων για το πρόβλημα των 4 συνόλων.

Εβαρίστ Γκαλουά: το άδοξο τέλος μιας μαθηματικής ιδιοφυΐας

Ο Evarist Galois υπήρξε μία από τις μεγαλύτερες φυσιογνωμίες στα Μαθηματικά. Ο Galois γεννήθηκε στα περίχωρα του Παρισιού στις 25/10/1811. Μέχρι τα 12 χρόνια είχε μοναδικό δάσκαλο τη μητέρα του Αδελαΐδα. Στα 16 του ο Galois έκανε ένα περίεργο σφάλμα. Αγνοώντας ότι ο (Niels Henrik) Abel έκανε λάθος πιστεύοντας ότι έλυσε τη γενική εξίσωση 5ου βαθμού, επανέλαβε ο ίδιος το ίδιο σφάλμα. Δεν άργησε να το καταλάβει.

Ο Galois χωρίς προετοιμασία, παρουσιάστηκε στις εξετάσεις της Πολυτεχνικής Σχολής. Αυτή η μεγάλη Σχολή, η μητέρα των Γάλλων μαθηματικών, που είχε ιδρυθεί τον καιρό της επανάστασης (από τον Μονζ) για να προσφέρει στους πολιτικούς και στρατιωτικούς μηχανικούς την καλύτερη μαθηματική και επιστημονική εκπαίδευση του κόσμου ολόκληρου, τραβούσε διπλά τον φιλόδοξο Galois.

Ο Galois απότυχε στις εξετάσεις του Πολυτεχνείου. Περίπου ένα τέταρτο αιώνα αργότερα ο Τερκέν, εκδότης των «Νέων Χρονικών των Μαθηματικών», επιθεώρησης προορισμένης για τους υποψήφιους του Πολυτεχνείου και της «**Εκόλ Νορμάλ**» έγραψε: «ένας υποψήφιος ανώτερης ευφυίας χάνεται με έναν εξεταστή κατώτερης ευφυίας. Hic ego barbarus sum quia non inteliges (είμαι βάρβαρος επειδή δεν με καταλαβαίνουν...)»

Στα 1828, ο Galois ήταν 17 χρόνων ήταν γι΄ αυτόν μια μεγάλη χρονιά. Για πρώτη φορά συνάντησε έναν άνθρωπο ικανό να καταλάβει την ιδιοφυΐα το, τον Λουί-Πωλ-Εμίλ Ρισάρ, καθηγητή ειδικών Μαθηματικών στο Λουί-Λε-Γκραν. Ο Ρισάρ δεν ήταν ένας επιτηδευμένος παιδαγωγός, αλλά ένας άνθρωπος με αξία που, στις ώρες της σχόλης του, παρακολουθούσε μαθήματα Γεωμετρίας στη Σορβόννη και ήταν πάντα ενημερωμένος για την πρόοδο των Μαθηματικών, την πραγματοποιούμενη από τους σύγχρονους σοφούς. Έτσι πάντα φρόντιζε να ενημερώνει σχετικά τους μαθητές του. Αυτός ο άνθρωπος που δεν θα φρόντιζε ποτέ για τα δικά του συμφέροντα, δεν υπολόγιζε καμιά θυσία προκειμένου να προωθήσει έναν προικισμένο μαθητή του.

Το Γενάρη του 1831 ο Evarist Galois παρέδωσε στην Ακαδημία του Παρισιού πάλι χειρόγραφα της μελέτης του για τη λύση **εξισώσεων με ριζικά**. Με γράμμα του στον πρόεδρο της της Ακαδημίας παρακαλούσε «*να διαβάσουν τουλάχιστο με προσοχή*» αυτά που έγραφε. Αυτή τη φορά η εργασία παραδόθηκε για μελέτη σε δύο ακαδημαϊκούς. Αυτοί ωστόσο δεν μπόρεσαν να καταλάβουν τα χειρόγραφα του Galois, γιατί οι ιδέες που εκθέτονταν εκεί ήταν πάρα πολύ καινούργιες. Η Ακαδημία απέρριψε την εργασία του Galois, που αυτό τον καιρό ήταν φυλακισμένος. Τον είχαν πιάσει το Μάη του 1831 για μια πρόποση που έκανε και που όλοι την πήραν σαν πρόσκληση για ανατροπή του βασιλιά Λουδοβίκου Φιλίππου. Το δικαστήριο αθώωσε τον Εβαρίστ, αλλά λίγο ύστερα από την απελευθέρωσή του τον ξανάπιασαν σαν έναν από τους ηγέτες της διαδήλωσης της 14 Ιουλίου 1831. Αυτή τη φορά έμεινε στη φυλακή κοντά στους 9 μήνες. Λίγο αργότερα από την αποφυλάκισή του, η ζωή του νεαρού ιδιοφυούς σταμάτησε, σκοτώθηκε σε **μονομαχία**.

Τη νύχτα, την παραμονή της μονομαχίας, ο Galois έγραψε στον φίλο του Αύγουστο Σεβαλιέ ένα γράμμα ολοκληρωτικά αφιερωμένο στα Μαθηματικά του επιτεύγματα. Από κείνο το γράμμα έχουμε όλες τις πληροφορίες για τις μαθηματικές του ανακαλύψεις

***αυτό το ξέρατε;* ποιοι αριθμοί λέγονται "αυτοφυείς";**

απάντηση στο "αυτό το ξέρατε;"

Παίρνουμε έναν ακέραιο θετικό αριθμό π.χ. το 13. Προσθέτουμε σ΄ αυτόν (τον αριθμό) το άθροισμα των ψηφίων που τον αποτελούν (δηλ. το 1+3=4). Σχηματίζεται το 17. Σ΄ αυτόν τον νέο αριθμό προσθέτουμε το άθροισμα των ψηφίων που τον αποτελούν (δηλ. το 1+7=8). Σχηματίζεται το 25. Συνεχίζοντας έτσι, σχηματίζουμε τη σειρά των αριθμών:

13, 17, 25, 32, 37, 47,…….

Λεπτομέρειες για τους αυτοφυείς αριθμούς στο επόμενο τεύχος

Τάξη: Α΄ — Επαναληπτικές ασκήσεις Άλγεβρας

*Πλησιάζοντας στο τέλος της σχολικής χρονιάς δίνουμε μερικές επαναληπτικές ασκήσεις στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου που **καλύπτουν** ένα **μεγάλο φάσμα** της ύλης. Ευχόμαστε καλό και εποικοδομητικό διάβασμα σε όλους.*

Α΄ ΜΕΡΟΣ:

Δέσποινα Κ. Δεληγιάννη – Χρυσοβαλάντη Χ. Χάδου

Άσκηση 1: Δίνονται οι αριθμοί

$$\kappa=\left(\sqrt{8+\sqrt{15}}-\sqrt{8-\sqrt{15}}\right)^2 \quad \text{και}\ \lambda=\sqrt[3]{\sqrt{13}-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{7+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{13}+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{7-2\sqrt{6}}$$

α. Να δείξετε ότι $\kappa=2$ και $\lambda=5$.

β. Αν $\kappa<x<\lambda$ να απλοποιήσετε την παράσταση $A=\dfrac{\sqrt{x^2+25-10x}}{x-5}+\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}$

γ. Να λύσετε την εξίσωση $x^4-\lambda x^2-3\kappa=0$.

Λύση: α) $\kappa=\left(\sqrt{8+\sqrt{15}}-\sqrt{8-\sqrt{15}}\right)^2$

$=\left(\sqrt{8+\sqrt{15}}\right)^2-2\sqrt{8+\sqrt{15}}\sqrt{8-\sqrt{15}}+\left(\sqrt{8-\sqrt{15}}\right)^2$

$=8+\sqrt{15}-2\sqrt{\left(8+\sqrt{15}\right)\left(8-\sqrt{15}\right)}+8-\sqrt{15}$

$=16-2\sqrt{8^2-\sqrt{15}^2}=16-2\sqrt{64-15}=16-2\sqrt{49}$

$=16-2\cdot7=16-14=2$

$\lambda=\sqrt[3]{\sqrt{13}-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{7+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{13}+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{7-2\sqrt{6}}$

$=\sqrt[3]{\left(\sqrt{13}-2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{13}+2\sqrt{2}\right)\left(7+2\sqrt{6}\right)\left(7-2\sqrt{6}\right)}$

$=\sqrt[3]{\left(\left(\sqrt{13}\right)^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2\right)\left(7^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2\right)}$

$=\sqrt[3]{(13-8)(49-24)}=\sqrt[3]{5\cdot25}=\sqrt[3]{125}=5$.

β) Έχουμε ότι $2<x<5$, οπότε:

$A=\dfrac{\sqrt{x^2+25-10x}}{x-5}+\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}$

$=\dfrac{\sqrt{(x-5)^2}}{x-5}+\dfrac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}=\dfrac{|x-5|}{x-5}+\dfrac{|x-2|}{x-2}$

$=\dfrac{-(x-5)}{x-5}+\dfrac{x-2}{x-2}=-1+1=0$, αφού $x-2>0$ και $x-5<0$.

γ) $x^4-\lambda x^2-3\kappa=0\Leftrightarrow x^4-5x^2-6=0 \qquad (1)$

Θέτουμε $x^2=\omega\geq0$ και η (1) γίνεται: $\omega^2-5\omega-6=0$ (2) με $\Delta=49>0$ οπότε έχει δυο άνισες ετερόσημες ρίζες τις $\omega_1=6$ ή $\omega_2=-1$ (απορρίπτεται).

Άρα $x^2=6\Leftrightarrow x=\sqrt{6}$ ή $x=-\sqrt{6}$

Άσκηση 2: Οι αριθμοί $x-3,\ 1-2x,\ 3x-11$ είναι, με την σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου (α_ν).

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x.

β) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

γ) Αν ο αριθμός $1-2x$ είναι ο πέμπτος όρος της προόδου, να βρείτε:

i) τον πρώτο όρο α_1 της προόδου

ii) να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με -17

iii) το άθροισμα S_{12} των δώδεκα πρώτων όρων της προόδου

δ) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\alpha_{13}+\alpha_{14}+\ldots+\alpha_{20}$$

Λύση: α) Πρέπει και αρκεί, $2(1-2x)=(x-3)+(3x-11)$ δηλαδή $2-4x=4x-14$ δηλαδή $-8x=-16$ δηλαδή $x=2$.

β) Για $x=2$ οι δοθέντες αριθμοί γίνονται $-1,-3,-5$, οπότε η διαφορά της προόδου είναι $\omega=-3-(-1)=-2$.

γ) i) Ο αριθμός $1-2x=-3$ είναι ο πέμπτος όρος της προόδου, άρα

$\alpha_5=-3\Leftrightarrow\alpha_1+(5-1)\cdot\omega=-3\Leftrightarrow\alpha_1+4\cdot(-2)=-3$

$\Leftrightarrow\alpha_1=-3+8\Leftrightarrow\alpha_1=5$.

ii) $\alpha_\nu=-17\Leftrightarrow\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega=-17$

$\Leftrightarrow5+(\nu-1)(-2)=-17\Leftrightarrow5-2\nu+2=-17$

$\Leftrightarrow-2\nu=-24\Leftrightarrow\nu=12$. Συνεπώς $\alpha_{12}=-17$.

iii) $S_{12}=\dfrac{12}{2}(\alpha_1+\alpha_{12})=6\cdot(5+(-17))=6\cdot(-12)=-72$

δ) Το ζητούμενο άθροισμα είναι:

$\alpha_{13}+\alpha_{14}+\ldots+\alpha_{20}=S_{20}-S_{12}=$

$=-280-(-72)=-208$ αφού $S_{12}=-72$ και

$S_{20}=\dfrac{20}{2}\cdot\left(2\cdot\alpha_1+(20-1)\omega\right)=10\cdot\left(2\cdot5+19\cdot(-2)\right)$

$=10\cdot(10-38)=-280$ $-280-(-72)=-208$

Άσκηση 3: Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=(\lambda-2)x^2-2|\lambda|x+\lambda+2 \ \text{ με } \lambda\neq2.$$

α) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$ για κάθε $\lambda\neq2$.

β) Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$ να είναι ίσο με 3.

γ) Αν $\lambda=4$.

i) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.

ii) Να βρείτε τα διαστήματα όπου η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την ευθεία $y=16$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $|f(x)|=2x-2$.

γ) Με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra ή οποιουδήποτε άλλου λογισμικού να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2x^2-8x+6$ καθώς και την ευθεία $y=16$ και να επαληθεύσετε γραφικά τη λύση των ερωτημάτων γi) και γii). Στη συνέχεια με τον ίδιο τρόπο να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f(x)|$ καθώς και την ευθεία $y=2x-2$ και να επαληθεύσετε γραφικά τη λύση του ερωτήματος γiii).

Λύση: α) Έχουμε: $\Delta=(-2|\lambda|)^2-4(\lambda-2)(\lambda+2)$

$$=4\lambda^2-4(\lambda^2-4)=16>0,$$

για κάθε $\lambda\neq 2$, κατά συνέπεια η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Έχουμε ότι:

$$x_1\cdot x_2=3\Leftrightarrow\frac{\gamma}{\alpha}=3\Leftrightarrow\frac{\lambda+2}{\lambda-2}=3\Leftrightarrow\lambda+2=3(\lambda-2)$$

$\lambda+2=3\lambda-6\Leftrightarrow 2\lambda=8\Leftrightarrow\lambda=4$.

γ) Για $\lambda=4$ έχουμε $f(x)=2x^2-8x+6$.

i) Το $f(0)=2\cdot 0^2-8\cdot 0+6=6$, άρα η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $A(0,6)$.

$$f(x)=0\Leftrightarrow 2x^2-8x+6=0\Leftrightarrow 2(x^2-4x+3)=0$$

$\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$ που έχει $\Delta=4>0$ όποτε η εξίσωση έχει δύο, πραγματικές και άνισες ρίζες τις $x=3$ ή $x=1$, άρα η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $B(1,0)$ και $\Gamma(3,0)$.

ii) Η C_f είναι κάτω από την ευθεία $y=16$ όταν $f(x)<16$. Όμως $f(x)<16\Leftrightarrow 2x^2-8x+6<16$

$\Leftrightarrow 2x^2-8x-10<0\Leftrightarrow x^2-4x-5<0$

$\Leftrightarrow x\in(-1,5)$

iii) $|f(x)|=2x-2$ (I)

- Αν $2x-2<0$ δηλαδή αν $x<1$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $2x-2\geq 0$ δηλαδή αν $x\geq 1$ τότε έχουμε:

$|f(x)|=2x-2\Leftrightarrow|2x^2-8x+6|=2x-2$

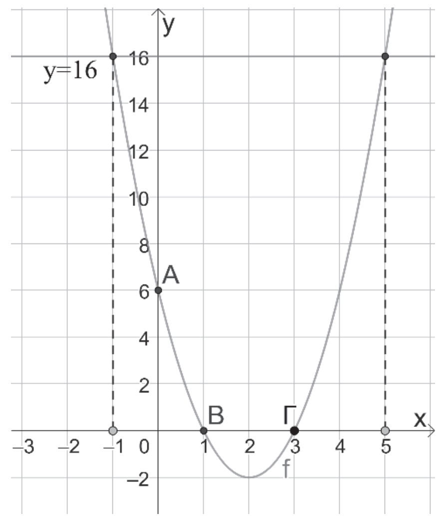
$\Leftrightarrow 2x^2-8x+6=2x-2$ ή $2x^2-8x+6=-(2x-2)$

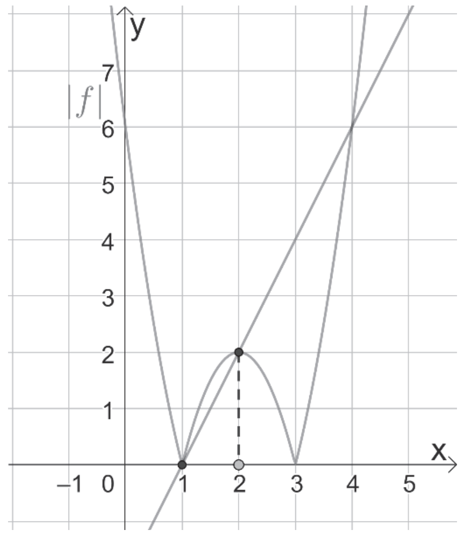
$\Leftrightarrow 2x^2-10x+8=0$ ή $2x^2-6x+4=0$

$\Leftrightarrow x^2-5x+4=0$ ή $x^2-3x+2=0$

$\Leftrightarrow x=4$ ή $x=1$ ή $x=2$

γ) Με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra έχουμε τα παρακάτω σχήματα:





Από τα σχήματα αυτά παρατηρούμε ότι επαληθεύονται οι λύσεις των ερωτημάτων γi), γii), γiii).

Άσκηση 4: α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\mu x+\kappa$ με $\kappa,\mu\in(0,+\infty)$, όπου οι αριθμοί 2, μ, κ είναι με τη σειρά που δίνονται διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Αν η C_f τέμνει τον x΄x σε δυο σημεία και το άθροισμα των τετραγώνων των τετμημένων των σημείων αυτών είναι 9, να βρεθούν οι τιμές των κ, μ.

β) Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με πρώτο όρο το μ και λόγο $\sqrt[3]{\kappa}$. Να βρείτε:

i) τον ένατο ορό της γεωμετρικής προόδου

ii) το άθροισμα των 10 πρώτων όρων αυτής.

Λύση: α) Αφού οι αριθμοί $2, \mu, \kappa$ είναι με τη σειρά που δίνονται διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου έχουμε:

$$\mu = \frac{2+\kappa}{2} \Leftrightarrow 2\mu = \kappa + 2 \Leftrightarrow \kappa = 2\mu - 2 \ \ (1).$$

Αν x_1, x_2 οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον $x'x$, αυτές θα είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+\mu x+\kappa=0$, άρα από τους τύπους του Vietta έχουμε $x_1+x_2=\frac{-\beta}{\alpha}=\frac{-\mu}{1}=-\mu$ και $x_1 \cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\kappa}{1}=\kappa$. Από την υπόθεση έχουμε ότι:

$x_1^2+x_2^2=9 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=9$

$\Leftrightarrow (-\mu)^2-2\kappa=9 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \mu^2-2(2\mu-2)=9$

$\Leftrightarrow \mu^2-4\mu+4=9 \Leftrightarrow \mu^2-4\mu-5=0$

$\Leftrightarrow \mu=5$ ή $\mu=-1$. Όμως $\mu\in(0,+\infty)$, οπότε $\mu=5$ οπότε από τη σχέση (1): $\kappa=2\cdot5-2=8$

β) Για τη γεωμετρική πρόοδο (α_ν) έχουμε ότι $\alpha_1=\kappa=5$ και $\lambda=\sqrt[3]{8}=2$, οπότε

i) $\alpha_9=\alpha_1\lambda^{9-1}=5\cdot2^8=5\cdot256=1280$

ii) $S_{10}=\alpha_1\frac{\lambda^{10}-1}{\lambda-1}=5\frac{2^{10}-1}{2-1}=5\frac{1024-1}{1}=5115.$

Άσκηση 5: Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση $y=(3-\lambda^2)x+2(\lambda+1)$, με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η (ε) να διέρχεται από το Α(-1 , 2)

β. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η (ε) να είναι παράλληλη στον άξονα x′x

γ. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η (ε) να είναι παράλληλη στην ευθεία (η), με εξίσωση $y=-(2|\lambda|+5)x+2025$.

δ. Αν $\lambda=-2$ να βρείτε τα σημεία Ε, Ζ στα οποία η (ε) τέμνει τους $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα και να υπολογίσετε την απόσταση τους.

Λύση: α) Αφού η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $A(-1,2)$ θα ισχύει: $2=(3-\lambda^2)(-1)+2(\lambda+1)$ δηλαδή $2=-3+\lambda^2+2\lambda+2$ δηλαδή $\lambda^2+2\lambda-3=0$ άρα $\lambda=1$ ή $\lambda=-3$

β) Η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στον $x'x$, όταν η κλίση της είναι μηδέν, οπότε έχουμε: $\alpha=0\Leftrightarrow 3-\lambda^2=0\Leftrightarrow\lambda^2=3\Leftrightarrow\lambda=\sqrt{3}$ ή $\lambda=-\sqrt{3}$.

γ) Οι ευθείες (ε) και (η) είναι παράλληλες όταν $\alpha_1=\alpha_2$ και $\beta_1\neq\beta_2$. Έχουμε:

$\alpha_1=\alpha_2\Leftrightarrow 3-\lambda^2=-(2|\lambda|+5)\Leftrightarrow\lambda^2-2|\lambda|-8=0$

$\Leftrightarrow|\lambda|^2-2|\lambda|-8=0$ (1). Θέτουμε $|\lambda|=t\geq0$ και η (1) γίνεται $t^2-2t-8=0$ με $\Delta=36>0$ οπότε $t=4$ ή $t=-2$ και αφού $t\geq0$ είναι $t=4$, άρα $|\lambda|=4\Leftrightarrow\lambda=4$ ή $\lambda=-4$.

Επίσης $\beta_1\neq\beta_2\Leftrightarrow2(\lambda+1)\neq2025\Leftrightarrow\lambda\neq1011{,}5$.

Συνεπώς $(\varepsilon)//(\eta)$, όταν $\lambda=4$ ή $\lambda=-4$.

δ) Για $\lambda=-2$ η (ε) γίνεται:

$$(\varepsilon): y=\left(3-(-2)^2\right)x+2(-2+1)\Leftrightarrow y=-x-2$$

Για $x=0$ είναι $y=-2$, ενώ για $y=0$ το $x=-2$, άρα η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $E(-2,0)$ και τον άξονα $y'y$ στο σημείο $Z(0,-2)$.

Η απόσταση των σημείων Ε και Ζ είναι:

$(EZ)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$=\sqrt{(0-(-2))^2+(-2-0)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$.

Άσκηση 6: Ένας μαθητής της Α΄ Λυκείου, μετά από μία συνάντηση που είχε με έναν σύμβουλο επαγγελματικού προσανατολισμού, αποφάσισε ότι για να πετύχει καλύτερες επιδόσεις στα μαθήματά του, πρέπει να μειώσει το χρόνο που περνάει με το κινητό του τηλέφωνο. Μετά από έναν πρόχειρο υπολογισμό διαπίστωσε ότι απασχολείται στο κινητό του τηλέφωνο 66 ώρες την εβδομάδα. Αν μειώσει τις ώρες στο κινητό τηλέφωνο κατά 4 την εβδομάδα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι οι ώρες χρήσης του κινητού ανά εβδομάδα είναι όροι αριθμητικής προόδου της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο καθώς και τη διαφορά, θεωρώντας ως πρώτη εβδομάδα αυτή που διενεργήθηκε το τεστ.

β) Πόσες ώρες θα έχει το κινητό του τηλέφωνο ο μαθητής την πέμπτη εβδομάδα;

γ) Αν ο στόχος του μαθητή είναι να έχει το κινητό του 10 ώρες την εβδομάδα, σε πόσες εβδομάδες θα μπορέσει να τον πετύχει;

Λύση: α) Αν η ακολουθία (α_ν) μας δίνει τις ώρες χρήσεις του κινητού ν την νιοστή εβδομάδα, τότε επειδή κάθε βδομάδα μειώνει τις ώρες χρήσης του κινητού του τηλεφώνου κατά 4, την επόμενη εβδομάδα θα έχει το κινητό του $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu-4$ ώρες. Συνεπώς η ακολουθία (α_ν)

είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega=-4$ και πρώτο όρο $\alpha_1=66$.

β) Οι ώρες που θα έχει το κινητό του την πέμπτη εβδομάδα θα είναι

$\alpha_5=\alpha_1+(5-1)\omega=66+4(-4)=66-16=50$ ώρες

γ) Θέλουμε το ν έτσι ώστε $\alpha_\nu=10$. Όμως,

$\alpha_\nu=10\Leftrightarrow \alpha_1+(\nu-1)\omega=10$

$\Leftrightarrow 66+(\nu-1)(-4)=10\Leftrightarrow 66-4\nu+4=10$

$-4\nu=-60\Leftrightarrow \nu=15$. Άρα σε 15 εβδομάδες.

Β΄ ΜΕΡΟΣ:

Γεώργιος Βασιλόπουλος

Άσκηση 7: Να λύσετε την εξίσωση :

$$(2x-1)^2+\frac{1}{(2x-1)^2}=2$$

Λύση: Πρέπει και αρκεί $2x-1\neq 0$ δηλαδή $x\neq\frac{1}{2}$

Θέτουμε: $(2x-1)^2=\alpha$ οπότε η εξίσωση γίνεται:

$\alpha+\frac{1}{\alpha}=2$. Όμως $\alpha+\frac{1}{\alpha}=2\Leftrightarrow \alpha^2+1=2\alpha$

$\Leftrightarrow(\alpha-1)^2=0\Leftrightarrow \alpha=1$.

Οπότε $(2x-1)^2=1\Leftrightarrow 2x-1=1$ ή $2x-1=-1$

$\Leftrightarrow x=1$ ή $x=0$ (δεκτές)

Άσκηση 8: Δίνεται η εξίσωση $x^2+2\lambda x+\lambda-2=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία ισχύει :

$$x_1+x_2=-x_1\cdot x_2 \quad (2)$$

Λύση: α) Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=4\lambda^2-4\lambda+8=4(\lambda^2-\lambda+2)>0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ αφού η διακρίνουσα της παράστασης $\lambda^2-\lambda+2$ είναι $\Delta'=-7<0$. Άρα η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1) τότε, $x_1+x_2=-2\lambda$ και $x_1\cdot x_2=\lambda-2$. Οπότε έχουμε:

$(2)\Leftrightarrow -2\lambda=-(\lambda-2)\Leftrightarrow \lambda=-2$

Άσκηση 9: Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x+2}-1$$

Α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

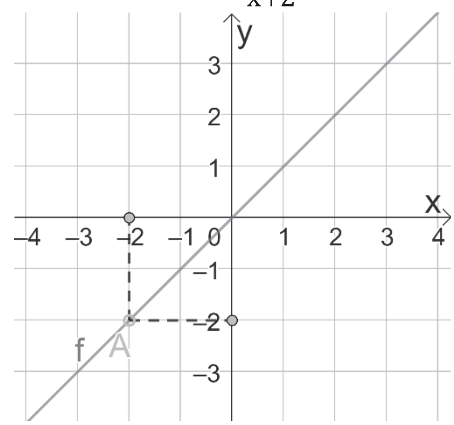
Β) Να απλοποιηθεί ο τύπος της και να γίνει η γραφική της παράσταση

Γ) Να βρεθούν τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $g(x)=|f(x)|$ με τη συνάρτηση $h(x)=x^2$

Δ) Χρησιμοποιώντας το λογισμικό Geogebra ή οποιοδήποτε άλλο λογισμικό να επιβεβαιώσετε γραφικά τις απαντήσεις σας στο ερώτημα Γ)

Λύση: Α) Πρέπει και αρκεί $x+2\neq 0$ δηλαδή $x\neq -2$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}-\{-2\}$

Β) Για $x\neq -2$, $f(x)=\frac{(x+1)(x+2)}{x+2}-1=x+1-1=x$



Η γραφική παράσταση της f είναι η ευθεία του σχήματος (διχοτόμος της γωνίας xOy) από την οποία λείπει το σημείο $A(-2,-2)$.

Γ) Οι τετμημένες των σημείων τομής των συναρτήσεων g και h θα είναι οι λύσεις της εξίσωσης $g(x)=h(x)$. Όμως,

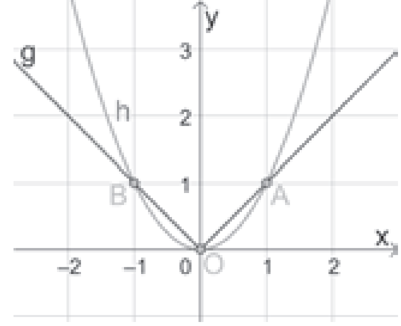
$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow |x|=x^2\Leftrightarrow |x|=|x|^2\Leftrightarrow |x|^2-|x|=0$$

$$\Leftrightarrow |x|(|x|-1)=0\Leftrightarrow |x|=0 \text{ ή } |x|=1$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1$$

Άρα οι συναρτήσεις f και h τέμνονται στα σημεία $O(0,0), A(1,1)$ και $B(-1,1)$.

Δ) Με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra έχουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h:



Από τα σχήματα αυτά παρατηρούμε ότι επαληθεύονται οι λύσεις του ερωτήματος Γ)

Τάξη: Α΄ — Επαναληπτικές ασκήσεις Άλγεβρας

Ιασωνίδης Δ. – Πετρίδης Π.

Θέμα 1: Να λυθεί η εξίσωση:

$$|x-\alpha|+|x-\beta|=\beta-\alpha \quad (1)$$

όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$.

Λύση: α΄ τρόπος:

x	$-\infty$	α		β		$+\infty$
$x-\alpha$	$-$	0	$+$		$+$	
$x-\beta$	$-$		$-$	0	$+$	

Αν $x<\alpha$ τότε $|x-\alpha|=\alpha-x$ και $|x-\beta|=\beta-x$, οπότε από (1) προκύπτει

$$\alpha-x+\beta-x=\beta-\alpha \Leftrightarrow 2x=2\alpha \Leftrightarrow x=\alpha,$$

απορρίπτεται.

Αν $\alpha\le x\le\beta$, τότε $|x-\alpha|=x-\alpha$ και $|x-\beta|=\beta-x$, οπότε από (1) προκύπτει $x-\alpha+\beta-x=\beta-\alpha \Leftrightarrow 0x=0$, που ισχύει για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Αν $x>\beta$ τότε $|x-\alpha|=x-\alpha$ και $|x-\beta|=x-\beta$, οπότε από (1) προκύπτει $x-\alpha+x-\beta=\beta-\alpha \Leftrightarrow 2x=2\beta \Leftrightarrow x=\beta$, απορρίπτεται. Άρα το σύνολο των λύσεων της (1) είναι το διάστημα $[\alpha,\beta]$.

β΄ τρόπος: Αν Α, Β, Μ οι εικόνες των α, β, x, αντίστοιχα, στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τότε: $|x-\alpha|=d(x,\alpha)=(AM)$,

$|x-\beta|=d(x,\beta)=(BM)$ και

$\beta-\alpha=|\beta-\alpha|=d(\alpha,\beta)=(AB)$, τότε από (1) προκύπτει $(AM)+(BM)=(AB)$, η οποία ισχύει μόνο αν το Μ κινείται στο τμήμα ΑΒ, δηλαδή μόνο αν $\alpha\le x\le\beta$.

γ΄ τρόπος: Από τη θεωρία είναι γνωστό ότι: $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta\ge 0$. Τότε: από (1) έχουμε:

$$|x-\alpha|+|x-\beta|=\beta-\alpha \Leftrightarrow$$
$$|x-\alpha|+|\beta-x|=|\beta-\alpha| \Leftrightarrow$$
$$|x-\alpha|+|\beta-x|=|\beta-x+x-\alpha| \Leftrightarrow$$
$$(x-\alpha)(\beta-x)\ge 0 \Leftrightarrow \alpha\le x\le\beta$$

Θέμα 2: α) Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right] \quad (1)$$

για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

β) Αν α,β,γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\ge 3\alpha\beta\gamma \quad (2)$

ii) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma$

γ) Έστω x,y,z θετικοί πραγματικοί αριθμοί

i) Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{x+y+z}{3}\ge\sqrt[3]{xyz} \quad (3)$

ii) Πότε ισχύει η ισότητα στην (3)

iii) Να αποδείξετε ότι: $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}<4$.

Λύση: α) Είναι η ταυτότητα του Euler. Ξεκινώντας από το β μέλος έχουμε:

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]=$$
$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\left[2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha\right]=$$
$$\frac{1}{\cancel{2}}(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\cancel{2}\cdot(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)=$$
$$(\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)=$$
$$\alpha^3+\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2-\alpha^2\beta-\alpha\beta\gamma-\alpha^2\gamma+\alpha^2\beta+\beta^3+$$
$$+\beta\gamma^2-\alpha\beta^2-\beta^2\gamma-\alpha\beta\gamma+\alpha^2\gamma+\beta^2\gamma+\gamma^3-$$
$$-\alpha\beta\gamma-\beta\gamma^2-\alpha\gamma^2=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma.$$

β) i) Αφού $\alpha,\beta,\gamma>0$ ισχύουν: $\alpha+\beta+\gamma>0$ και $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\ge 0$ οπότε σύμφωνα με την (1): $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma\ge 0\Leftrightarrow\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\ge 3\alpha\beta\gamma$

ii) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=0\Leftrightarrow\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma\Leftrightarrow$ $\alpha+\beta+\gamma=0$, άτοπο ή

$(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0\Leftrightarrow\alpha-\beta=0$ και $\beta-\gamma=0$ και $\gamma-\alpha=0 \Leftrightarrow\alpha=\beta=\gamma$

γ) i) Αφού x,y,z θετικοί πραγματικοί αριθμοί, ορίζονται οι $\alpha=\sqrt[3]{x}$, $\beta=\sqrt[3]{y}$ και $\gamma=\sqrt[3]{z}$. Προφανώς $\alpha,\beta,\gamma>0$ οπότε σύμφωνα με το β)i) είναι: $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\ge 3\alpha\beta\gamma\Leftrightarrow x+y+z\ge 3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}\sqrt[3]{z}$

$$\Leftrightarrow\frac{x+y+z}{3}\ge\sqrt[3]{xyz}.$$

ii) Η ισότητα στην (3) ισχύει μόνο αν:

$$x+y+z=3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}\sqrt[3]{z}\Leftrightarrow\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma\overset{\beta)ii)}{\Leftrightarrow}$$
$$\alpha=\beta=\gamma\Leftrightarrow\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{z}\Leftrightarrow x=y=z.$$

iii) Σύμφωνα με τα γ) i) και γ) ii) αν $x,y,z>0$ και όχι όλοι ίσοι μεταξύ τους, θα ισχύει:

$$\frac{x+y+z}{3} > \sqrt[3]{xyz}.$$

Τότε: $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{1\cdot 2\cdot 2} < \frac{1+2+2}{3} = \frac{5}{3}$ και

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{1\cdot 3\cdot 3} < \frac{1+3+3}{3} = \frac{7}{3}.$$

Άρα: $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9} < \frac{5}{3} + \frac{7}{3} = \frac{12}{3} = 4$.

Σημείωση: Η (3) είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας ΑΜ–ΓΜ (Αριθμητικού Μέσου – Γεωμετρικού Μέσου).

Αν $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε ο αριθμητικός τους μέσος είναι ο αριθμός $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu}{\nu}$ και ο γεωμετρικός τους μέσος είναι ο αριθμός $\sqrt[\nu]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_\nu}$.

Ισχύει: $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu}{\nu} \geq \sqrt[\nu]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_\nu}$ με την ισότητα να ισχύει όταν: $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_\nu$

Θέμα 3: Να λυθεί στο $(0,+\infty)$ η εξίσωση:

$$\frac{x+2}{2x+1} + \frac{x+3}{3x+1} + ... + \frac{x+2025}{2025x+1} = 2024 \quad (1).$$

Λύση: ** Το πλήθος των ακεραίων 2, 3 ,..., 2024, 2025 είναι 2024, άρα και το πλήθος των κλασμάτων στο α΄ μέλος της (1) είναι 2024. **

Α΄ τρόπος:

Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x+2}{2x+1} + \frac{x+3}{3x+1} + ... + \frac{x+2025}{2025x+1} = 2024 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+2}{2x+1} + \frac{x+3}{3x+1} + ... + \frac{x+2025}{2025x+1} - 2024 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{x+2}{2x+1} - 1\right) + \left(\frac{x+3}{3x+1} - 1\right) + ... +$$

$$+\left(\frac{x+2025}{2025x+1} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1-x}{2x+1} + \frac{2(1-x)}{3x+1} + ... + \frac{2024(1-x)}{2025x+1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1-x)\left[\frac{1}{2x+1} + \frac{2}{3x+1} + ... + \frac{2024}{2025x+1}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$, δεκτή λύση, αφού προφανώς ισχύει $\frac{1}{2x+1} + \frac{2}{3x+1} + ... + \frac{2024}{2025x+1} > 0$, για κάθε $x > 0$.

Β΄ τρόπος: Για $x = 1$ ισχύουν:

$$\frac{x+2}{2x+1} = \frac{3}{3} = 1,\ \frac{x+3}{3x+1} = \frac{4}{4} = 1, ..., \frac{x+2025}{2025x+1} = 1.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των παραπάνω ισοτήτων έχουμε:

$$\frac{x+2}{2x+1} + \frac{x+3}{3x+1} + ... + \frac{x+2025}{2025x+1} = 2024.$$

Αν είναι $0 < x < 1$ και $\kappa > 1$, τότε:

$$\frac{x+\kappa}{\kappa x+1} > 1 \quad (2).$$

Πράγματι: $\frac{x+\kappa}{\kappa x+1} > 1 \overset{\kappa x+1>0}{\Leftrightarrow} x + \kappa > \kappa x + 1 \Leftrightarrow$

$(\kappa - 1)x < (\kappa - 1) \overset{k>1}{\Leftrightarrow} x < 1$, που ισχύει.

Για $\kappa = 2, 3, ..., 2025$ στην (2) έχουμε:

$$\frac{x+2}{2x+1} > 1,\ \frac{x+3}{3x+1} > 1,\ ....,\ \frac{x+2025}{2025x+1} > 1$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{x+2}{2x+1} + \frac{x+3}{3x+1} + ... + \frac{x+2025}{2025x+1} > 2024.$$

Όμοια, αν $x > 1$ και $\kappa > 1$: $\frac{x+\kappa}{\kappa x+1} < 1$ (3), οπότε:

$$\frac{x+2}{2x+1} < 1,\ \frac{x+3}{3x+1} < 1,\ ....,\ \frac{x+2025}{2025x+1} < 1$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{x+2}{2x+1} + \frac{x+3}{3x+1} + ... + \frac{x+2025}{2025x+1} < 2024.$$

Επομένως, η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) στο $(0,+\infty)$ είναι η $x = 1$.

Θέμα 4: α) Έστω $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

i) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$. Πότε ισχύει η ισότητα;

ii) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha+\gamma}{\beta} + \frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha+\beta}{\gamma} \geq 6$. Πότε ισχύει η ισότητα;

β) Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{3x^2+7}{4x^2+1} + \frac{6x^2+4}{x^2+4} + \frac{5x^2+5}{2x^2+3} = 6.$$

Λύση: α) i) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2 \overset{\alpha\beta>0}{\Leftrightarrow} \alpha\beta \cdot \frac{\alpha}{\beta} + \alpha\beta \cdot \frac{\beta}{\alpha} \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow$

$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha - \beta)^2 \geq 0$, που ισχύει. Η ισότητα ισχύει όταν $(\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

ii) Αποδείχθηκε ότι: $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$ (1), όμοια ισχύουν: $\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} \geq 2$ (2) και $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha} \geq 2$ (3) με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2), (3) έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha} \geq 6 \Leftrightarrow$$

$\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\beta}\right)+\left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)+\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)\geq 6\Leftrightarrow$

$\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}\geq 6$.

β) Με βάση τα προηγούμενα έχουμε:

$\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}=6\Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma$ (ισχύουν οι ισότητες στις (1),(2),(3))

$\frac{3x^2+7}{4x^2+1}+\frac{6x^2+4}{x^2+4}+\frac{5x^2+5}{2x^2+3}=6\Leftrightarrow$

$\frac{(x^2+4)+(2x^2+3)}{4x^2+1}+\frac{(2x^2+3)+(4x^2+1)}{x^2+4}+$

$\frac{(4x^2+1)+(x^2+4)}{2x^2+3}=6\overset{\alpha=x^2+4>0,\beta=2x^2+3>0}{\underset{\gamma=4x^2+1>0,\ x\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}}$

$x^2+4=2x^2+3=4x^2+1\Leftrightarrow$

$\left.\begin{matrix}x^2+4=2x^2+3\\2x^2+3=4x^2+1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Θέμα 5: α) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(x)=x^3+(2-\alpha^2)x+2\alpha$, όπου $x,\alpha\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση: $x^3+(2-\alpha^2)x+2\alpha=0$ (1) να έχει τρείς άνισες πραγματικές ρίζες.

γ) Βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η (1) να έχει δύο άνισες αρνητικές ρίζες και μία θετική.

Λύση: α) $P(x)=x^3+(2-\alpha^2)x+2\alpha=$

$x^3+2x-\alpha^2x+2\alpha=x(x^2-\alpha^2)+2(x+\alpha)=$

$(x+\alpha)[x(x-\alpha)+2]=(x+\alpha)(x^2-\alpha x+2)$

β) $x^3+(2-\alpha^2)x+2\alpha=0\Leftrightarrow$

$(x+\alpha)(x^2-\alpha x+2)=0\Leftrightarrow x+\alpha=0$ ή

$x^2-\alpha x+2=0\Leftrightarrow x=-\alpha$ ή $x^2-\alpha x+2=0$

Για $x=-\alpha$ έχουμε ότι $(-\alpha)^2-\alpha(-\alpha)+2=2\alpha^2+2>0$ για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, άρα η $x=-\alpha$ δεν είναι ρίζα της $x^2-\alpha x+2=0$. Επομένως η (1) έχει τρείς άνισες πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν η $x^2-\alpha x+2=0$ έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, δηλαδή αν και μόνο αν: $\Delta>0\Leftrightarrow\alpha^2-8>0\Leftrightarrow\alpha^2>8\Leftrightarrow|\alpha|>2\sqrt{2}\Leftrightarrow$

$\alpha<-2\sqrt{2}$ ή $\alpha>2\sqrt{2}$.

γ) Αν η (1) έχει δύο άνισες αρνητικές πραγματικές ρίζες και μία θετική, τότε θα έχει τρεις άνισες πραγματικές ρίζες. Τότε σύμφωνα με το β) είναι $\alpha<-2\sqrt{2}$ ή $\alpha>2\sqrt{2}$.

Αν $\alpha>2\sqrt{2}$, τότε οι ρίζες της $x^2-\alpha x+2=0$ είναι θετικές αφού έχουν άθροισμα και γινόμενο $\left.\begin{matrix}S=\alpha>0\\P=2>0\end{matrix}\right\}$ (ομόσημες και αφού έχουν άθροισμα θετικό, θα είναι θετικές). Ακόμη η (1) έχει ρίζα την $x=-\alpha<0$. Άρα για $\alpha>2\sqrt{2}$ η (1) έχει δύο θετικές ρίζες και μία αρνητική, απορρίπτεται.

Αν $\alpha<-2\sqrt{2}$, τότε οι ρίζες της $x^2-\alpha x+2=0$ είναι αρνητικές αφού έχουν γινόμενο και άθροισμα $\left.\begin{matrix}S=\alpha<0\\P=2>0\end{matrix}\right\}$. Ακόμη η (1) έχει ρίζα την $x=-\alpha>0$.

Επομένως η (1) έχει δύο άνισες αρνητικές ρίζες και μία θετική ρίζα αν και μόνο αν $\alpha<-2\sqrt{2}$.

Θέμα 6: Δίνεται η εξίσωση:

$(\lambda-2)x^2+(\lambda-2)x+4-\lambda=0$ (1), $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η (1) να είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η (1) να έχει πραγματικές ρίζες x_1,x_2 με $x_1>x_2$ και $2x_1+x_2=2$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η (1) να έχει δύο ομόσημες ρίζες στο $\mathbb{R}$.

δ) Είναι δυνατόν η (1) να έχει αντίστροφες πραγματικές ρίζες;

Λύση: α) Αν $\lambda-2=0\Leftrightarrow\lambda=2$ η (1) γίνεται: $0\cdot x^2+0\cdot x+2=0$, που είναι αδύνατη.

Αν $\lambda\neq 2$, η (1) είναι πολυωνυμική εξίσωση δευτέρου βαθμού και είναι αδύνατη αν και μόνο αν: $\Delta<0$ και $\lambda\neq 2$

$\Delta<0\Leftrightarrow(\lambda-2)^2-4(\lambda-2)(4-\lambda)<0\Leftrightarrow$

$5\lambda^2-28\lambda+36<0$.

Το τριώνυμο (ως προς λ) έχει $\alpha=5>0$ και διακρίνουσα $\Delta_1=(-28)^2-4\cdot 5\cdot 36=64>0$, έχει ρίζες $\lambda_1=\frac{28-8}{10}=2$ και $\lambda_2=\frac{28+8}{10}=\frac{18}{5}$.

οπότε γίνεται ετερόσημο του $\alpha=5>0$ εντός των ριζών, δηλαδή $\lambda\in\left(2,\frac{18}{5}\right)$. Άρα η (1) είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ μόνο αν: $\lambda\in\left[2,\frac{18}{5}\right)$.

β) Η (1) έχει άνισες πραγματικές ρίζες όταν: $\lambda\neq 2$ και $\Delta=5\lambda^2-28\lambda+36>0$, άρα όταν $\lambda\in(-\infty,2)\cup\left(\frac{18}{5},+\infty\right)$. Είναι

$S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{\lambda-2}{\lambda-2}=-1$, οπότε:

$2x_1+x_2=x_1+x_1+x_2=x_1-1$. Άρα $x_1-1=2\Leftrightarrow x_1=3$ και $x_2=-4$.

Τότε $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=-12\Leftrightarrow\dfrac{4-\lambda}{\lambda-2}=-12\Leftrightarrow$

$11\lambda=20\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{20}{11}<2$, δεκτή.

Για $\lambda=\dfrac{20}{11}$ η (1) γίνεται:

$-\dfrac{2}{11}x^2-\dfrac{2}{11}x+\dfrac{24}{11}=0\Leftrightarrow x^2+x-12=0$,

που έχει ρίζες $x_1=3$ και $x_2=-4$ (είναι $x_1>x_2$). Ακόμη $2x_1+x_2=2$. Άρα η (1) έχει ρίζες x_1,x_2 με $x_1>x_2$ και $2x_1+x_2=2$, μόνο αν $\lambda=\dfrac{20}{11}$.

γ) Η (1) έχει δύο ομόσημες ρίζες στο $\mathbb{R}$ μόνο αν: $\lambda\neq2$, $\Delta\geq0$ και $P>0$, άρα

$\lambda\in(-\infty,2)\cup\left[\dfrac{18}{5},+\infty\right)$ και

$\dfrac{4-\lambda}{\lambda-2}>0\Leftrightarrow(4-\lambda)\cdot(\lambda-2)>0\Leftrightarrow\lambda\in(2,4)$

όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

λ	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$4-\lambda$		+		+	0	−	
$\lambda-2$		−	0	+		+	
$(4-\lambda)(\lambda-2)$		−	0	+	0	−	

Τελικά $\lambda\in\left[\dfrac{18}{5},4\right)$.

δ) Για να έχει η (1) αντίστροφες πραγματικές ρίζες πρέπει: $\lambda\neq2$, $\Delta\geq0$ και $P=1$.

Όμως: $P=1\Leftrightarrow\dfrac{4-\lambda}{\lambda-2}=1\Leftrightarrow$

$\lambda=3\notin(-\infty,2)\cup\left[\dfrac{18}{5},+\infty\right)$.

Άρα, δεν είναι δυνατόν η (1), να έχει αντίστροφες πραγματικές ρίζες.

Θέμα 7: **Δίνεται η εξίσωση $x^2-\lambda x+\lambda+1=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$ (1).**

α) Βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η (1) να έχει μία τουλάχιστον πραγματική λύση.

β) Έστω x_1,x_2 οι πραγματικές ρίζες της (1)

i) Να εκφράσετε τα x_1+x_2 και $x_1\cdot x_2$, ως συνάρτηση του λ.

ii) Βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε:

$(x_1-x_2)^2+4x_1^2\cdot x_2+4x_1\cdot x_2^2=121$ (2).

iii) Αν λ θετικός ακέραιος ώστε $x_1^3+x_2^3\geq90$, να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ.

iv) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο β iii) να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες: $\rho_1=\dfrac{1}{2x_1+1}$, $\rho_2=\dfrac{1}{2x_2+1}$.

Λύση: α) Η (1) έχει μία τουλάχιστον λύση στο $\mathbb{R}$ μόνο αν: $\Delta\geq0\Leftrightarrow\lambda^2-4(\lambda+1)\geq0\Leftrightarrow$

$\lambda^2-4\lambda-4\geq0$. Αφού $\Delta_1=(-4)^2-4\cdot(-4)=32>0$ η διακρίνουσα του τριωνύμου $\lambda^2-4\lambda-4$, τότε έχει ρίζες $\lambda_1=2-2\sqrt{2}$, $\lambda_2=2+2\sqrt{2}$ και τελικά αληθεύει όταν $\lambda\in\left(-\infty,2-2\sqrt{2}\right]\cup\left[2+2\sqrt{2},+\infty\right)$.

β) Αφού η (1) έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$ θα ισχύει $\lambda\in\left(-\infty,2-2\sqrt{2}\right]\cup\left[2+2\sqrt{2},+\infty\right)$. Για τις τιμές αυτές του λ έχουμε:

i) $S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}=\lambda$ και $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\lambda+1$.

ii) Έχουμε: $(x_1-x_2)^2+4x_1^2\cdot x_2+4x_1\cdot x_2^2=121\Leftrightarrow$

$x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+4x_1^2\cdot x_2+4x_1\cdot x_2^2=121\Leftrightarrow$

$(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2+4x_1\cdot x_2(x_1+x_2)=121\Leftrightarrow$

$\lambda^2-4(\lambda+1)+4\lambda(\lambda+1)=121\Leftrightarrow$

$5\lambda^2=125\Leftrightarrow\lambda^2=25\Leftrightarrow\lambda=\pm5$, δεκτές.

iii) $x_1^3+x_2^3\geq90\Leftrightarrow$

$$(x_1+x_2)^3-3x_1\cdot x_2(x_1+x_2)\geq90\Leftrightarrow$$

$\lambda^3-3\lambda(\lambda+1)\geq90\Leftrightarrow\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda\geq90\Leftrightarrow$

$\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda+9\geq99\Leftrightarrow(\lambda^2-3)(\lambda-3)\geq99$ (3).

Αρκεί να βρούμε το μικρότερο θετικό ακέραιο λ που επαληθεύει την (3). Εύκολα καταλαβαίνουμε ότι για $\lambda=1,2,3,4,5$ δεν αληθεύει η (3). Για $\lambda=6$ έχουμε:

$$(6^2-3)\cdot(6-3)=33\cdot3=99.$$

Για $\lambda\geq7$ είναι $\lambda^2-3\geq46$ και $\lambda-3\geq4$.

Άρα $(\lambda^2-3)(\lambda-3)\geq184>99$. Επομένως η (2) ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο λ με $\lambda\geq6$.

Άρα $\lambda_{\varepsilon\lambda\alpha\chi}=6$, δεκτή αφού $6>2+2\sqrt{2}$.

iv) Για $\lambda=6$ είναι $x_1+x_2=6$ και $x_1\cdot x_2=7$.

$S'=\rho_1+\rho_2=\dfrac{1}{2x_1+1}+\dfrac{1}{2x_2+1}=$

$\dfrac{2x_1+1+2x_2+1}{(2x_1+1)\cdot(2x_2+1)}=\dfrac{2(x_1+x_2)+2}{4x_1\cdot x_2+2(x_1+x_2)+1}=$

$\dfrac{2\cdot6+2}{4\cdot7+2\cdot6+1}=\dfrac{14}{41}$ και $P'=\rho_1\cdot\rho_2=\dfrac{1}{2x_1+1}\cdot\dfrac{1}{2x_2+1}=$

$\dfrac{1}{4x_1\cdot x_2+2(x_1+x_2)+1}=\dfrac{1}{41}$.

Μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες ρ_1,ρ_2 είναι η

$x^2-S'\cdot x+P'=0\Leftrightarrow x^2-\dfrac{14}{41}\cdot x+\dfrac{1}{41}=0\Leftrightarrow 41x^2-14x+1=0.$

Θέμα 8: α) Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): y=\alpha x+\beta$ και $(\varepsilon_2): y=-\dfrac{1}{\alpha}x+\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$.

i) Να βρείτε το σημείο τομής των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$.

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ αντίστοιχα με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

iii) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ είναι κάθετες.

β) Δίνονται οι παράλληλες ευθείες:

(ε): $y=(2\lambda^2-3\lambda+1)x+\lambda^2$ και

(ζ): $y=(\lambda^2-1)x+4\lambda-3$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε την τιμή του λ.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που είναι κάθετη στην ευθεία (ε) στο σημείο $(0,4)$.

iii) Να βρείτε τα διαστήματα του x όπου η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-3x-2$ είναι κάτω από την ευθεία (ζ)

Λύση:_α) i) Έχουμε ότι: $\alpha\neq-\dfrac{1}{\alpha}\Leftrightarrow\alpha^2\neq-1$, που ισχύει για κάθε $\alpha\neq0$. Άρα οι $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ τέμνονται, αφού έχουν διαφορετικούς συντελεστές διεύθυνσης.

$$\left.\begin{array}{l}y=\alpha x+\beta\\ y=-\dfrac{1}{\alpha}x+\beta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}y=\alpha x+\beta\\ 0=\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)x\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}y=\alpha x+\beta\\ (\alpha^2+1)x=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}y=\alpha x+\beta\\ x=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}y=\beta\\ x=0\end{array}\right\}.$$

Άρα το σημείο τομής των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ είναι το $A(0,\beta)$ που ανήκει στον $y'y$.

ii) Οι $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ τέμνουν τον $y'y$ στο $A(0,\beta)$. Για τα σημεία τομής με τον $x'x$ έχουμε:

Για $y=0$ $(\varepsilon_1)\Rightarrow\alpha x+\beta=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Άρα η (ε_1) τέμνει τον $x'x$ στο $B\left(-\dfrac{\beta}{\alpha},0\right)$.

$(\varepsilon_2)\Rightarrow-\dfrac{1}{\alpha}x+\beta=0\Leftrightarrow x=\alpha\beta$.

Άρα η (ε_2) τέμνει τον $x'x$ στο $\Gamma(\alpha\beta,0)$.

Παρατηρούμε ότι οι τετμημένες x_B,x_Γ των Β, Γ αντίστοιχα, είναι ετερόσημες αφού $x_B\cdot x_\Gamma=-\beta^2<0$. Άρα τα σημεία Β, Γ βρίσκονται, πάνω στον $x'x$, εκατέρωθεν του Ο(0,0).

iii) $(AB)=\sqrt{\left(-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2+(0-\beta)^2}=\sqrt{\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}+\beta^2}$

$(A\Gamma)=\sqrt{(\alpha\beta)^2+(0-\beta^2)}=\sqrt{\alpha^2\beta^2+\beta^2}$

$(B\Gamma)=\sqrt{\left(-\dfrac{\beta}{\alpha}-\alpha\beta\right)^2}=\left|-\dfrac{\beta}{\alpha}-\alpha\beta\right|=\left|\beta\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)\right|$

Τότε: $(AB)^2+(A\Gamma)^2=\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}+\beta^2+\alpha^2\beta^2+\beta^2=$

$\beta^2\left(\alpha^2+2+\dfrac{1}{\alpha^2}\right)=\beta^2\left(\alpha^2+2\alpha\cdot\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^2}\right)=$

$\beta^2\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2=\left[\beta\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)\right]^2=(B\Gamma)^2$.

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α (σημείο τομής των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$), σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος. Επομένως οι ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ τέμνονται κάθετα.

β) i) Αφού $(\varepsilon)//(\zeta)$ θα ισχύει:

$2\lambda^2-3\lambda+1=\lambda^2-1\Leftrightarrow\lambda^2-3\lambda+2=0\Leftrightarrow$ $\lambda=1$ ή $\lambda=2$. Για $\lambda=1$ οι ευθείες (ε), (ζ) ταυτίζονται (έχουν την εξίσωση: $y=1$)

Για $\lambda=2$ οι ευθείες $(\varepsilon)//(\zeta)$ (Πράγματι: (ε): $y=3x+4$, (ζ): $y=3x+5$). Άρα $\lambda=2$.

ii) Από την Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι υπάρχει μόνο μία ευθεία που είναι κάθετη στην (ε) στο $A(0,4)$. Σύμφωνα με το α.iii) η ευθεία με εξίσωση $y=-\dfrac{1}{3}x+4$ είναι κάθετη στην (ε) και διέρχεται από το $A(0,4)$.

Άρα η ευθεία (η): $y=-\dfrac{1}{3}x+4$.

iii) Η C_f είναι ''κάτω'' από την ευθεία (ζ) όταν: $x^2-3x-2<3x+5\Leftrightarrow x^2-6x-7<0$. Το τριώνυμο x^2-6x-7 έχει $\Delta=64>0$ και ρίζες τις $x_1=-1$, $x_2=7$ οπότε γίνεται αρνητικό όταν $x\in(-1,7)$.

Θέμα 9: i) Να αποδείξετε ότι: $\alpha+\beta\geq2\sqrt{\alpha\cdot\beta}$, όπου $\alpha,\beta\geq0$ (1).

ii) Να αποδείξετε ότι:
$$\sqrt{x^2-6x+10}+\sqrt{4y^2-8y+20}\geq$$
$$\geq\sqrt{2|x-3|}+\sqrt{16|y-1|}.$$
iii) Να βρεθούν οι τιμές των $x,y\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η παράσταση: $A(x,y)=\sqrt{2|x-3|}+\sqrt{16|y-1|}$, παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

Λύση: i) Αφού τα μέλη της (1) είναι μη αρνητικά με ισοδυναμίες έχουμε:
$$\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\cdot\beta}\Leftrightarrow(\alpha+\beta)^2\geq 4\alpha\beta\Leftrightarrow$$
$$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\geq 4\alpha\beta\Leftrightarrow\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\geq 0\Leftrightarrow$$
$(\alpha-\beta)^2\geq 0$, που ισχύει.

ii) Έχουμε ότι
$$x^2-6x+10=x^2-6x+9+1=(x-3)^2+1.$$
Αν θέσουμε $\alpha=(x-3)^2\geq 0$ και $\beta=1>0$ από i) (1) προκύπτει: $(x-3)^2+1\geq 2\sqrt{(x-3)^2\cdot 1}=2|x-3|$, οπότε: $\sqrt{x^2-6x+10}\geq\sqrt{2|x-3|}$ (2).

Όμοια: $4y^2-8y+20=4(y^2-2y+1)+16=$ $4(y-1)^2+16$. Ανάλογα προκύπτει:
$$4(y-1)^2+16\geq 2\sqrt{4(y-1)^2\cdot 16}=16|y-1|$$
Οπότε $\sqrt{4y^2-8y+20}\geq\sqrt{16|y-1|}$ (3).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε:
$$\sqrt{x^2-6x+10}+\sqrt{4y^2-8y+20}\geq$$
$$\geq\sqrt{2|x-3|}+\sqrt{16|y-1|}.$$

iii) Είναι για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$
$$A(x,y)=\sqrt{2|x-3|}+\sqrt{16|y-1|}\geq 0,$$
αφού $|x-3|\geq 0$ και $|y-1|\geq 0$.

Επομένως η $A(x,y)$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της, όταν $A(x,y)=0$, δηλαδή όταν $\sqrt{2|x-3|}+\sqrt{16|y-1|}=0$, το οποίο συμβαίνει μόνο όταν ισχύουν συγχρόνως $\left.\begin{matrix}x-3=0\\y-1=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x=3\\y=1\end{matrix}\right\}$.

Άρα για $x=3$ και $y=1$, η $A(x,y)$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της που είναι 0.

Θέμα 10: α) **Να υπολογίσετε, ως συνάρτηση του $\nu\in\mathbb{N}^*$, το άθροισμα: $S_\nu=3+3^2+3^3+...+3^\nu$.**

β) **Δίνεται η ακολουθία (β_ν), $\nu\in\mathbb{N}^*$, όπου: $\beta_1=2$, $\beta_2=5$ και $\beta_{\nu+2}=4\cdot\beta_{\nu+1}-3\cdot\beta_\nu$, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$.**

i) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (α_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος, όπου: $\alpha_\nu=\beta_{\nu+1}-\beta_\nu$, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$.

ii) Βρείτε τον γενικό τύπο της (β_ν)

iii) Βρείτε τον πρώτο όρο της (β_ν) που είναι μεγαλύτερος από το 2024.

Λύση: α) Το S_ν είναι το άθροισμα των ν διαδοχικών πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου (γ_ν), $\nu\in\mathbb{N}^*$, με $\gamma_1=3$ και $\lambda=3$. Άρα
$$S_\nu=\gamma_1\cdot\frac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1}=3\cdot\frac{3^\nu-1}{3-1}=\frac{3\cdot(3^\nu-1)}{2},\ \nu\in\mathbb{N}^*.$$

β) i) Για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ έχουμε
$$\beta_{\nu+2}=4\cdot\beta_{\nu+1}-3\cdot\beta_\nu\Leftrightarrow$$
$$\beta_{\nu+2}-\beta_{\nu+1}=3\cdot\beta_{\nu+1}-3\cdot\beta_\nu\Leftrightarrow$$
$$\beta_{\nu+2}-\beta_{\nu+1}=3\cdot(\beta_{\nu+1}-\beta_\nu)\Leftrightarrow\alpha_{\nu+1}=3\cdot\alpha_\nu.$$
Επομένως η (α_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda=3$ και πρώτο όρο $\alpha_1=\beta_2-\beta_1=5-2=3$.

Τότε $\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}=3\cdot 3^{\nu-1}=3^\nu$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.

Άρα: $\beta_{\nu+1}-\beta_\nu=\alpha_\nu\Leftrightarrow\beta_{\nu+1}-\beta_\nu=3^\nu$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ (1).

Εφαρμόζουμε την σχέση (1) για $\nu=1$, $\nu=2$, ...

έχουμε $\beta_2-\beta_1=3$
$$\beta_3-\beta_2=3^2$$
$$..........$$
$$\beta_{\nu+1}-\beta_\nu=3^\nu$$
Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:
$$\beta_{\nu+1}-\beta_1=3+3^2+...+3^\nu\Leftrightarrow$$
$$\beta_{\nu+1}-2=S_n\Leftrightarrow\beta_{\nu+1}=\frac{3}{2}\cdot(3^n-1)+2,\ \nu\in\mathbb{N}^*.$$
Επομένως: $\beta_\nu=\frac{3}{2}\cdot(3^{\nu-1}-1)+2$, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ με $\nu\geq 2$ και $\beta_1=2$.

iii) $\beta_\nu>2024\Leftrightarrow\frac{3}{2}\cdot(3^{\nu-1}-1)+2>2024\Leftrightarrow$
$$\frac{3}{2}\cdot(3^{\nu-1}-1)>2022\Leftrightarrow 3(3^{\nu-1}-1)>4044\Leftrightarrow$$
$$3^\nu-3>4044\Leftrightarrow 3^\nu>4047.$$
Έχουμε $3^6=729$, $3^7=2187$, $3^8=6561>4044$.

Επομένως $\nu_{\varepsilon\lambda\alpha\chi}=8$, άρα ο πρώτος όρος της (β_ν) (που είναι μεγαλύτερος από το 2024 είναι ο β_8.

Τάξη: Α΄

Επαναληπτικές ασκήσεις Γεωμετρίας

*«Υπάρχουν τρεις βασικοί στόχοι στη μελέτη της **αλήθειας**. Ο ένας είναι να την ανακαλύψουμε όταν την ψάχνουμε. Ο άλλος είναι να την αποδείξουμε όταν την κατέχουμε και ο τρίτος είναι να την ξεχωρίσουμε από το **ψέμα** όταν την εξετάζουμε. Η Γεωμετρία καλύπτει με τον καλύτερο τρόπο και τους τρεις **στόχους**, μαθαίνοντας μας την τέχνη για να **ανακαλύπτουμε** άγνωστε αλήθειες»*

B. Pascal, *«De l' spirit geometrique» 1657.*

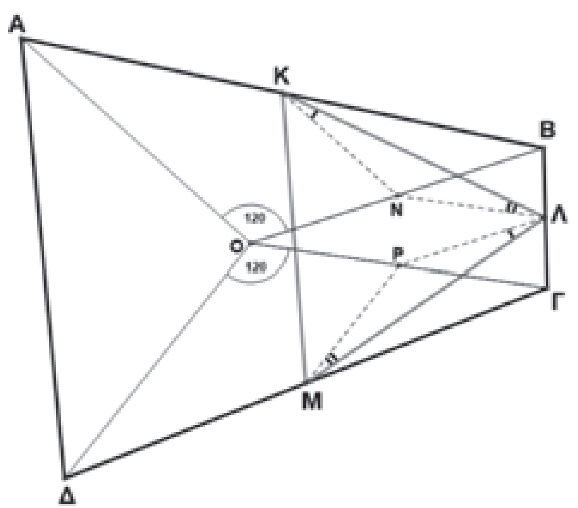
Α΄ ΜΕΡΟΣ:

Σωτήρης Σκοτίδας

Άσκηση 1

Θεωρούμε εσωτερικό σημείο Ο κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε $A\hat{O}B=\Gamma\hat{O}\Delta=120^0$, $OA=OB$, $O\Gamma=O\Delta$. Ας είναι Κ, Λ, Μ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ αντίστοιχα και τέλος Ν, Ρ τα μέσα των ΟΒ, ΟΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. **τα τρίγωνα ΚΝΛ, ΜΛΡ είναι ίσα.**



β. **το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.**

Λύση

α. Αρχικά παρατηρούμε ότι ΚΝ παράλληλη στην ΟΑ (ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου) και $KN=\frac{OA}{2}$. Ανάλογα, ΛΡ παράλληλη στην ΟΒ και $\Lambda P=\frac{OB}{2}$. Όμως $OA=OB$, άρα $KN=\Lambda P$. Εντελώς όμοια, δείχνουμε ότι $N\Lambda=MP$. Πρόσθετα, έχουμε ότι $K\hat{N}B=A\hat{O}B=120^0$ (εντός εκτός και επί τα αυτά), ανάλογα $\Gamma\hat{P}M=\Gamma\hat{O}\Delta=120^0$, ενώ $B\hat{N}\Lambda=B\hat{O}\Gamma=\Lambda\hat{P}\Gamma=\hat{\theta}$. Έτσι, θα είναι $K\hat{N}\Lambda=M\hat{P}\Lambda=120^0+\hat{\theta}$. Ώστε τα τρίγωνα ΚΝΛ, ΜΛΡ ικανοποιούν το κριτήριο ΠΓΠ.

β. Από α) ερώτημα προκύπτει ότι $K\Lambda=M\Lambda$ και $\Lambda\hat{K}N=P\hat{\Lambda}M=\hat{\omega}$, $K\hat{\Lambda}N=P\hat{M}\Lambda=\hat{\varphi}$. Τότε όμως $K\hat{\Lambda}M=\hat{\omega}+\hat{\varphi}+N\hat{\Lambda}P$ ή $\hat{\omega}+\hat{\varphi}+\hat{\theta}=60$, αφού στο τρίγωνο ΚΝΛ ισχύει ότι $\hat{\omega}+\hat{\varphi}+(120^0+\theta)=180^0$. Ισοσκελές τρίγωνο με μία γωνία 60^0 είναι ισόπλευρο.

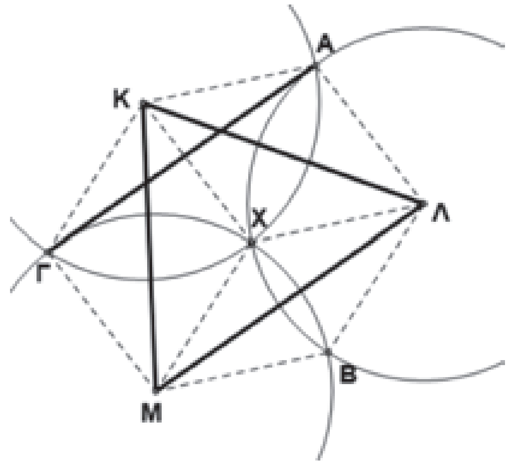
Άσκηση 2

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τρεις ίσους κύκλους με κέντρα Κ, Λ, Μ που τέμνονται ανά δύο στα σημεία Α, Β, Γ, ενώ έχουν κοινό το σημείο Χ. Να αποδείξετε ότι:

α. **το σημείο Χ είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΚΛΜ.**

β. **το τετράπλευρο ΧΛΒΜ είναι ρόμβος.**

γ. **το σημείο Χ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ**



Λύση

α. Αφού $AK=A\Lambda$ και $XK=X\Lambda$ (ακτίνες ίσων κύκλων), η ΑΧ θα είναι μεσοκάθετος της πλευράς ΚΛ του τριγώνου ΚΛΜ. Ανάλογα, η ΒΧ θα είναι μεσοκάθετος της πλευράς ΜΛ. Ώστε το σημείο Χ είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του τριγώνου ΚΛΜ.

β. Αυτό συμβαίνει αφού και οι 4 πλευρές είναι ίσες ως ακτίνες δύο ίσων κύκλων.

γ. Από τους ρόμβους ΑΛΧΚ, ΚΛΜΓ προκύπτει ότι $ΑΛ=ΓΜ$ και ΑΛ παράλληλη στην ΓΜ, κάτι που σημαίνει ότι το ΑΛΜΓ είναι παραλληλόγραμμο, άρα ΜΛ παράλληλη στην ΑΓ. Αλλά η ΧΒ είναι κάθετη στην ΜΛ, οπότε θα είναι κάθετη και στην ΑΓ. Όμοια, η ΑΧ θα είναι κάθετη στην ΒΓ. Έτσι, το Χ είναι σημείο τομής των υψών στο τρίγωνο ΑΒΓ.

Άσκηση 3

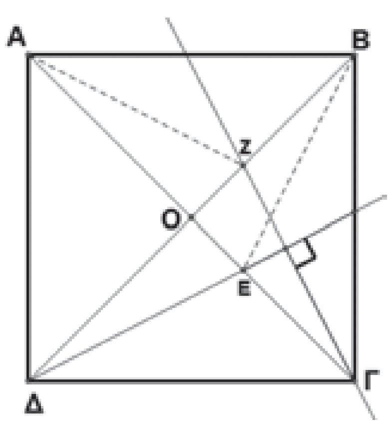
Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και έστω Ε τυχαίο σημείο της ΑΓ. Φέρνουμε από το σημείο Γ κάθετη στην ΔΕ η οποία τέμνει την ΔΒ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι

α. **η ΕΖ είναι κάθετη στην ΑΒ.**

β. **η ΑΖ είναι κάθετη στην ΒΕ.**

Λύση

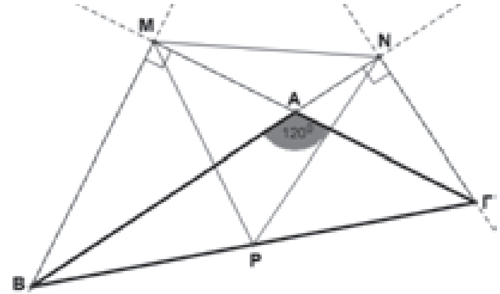
α. Καθώς οι διαγώνιοι τετραγώνου τέμνονται κάθετα, έχουμε ότι στο τρίγωνο ΔΓΖ το σημείο Ε θα είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, άρα η ΖΕ θα είναι κάθετη στην ΔΓ. Όμως η ΔΓ είναι παράλληλη στην ΑΒ, άρα η ΕΖ θα είναι κάθετη και στην ΑΒ.



β. Το σημείο Ζ θα είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΕ αφού η ΒΟ είναι κάθετη στην ΑΓ και η ΕΖ είναι κάθετη στην ΑΒ. Έτσι, αναγκαστικά η ΑΖ είναι κάθετη στην ΒΕ.

Άσκηση 4

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $A\hat{B}Γ=120^0$. Ας είναι ΒΜ, ΓΝ οι αποστάσεις των κορυφών Β, Γ από τις ευθείες ΓΑ, ΒΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΛΡ είναι ισόπλευρο.



Λύση

Γνωρίζουμε ότι $MP=\dfrac{BΓ}{2}=BP$ και ανάλογα $NP=\dfrac{BΓ}{2}=ΓP$, οπότε το τρίγωνο ΡΜΝ είναι ισοσκελές. Αρκεί να αποδείξουμε ότι κάποια γωνία του είναι 60^0. Παρατηρούμε ότι $M\hat{P}B=180^0-2M\hat{B}P=180^0-2(30^0+A\hat{B}Γ)$, άρα $M\hat{P}B=180°-2A\hat{B}Γ$. Ανάλογα προκύπτει ότι $N\hat{P}B=120^0-2A\hat{Γ}B$.

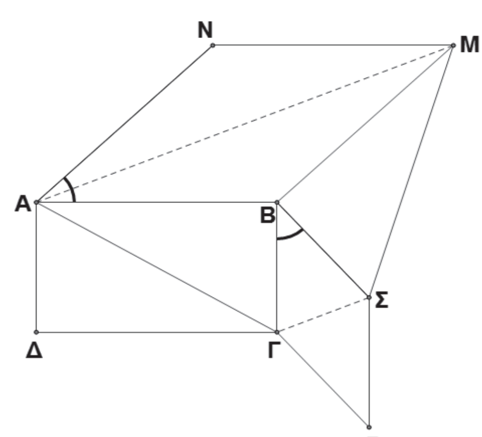
Οπότε $M\hat{P}B+N\hat{P}B=240-2(\hat{B}+\hat{Γ})=120^0$, άρα $M\hat{P}N=180^0-120^0=60^0$.

Άσκηση 5

Θεωρούμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και εξωτερικά αυτού τους ρόμβους ΑΒΜΝ, ΒΓΡΣ έτσι όμως ώστε να είναι $B\hat{A}N=Γ\hat{B}Σ$. Αποδείξτε ότι:

α. $M\hat{B}Σ=90°$ β. $MΣ=BΔ$

γ. **το τετράπλευρο ΑΓΣΜείναι ισοσκελές τραπέζιο.**



Λύση

α. Ας είναι $B\hat{A}N = \Gamma\hat{B}\Sigma = \hat{\omega}$. Αφού οι ΒΜ και ΑΝ είναι παράλληλες, η γωνία $A\hat{B}M$ θα είναι $180^0 - \hat{\omega}$. Ώστε η γωνία $M\hat{B}\Sigma$ θα ισούται με $360^0 - (180^0 - \hat{\omega}) - 90^0 - \hat{\omega} = 90^0$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΜΒΣ είναι ίσα, αφού έχουν $B\Gamma = B\Sigma$ (ΒΣΡΓ ρόμβος) και $BM = BA$ (ΑΒΜΝ ρόμβος), άρα ικανοποιούν το κριτήριο ΠΓΠ. Ως συνέπεια αυτού έχουμε ότι $M\Sigma = A\Gamma$. Αλλά οι διαγώνιες ορθογωνίου είναι ίσες, οπότε $B\Delta = A\Gamma = M\Sigma$.

γ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι τραπέζιο, αφού ήδη δείξαμε ότι $M\Sigma = A\Gamma$. Άρα πρέπει να αποδείξουμε ότι οι ΑΜ και ΣΓ είναι παράλληλες. Αρκεί να δείξουμε ότι οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες $M\hat{A}\Gamma, \Sigma\hat{\Gamma}A$ είναι παραπληρωματικές. Καθώς οι διαγώνιοι ρόμβου διχοτομούν τις απέναντι γωνίες, έχουμε ότι

$$M\hat{A}\Gamma = \frac{\hat{\omega}}{2} + B\hat{A}\Gamma,$$

$$\Sigma\hat{\Gamma}A = \Sigma\hat{\Gamma}B + A\hat{\Gamma}B = \frac{180^0 - \hat{\omega}}{2} + A\hat{\Gamma}B.$$

Έτσι, $M\hat{A}\Gamma + \Sigma\hat{\Gamma}A = 180°$.

Άσκηση 6

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΓ παράλληλη στην ΒΔ, ώστε $AB = 2 \cdot B\Delta$, $\hat{A} = \hat{B} = 90^0$ και $A\hat{B}\Gamma = 45^0$. Ας είναι Μ το μέσο της ΑΓ και Κ το σημείο τομής των ΒΓ, ΔΜ. Από το σημείο Δ φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΚ η οποία τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ε. Οι ευθείες ΜΕ, ΑΚ τέμνονται στο σημείο Ρ, ενώ το σημείο Σ είναι το μέσο του ΓΔ. Αποδείξτε ότι:

α. το ΒΜΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

β. το τετράπλευρο ΑΒΔΜ είναι ορθογώνιο.

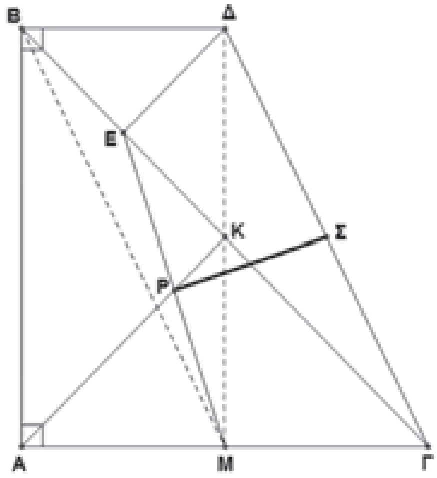
γ. το Ρ είναι το μέσο του τμήματος ΜΕ

δ. οι ευθείες ΣΡ και ΜΕ είναι κάθετες.

Λύση

α. Αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στην κορυφή Α και $A\hat{B}\Gamma = 45^0$, άρα το τρίγωνο είναι και ισοσκελές, οπότε $A\Gamma = AB$ ήτοι $2M\Gamma = 2B\Delta$, άρα $M\Gamma = B\Delta$. Αλλά οι ΜΓ, ΒΔ είναι και παράλληλες. Ώστε δύο απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες, άρα ΒΜΓΔ παραλληλόγραμμο.

β. Αφού η $AM = M\Gamma$ είναι παράλληλη και ίση με την ΒΔ, το ΑΒΔΜ θα είναι παραλληλόγραμμο, το οποίο όμως έχει και μία γωνία ορθή (π.χ. την $\hat{A}$), άρα θα είναι ορθογώνιο.



γ. Από α) ερώτημα το σημείο Κ θα είναι κοινό μέσο των ΒΓ, ΔΜ. Αφού η ΔΕ είναι παράλληλη στην ΑΚ, στο τρίγωνο ΜΕΔ από το μέσο Κ της ΜΔ φέραμε παράλληλη προς την ΔΕ, άρα αυτή θα διέλθει από το μέσο της ΜΕ. Ώστε το Ρ είναι μέσο της ΜΕ.

δ. Αφού $AB = A\Gamma$, άρα η διάμεσος ΑΚ θα είναι κάθετη στην ΒΓ, οπότε και η ΔΕ θα είναι κάθετη στην ΒΓ. Έτσι, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΓ, η διάμεσος ΑΣ θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $\Sigma E = \frac{\Gamma\Delta}{2}$. Αλλά και $\Delta\hat{M}\Gamma = 90^0$ (από α) ερώτημα), άρα και $M\Sigma = \frac{\Gamma\Delta}{2}$. Τελικά, στο ισοσκελές τρίγωνο ΣΕΜ, η διάμεσος ΣΡ θα είναι και ύψος, άρα μεσοκάθετος του ΜΕ.

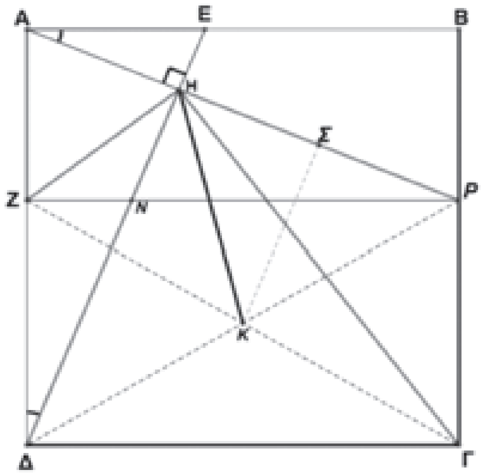
Άσκηση 7

Έστω ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο με ΑΒ παράλληλη στην ΓΔ. Οι διαγώνιες ΑΓ, ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ο, ώστε $A\hat{O}\Delta = 120^0$. Αν Μ, Ν, Ρ είναι τα μέσα των τμημάτων ΟΑ, ΟΔ, ΒΓ αντίστοιχα, αποδείξτε ότι:

α. Τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΒΓ είναι ίσα.

β. Τα τρίγωνα ΑΟΒ, ΓΟΔ είναι ισόπλευρα.

γ. $ΒΓ=2ΜΝ$.

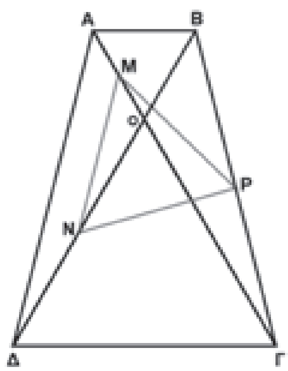


δ. **Το τρίγωνο ΜΝΡ είναι ισόπλευρο.**

Λύση

α. Καθώς οι μη παράλληλες πλευρές ισοσκελούς τραπεζίου είναι ίσες, όπως άλλωστε και οι διαγώνιες του, είναι φανερό ότι τα δύο τρίγωνα ικανοποιούν το κριτήριο ΠΠΠ (ΑΒ κοινή, $ΒΔ=ΑΓ$, $ΑΔ=ΒΓ$).

β. Μια άμεση συνέπεια της ισότητας των τριγώνων ΑΒΔ, ΑΒΓ είναι ότι $Α\hat{Β}Ο=Β\hat{Α}Ο$. Αλλά $Α\hat{Ο}Β=60^0$, άρα ΑΒΟ ισόπλευρο. Επίσης: $Γ\hat{Δ}Ο=Α\hat{Β}Ο=60^0$ ως εντός εναλλάξ και όμοια $Δ\hat{Γ}Ο=Β\hat{Α}Ο=60^0$.



γ. Στο τρίγωνο ΑΟΔ το τμήμα ΜΝ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών, άρα $ΜΝ=\frac{ΑΔ}{2}=\frac{ΒΓ}{2}$, άρα $ΒΓ=2ΜΝ$.

δ. Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΟ, η διάμεσος ΒΜ θα είναι και ύψος, άρα $Β\hat{Μ}Γ=90^0$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΜΓ η ΜΡ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $ΜΡ=\frac{ΒΓ}{2}=ΜΝ$. Ανάλογα, στο ισόπλευρο τρίγωνο ΓΟΔ, η διάμεσος ΓΝ θα είναι και ύψος, άρα $Γ\hat{Ν}Β=90^0$. Έτσι, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΝΒ η ΝΡ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $ΝΡ=\frac{ΒΓ}{2}$. Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει ΜΡ=ΝΡ=ΜΝ.

Άσκηση 8

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις πλευρές ΑΒ, ΑΔ θεωρούμε δύο σημεία Ε και Ζ ώστε $ΑΕ=ΑΖ$. Φέρνουμε από το σημείο Α μια ευθεία κάθετη στην ΕΔ η οποία τέμνει την ΕΔ στο σημείο Η και την ΒΓ στο σημείο Ρ. Οι ευθείες ΔΡ, ΓΖ τέμνονται στο σημείο Κ, ενώ οι ευθείες ΖΡ, ΔΗ τέμνονται στο σημείο Ν. Τέλος το Σ είναι το μέσο του ΗΡ.

α. **Αποδείξτε ότι $Α\hat{Δ}Ε=Β\hat{Α}Ρ$ (χωρίς σύγκριση τριγώνων) και μετά ότι τα τρίγωνα ΑΒΡ, ΑΔΕ είναι ίσα.**

β. **Αποδείξτε ότι τα τετράπλευρα ΑΒΡΖ και ΡΖΔΓ είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα.**

γ. **Αποδείξτε ότι $Γ\hat{Η}Ζ=90^0$.**

δ. **Αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΝ θα είναι κάθετη στην ΔΡ.**

ε. **Αποδείξετε ότι η ευθεία ΚΣ είναι κάθετη στην ΑΡ.**

Λύση

α. Οι γωνίες είναι οξείες με τις πλευρές κάθετες μία προς μία, άρα ίσες. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΡ, ΑΔΕ έχουν $ΑΒ=ΑΔ$ (πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ) και $Α\hat{Δ}Ε=Β\hat{Α}Ρ$, οπότε ικανοποιούν το κριτήριο ΓΠΓ.

β. Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων, προκύπτει ότι $ΒΡ=ΑΕ=ΑΖ$, άρα το ΑΖΡΒ είναι παραλληλόγραμμο, καθώς δύο απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες. Αλλά $\hat{Α}=90^0$, οπότε είναι ορθογώνιο. Ακόμα $ΖΔ=ΑΔ-ΑΖ=ΒΓ-ΒΡ=ΡΓ$ και οι πλευρές ΡΓ, ΖΔ του τετραπλεύρου ΡΓΖΔ είναι παράλληλες, ενώ $\hat{Δ}=90^0$, άρα και ΡΖΔΓ ορθογώνιο.

γ. Καθώς οι διαγώνιες ορθογωνίου είναι ίσες και έχουν κοινό μέσο (το Κ), έτσι θα έχουμε $ΓΖ=ΔΡ$. Όμως στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΗΡ, η διάμεσος ΗΚ θα ισούται με $\frac{ΔΡ}{2}=\frac{ΓΖ}{2}$. Επομένως στο τρίγωνο ΖΗΓ, η διάμεσος ΗΚ ισούται με το μισό της πλευράς ΓΖ στην οποία αντιστοιχεί, άρα $Γ\hat{Η}Ζ=90^0$.

δ. Στο τρίγωνο ΑΔΡ έχουμε ότι ΔΗ κάθετη στην ΑΡ και ΡΖ κάθετη στην ΑΔ, κάτι που σημαίνει ότι το σημείο Ν θα είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΔΡ, άρα το τρίτο ύψος θα είναι η προέκταση του ΑΝ.

ε. Στο τρίγωνο ΡΗΔ, το τμήμα ΚΣ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών, άρα ΚΣ παράλληλη στην ΗΔ, η οποία όμως είναι κάθετη στην ΗΡ, άρα ΚΣ κάθετη στην ΗΡ.

Βιβλιογραφία: Gazeta Matematica (διάφορα τεύχη), Γεωμετρία για Διαγωνισμούς (Στεργίου Χαρ. τόμος 1), 2000 Problems on Plane Geometry (Εκδ. Mir).

Β΄ ΜΕΡΟΣ:

Ηλίας Αργυρόπουλος-Ευτυχία Αργυροπούλου

Άσκηση 9

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$ και σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Στην προέκταση της πλευράς ΑΓ παίρνουμε σημείο Ε, ώστε $\Gamma E = B\Delta$ και από το Δ φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΓ, που τέμνει τη πλευρά ΒΓ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

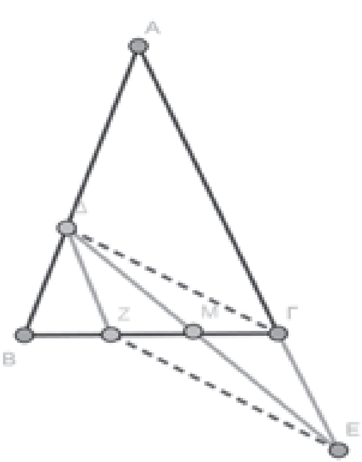
α. $\Delta B = \Delta Z$.

β. $\Gamma E = \Delta Z$.

γ. το ΔΖΕΓ είναι παραλληλόγραμμο

δ. η ΒΓ διχοτομεί το ευθύγραμμο τμήμα ΔΓ.

Λύση



α. Επειδή η ΔΖ είναι παράλληλη προς την ΑΓ, συμπεραίνουμε ότι $\Gamma\hat{Z}E = B\hat{\Gamma}\Delta$. Επίσης, αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma$ θα είναι $\hat{B}=\hat{\Gamma}$. Από τα παραπάνω έπεται ότι $\hat{B} = \Gamma\hat{Z}E$, από την οποία προκύπτει ότι το τρίγωνο ΔΒΖ είναι ισοσκελές με $\Delta B = \Delta Z$.

β. Από την υπόθεση έχουμε ότι $\Delta B = \Gamma E$. Όμως στο ερώτημα (α) αποδείξαμε ότι $\Delta B = \Delta Z$. Από τις δύο αυτές ισότητες συμπεραίνουμε ότι $\Delta Z = \Gamma E$.

γ. Από το ερώτημα ii. Και

το ό,τι από υπόθεση είναι $\Delta Z \parallel A\Gamma$ έπεται ότι $\Delta Z \parallel \Gamma E$, από την οποία προκύπτει ότι το ΔΖΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.

δ. Επειδή το ΔΖΕΓ είναι παραλληλόγραμμο, συμπεραίνουμε ότι οι διαγώνιές του ΔΕ και ΖΓ διχοτομούνται και άρα η ΒΓ διχοτομεί το ευθύγραμμο τμήμα ΔΓ.

Άσκηση 10

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Φέρουμε τα ύψη του ΑΔ και ΓΕ που τέμνονται στο Η. Φέρουμε επίσης από το O, το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα ΟΜ προς τη ΒΓ και συμβολίζουμε με Ζ το αντιδιαμετρικό της κορυφής Β. Να αποδείξετε ότι:

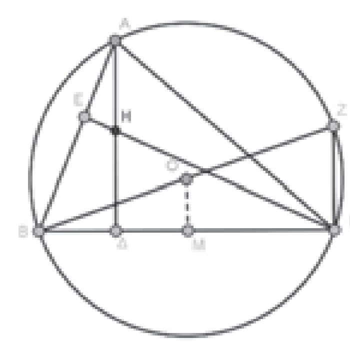
α. $B\hat{\Gamma}Z = 90^\circ$ **και ότι η ΑΗ είναι παράλληλη προς την ΓΖ**

β. **Τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΗ και ΑΖ είναι παράλληλα και το ΑΗΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.**

γ. $Z\Gamma = 2\cdot OM$

δ. $AH = 2\cdot OM$.

Λύση



α. Η ΒΖ είναι διάμετρος άρα $B\hat{\Gamma}Z = 90^\circ$ οπότε $Z\Gamma \perp B\Gamma$ (1). Επίσης, ΑΗ ύψος που αντιστοιχεί στη ΒΓ, άρα $AH \perp B\Gamma$ (2). Από τις (1) και (2) έπεται $AH \parallel \Gamma Z$. (3)

β. Όμοια από τις $B\hat{A}Z = 90^\circ$ και $\Gamma H \perp AB$ προκύπτει ότι $\Gamma H \parallel AZ$ (4). Από (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο ΑΗΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Στο τρίγωνο ΒΓΖ είναι $ΟΜ \perp ΒΓ$ και $ΖΓ \perp ΒΓ$, οπότε $ΟΜ \parallel ΖΓ$ και αφού Ο μέσο της ΒΖ θα είναι Μ μέσο της ΒΓ και επομένως $ΖΓ = 2ΟΜ$ (5).

δ. Το ΑΗΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $ΑΗ = ΖΓ$,οπότε από (5) έχουμε $ΑΗ = 2ΟΜ$.

Άσκηση 11

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Γράφουμε τους κύκλους με διαμέτρους ΒΓ και ΓΔ που τέμνονται στα σημεία Γ και Μ και τέμνουν τη διαγώνιο ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Τότε:

α. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΕΑΒ και ΖΓΔ.

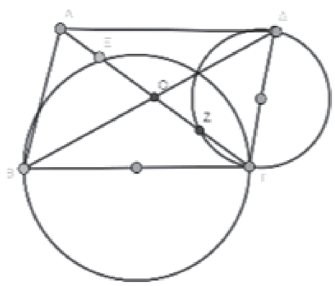
β. Να αποδείξετε ότι $ΑΕ = ΖΓ$.

γ. Τα ΑΓ και ΕΖ έχουν κοινό μέσο.

δ. Η διαγώνιος ΒΔ διέρχεται από το Μ.

Λύση

α. Είναι $B\hat{E}Γ = 90°$, γιατί η ΒΓ είναι διάμετρος του κύκλου ($κ_1$) και η $B\hat{E}Γ$ εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Όμοια είναι $Δ\hat{Z}Γ = 90°$. Επομένως τα τρίγωνα ΕΑΒ και ΖΓΔ είναι ορθογώνια και επί πλέον έχουν $ΑΒ = ΓΔ$ (ΑΒΓΔ παρ/μο) και $B\hat{A}E = A\hat{Γ}Δ$ ($AB \parallel ΓΔ$). Άρα τα τρίγωνα ΕΑΒ και ΖΓΔ είναι ίσα.



β. Από την ισότητα των τριγώνων ΕΑΒ και ΖΓΔ έπεται ότι $ΑΕ = ΖΓ$.

γ. Έστω Ο το μέσο της διαγωνίου ΑΓ. Τότε $ΑΟ = ΟΓ$ (1) και επομένως $ΕΟ = ΟΖ$.

δ. Αρκεί να δείξουμε ότι τα σημεία Β, Μ και Δ Είναι συνευθειακά. Φέρουμε τις ΒΜ και ΜΔ. Τότε $B\hat{M}Γ + Γ\hat{M}Δ = 180°$ (αφού κάθε μία από τις γωνίες αυτές είναι 90^o ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο), άρα τα Β, Μ, Δ είναι συνευθειακά.

Άσκηση 12

Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 60°$, φέρουμε τις διχοτόμους ΒΔ και ΓΕ, των γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{Γ}$ αντίστοιχα που τέμνονται στο Ι και πάνω στη ΒΓ παίρνουμε σημείο Ζ, ώστε $ΒΖ = ΒΕ$.

Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα ΒΕΙ και ΒΖΙ είναι ίσα.

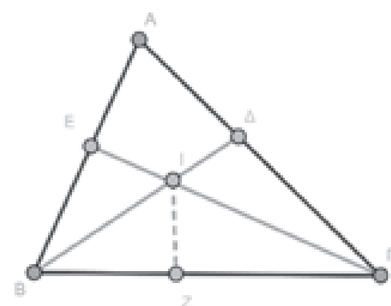
β. Οι γωνίες $B\hat{E}I$ και $B\hat{Z}I$ είναι ίσες και έχουν μέτρο $60° + \frac{\hat{Γ}}{2}$.

γ. $B\hat{Δ}Γ = Γ\hat{Z}I = 60° + \frac{\hat{B}}{2}$ και τα τρίγωνα ΙΖΓ και ΙΔΓ είναι ίσα.

δ. $ΖΓ = ΔΓ$ και $ΒΓ = ΒΕ + ΔΓ$.

Λύση

α. Τα τρίγωνα έχουν: $BE = BZ$, $BI = BI$, $E\hat{B}I = Z\hat{B}I$, οπότε (ΠΓΠ) είναι ίσα.



β. Από (α) προκύπτει $B\hat{E}I = B\hat{Z}I$. Η γωνία $B\hat{E}I$, ως εξωτερική του τριγώνου ΑΕΓ είναι ίση με $60° + E\hat{Γ}B = 60° + \frac{\hat{Γ}}{2}$.

γ. Επειδή η γωνία $B\hat{Δ}Γ$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΔ ισχύει $B\hat{Δ}Γ = 60° + \frac{\hat{B}}{2}$. Για τη $I\hat{Z}Γ$ έχουμε:

$$I\hat{Z}Γ = 180° - B\hat{Z}I = 120° - \frac{\hat{Γ}}{2} = 60° + \frac{\hat{B}}{2}.$$

Τα τρίγωνα ΙΖΓ και ΙΔΓ σύμφωνα με το κριτήριο ΓΠΓ είναι ίσα αφού έχουν $ΙΓ = ΙΓ$, $Δ\hat{Γ}I = Z\hat{Γ}I$ και $Γ\hat{Z}I = Γ\hat{Δ}I$.

δ. Από την ισότητα των τριγώνων ΙΖΓ και ΙΔΓ έπεται ότι $ΖΓ = ΔΓ$. Από την προφανή ισότητα $ΒΓ = ΒΖ + ΖΓ$ προκύπτει και η ζητούμενη ισότητα.

Τάξη: Β΄

Επαναληπτικές ασκήσεις Άλγεβρας

Στεφανής Παναγιώτης

*Πλησιάζοντας το τέλος της σχολικής χρονιάς σας παρουσιάζουμε **μια συλλογή** από επαναληπτικές ασκήσεις, σε όλη την ύλη της Άλγεβρας της Β΄ Λυκείου για την επανάληψή σας, πριν τις προαγωγικές εξετάσεις.*

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4x}{4x^2+\ln k}$, $k>0$

Α) Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου κ για τις οποίες το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το R.

Στα επόμενα ερωτήματα θεωρείστε $k=e$

Β) i) Να αποδείξετε ότι η f έχει (ολικό) μέγιστο για $x=\dfrac{1}{2}$

ii) Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή της f είναι το 1

Γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή. Στη συνέχεια με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra ή με οποιοδήποτε άλλο λογισμικό να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να διαπιστώσετε ότι έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

Δ) Να λυθεί η εξίσωση :

$$|f(x)-1|+2024=-2024\cdot f(-x) \quad (1)$$

Λύση

Α) Για να είναι το πεδίο ορισμού το R πρέπει και αρκεί $4x^2+\ln k\neq 0$ για κάθε $x\in R$. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν η διακρίνουσα της εξίσωσης $4x^2+\ln k=0$ είναι αρνητική. Όμως $\Delta<0\Leftrightarrow -16\ln k<0\Leftrightarrow \ln k>0\Leftrightarrow k>1$

Β) i) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει $f(x)\leq f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, αρκεί $\dfrac{4x}{4x^2+1}\leq 1$, αρκεί $4x^2+1\geq 4x$, αρκεί $(2x-1)^2\geq 0$, που ισχύει!

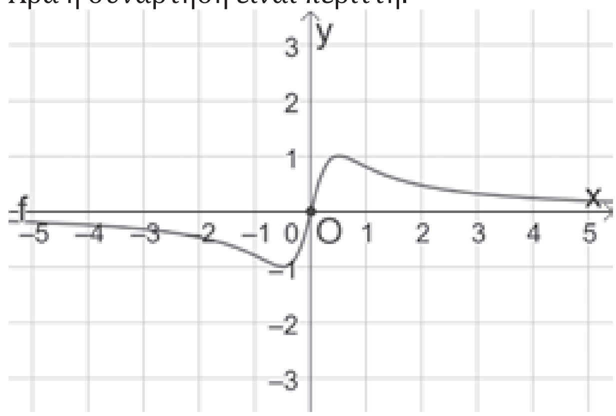
ii) Για $x=\dfrac{1}{2}$ είναι $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$.

Άρα η μέγιστη τιμή της f είναι 1.

Γ) Για κάθε $x\in R$ ισχύει:

- $-x\in R$ και
- $f(-x)=\dfrac{4(-x)}{4(-x)^2+1}=\dfrac{-4x}{4x^2+1}=-f(x)$

Άρα η συνάρτηση είναι περιττή.



Διαπιστώνουμε πράγματι ότι η γραφική παράσταση της f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Δ) Το σύνολο του ορισμού της εξίσωσης είναι το R. Για κάθε $x\in R$ είναι: $f(x)\leq 1\Rightarrow f(x)-1\leq 0$. Οπότε,

$$(1)\Leftrightarrow (1-f(x))+2024=2024\cdot f(x)\Leftrightarrow$$

$$2025=2025\cdot f(x)\Leftrightarrow f(x)=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

Άσκηση 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2-3x+4$

Α) Να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$

Β) Αν ρ ρίζα της εξίσωσης $P(x)=0$ να αποδείξετε ότι :

$$3\log|\rho|+3\log|\rho^2-2\rho-3|=\log 64$$

Γ) Να λυθεί η ανίσωση $P(x)>0$

Δ) Αν για τους πραγματικούς x_1,x_2 ισχύει:

$$0<x_1<1<x_2<\frac{1+\sqrt{17}}{2}$$ **τότε να αποδείξετε ότι:**

$$\frac{e^{x_1+3}}{P(x_1)\cdot P(x_2)}>\frac{e^{x_2+3}}{P(x_1)\cdot P(x_2)}$$

Λύση

Α) Η εξίσωση ορίζεται στο R και σύμφωνα με το θεώρημα των ακέραιων ριζών οι πιθανές ακέραιες ρίζες της είναι οι διαιρέτες του 4, δηλαδή οι ±1, ±2, ±4.Βρίσκουμε ότι $P(1)=0$, επομένως το $x-1$ είναι παράγοντας του $P(x)$. Με την εκτέλεση της διαίρεσης βρίσκουμε $P(x)=(x-1)(x^2-x-4)$ και η εξίσωση γίνεται $(x-1)(x^2-x-4)=0$ και έχει ρίζες: $x=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$, $x=1$, $x=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$

Β) Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$3\log|\rho|+3\log|\rho^2-2\rho-3|=\log 64, \text{ αρκεί}$$

$$\log|\rho|+\log|\rho^2-2\rho-3|=\frac{1}{3}\log 64, \text{ αρκεί}$$

$$\log\left(|\rho|\cdot|\rho^2-2\rho-3|\right)=\log\sqrt[3]{64}, \text{ αρκεί}$$

$$\log\left(|\rho^3-2\rho^2-3\rho|\right)=\log 4, \text{ αρκεί}$$

$$|\rho^3-2\rho^2-3\rho|=4$$

Η σχέση αυτή ισχύει γιατί το ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $P(x)=0$ συνεπώς

$$\rho^3-2\rho^2-3\rho+4=0\Rightarrow$$

$$\rho^3-2\rho^2-3\rho=-4\Rightarrow$$

$$|\rho^3-2\rho^2-3\rho|=|-4|=4$$

Γ) Σχηματίζουμε τον πίνακα πρόσημου του $P(x)$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{17}}{2}$		1		$\frac{1+\sqrt{17}}{2}$		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-x-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

από τον οποίο βρίσκουμε ότι λύσεις της ανίσωσης $P(x)>0$ είναι τα $x\in\mathbb{R}$ έτσι, ώστε

$$\frac{1-\sqrt{17}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{17}}{2} \text{ ή } x>\frac{1+\sqrt{17}}{2}$$

Δ) Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\frac{e^{x_1+3}}{P(x_1)\cdot P(x_2)}>\frac{e^{x_2+3}}{P(x_1)\cdot P(x_2)}, \text{ αρκεί}$$

$$\frac{e^{x_1+3}}{P(x_1)\cdot P(x_2)}-\frac{e^{x_2+3}}{P(x_1)\cdot P(x_2)}>0, \text{ αρκεί}$$

$$\frac{e^{x_1+3}-e^{x_2+3}}{P(x_1)\cdot P(x_2)}>0, \text{ αρκεί}$$

$$\left(e^{x_1+3}-e^{x_2+3}\right)P(x_1)\cdot P(x_2)>0$$

που ισχύει γιατί

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1+3<x_2+3\overset{e^x\uparrow}{\Rightarrow} e^{x_1+3}<e^{x_2+3}\Rightarrow$$

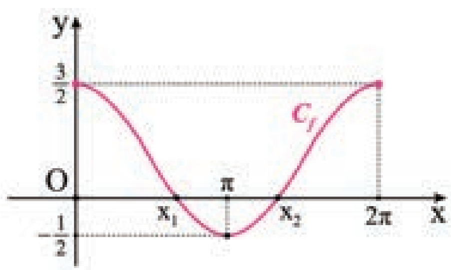
$$e^{x_1+3}-e^{x_2+3}<0$$

Επίσης από τον πίνακα προσήμου του $P(x)$ προκύπτει ότι για $0<x_1<1<x_2<\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ ισχύει: $P(x_1)>0$ και $P(x_2)<0$

Άρα $\left(e^{x_1+3}-e^{x_2+3}\right)P(x_1)\cdot P(x_2)>0$

Άσκηση 3

Δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού $A=[0,2\pi]$.



Α) Να βρεθεί το μέγιστο-ελάχιστο της f, καθώς επίσης και οι θέσεις στις οποίες αυτές παρουσιάζονται.

Β) Γνωρίζουμε τώρα ότι ο τύπος της f είναι

$$f(x)=\text{συν}\omega x+c, \quad \omega, c \text{ πραγματικοί..}$$

i) Να αποδείξετε ότι $\omega=1$ και $c=\frac{1}{2}$

Για $\omega=1$ και $c=\frac{1}{2}$

ii) Να βρείτε τις τετμημένες x_1, x_2 των σημείων στα οποία η C_f τέμνει τον άξονα x'x.

iii) Να αποδειχθεί ότι $f(2\pi-x)=f(x)$

iv) Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{\text{ημ}x}{f(x)+\frac{1}{2}}+\frac{f(2\pi-x)+\frac{1}{2}}{\text{ημ}x}=\frac{2}{\text{ημ}x}$$

v) Να λυθεί στο διάστημα $[0,2\pi]$ η εξίσωση

$$\frac{\text{ημ}x}{f(x)+\frac{1}{2}}=4-\frac{f(2\pi-x)+\frac{1}{2}}{\text{ημ}x}$$

Λύση

Α) Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης βρίσκουμε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο το $\frac{3}{2}$ στις θέσεις $x=0$, $x=2\pi$ και ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο το $-\frac{1}{2}$ στην θέση $x=\pi$

Β) i) Από την C_f προκύπτει ότι $T=2\pi$, άρα $\frac{2\pi}{\omega}=2\pi \Leftrightarrow \omega=1$ και

$f(0)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow συν0+c=\frac{3}{2} \Leftrightarrow c=\frac{1}{2}$

ii) Τα x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$

Έχουμε:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow συνx+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow συνx=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$συνx=συν\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x=κ\cdot 2\pi \pm \frac{2\pi}{3},\ κ\in Z$$

Όμως $x\in[0,2\pi]$ οπότε $0\le κ\cdot 2\pi \pm \frac{2\pi}{3} \le 2\pi \Rightarrow ...$

$x_1=\frac{2\pi}{3}, x_2=\frac{4\pi}{3}$

iii) Είναι:

$$f(2\pi-x)=συν(2\pi-x)+\frac{1}{2}=συν(-x)+\frac{1}{2}=$$

$$συνx+\frac{1}{2}=f(x)$$

iv) Το πρώτος μέλος της ζητούμενης ισότητας με την χρήση του προηγούμενου ερωτήματος γράφεται:

$$\frac{ημx}{συνx+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}+\frac{συνx+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{ημx}=$$

$$\frac{ημx}{συνx+1}+\frac{συνx+1}{ημx}=\frac{ημ^2x+(συνx+1)^2}{ημx\cdot(συνx+1)}=$$

$$\frac{2+2συνx}{ημx\cdot(συνx+1)}=\frac{2(1+συνx)}{ημx\cdot(συνx+1)}=\frac{2}{ημx}$$

v) Η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{ημx}{συνx+1}+\frac{συνx+1}{ημx}=4 \quad (1)$$

και ορίζεται για τα x εκείνα για τα οποία $ημx\neq 0$ και $συνx\neq -1$. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2}{ημx}=4 \Leftrightarrow ημx=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$x=κ\cdot 2\pi+\frac{\pi}{6} \text{ ή } x=κ\cdot 2\pi+\frac{5\pi}{6},\ κ\in Z.$$

Όμως $x\in[0,2\pi]$ οπότε $0\le κ\cdot 2\pi+\frac{\pi}{6}\le 2\pi \Rightarrow ...$

$κ=0$, δηλαδή $x_1=\frac{\pi}{6}$. Όμοια

$0\le κ\cdot 2\pi+\frac{5\pi}{6}\le 2\pi \Rightarrow ...$ $κ=0$, δηλαδή $x_2=\frac{5\pi}{6}$.

Άσκηση 4 (Χρήστος Π. Τσιφάκης)

Να λυθεί στο R η εξίσωση:

$$x^2-3x-3=4\sqrt{x}$$

Λύση

Πρέπει και αρκεί:

$x\ge 0$ και $x^2-3x-3\ge 0$ δηλαδή $x\ge \frac{3+\sqrt{21}}{2}$

1ος τρόπος

Έχουμε ότι:

$$x^2-3x-3=4\sqrt{x} \Leftrightarrow$$

$$x^2-2x-x+1-4=4\sqrt{x} \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2=x+4\sqrt{x}+4 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2=\left(\sqrt{x}+2\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$x-1=\sqrt{x}+2 \ \ (E1) \text{ ή } x-1=-\sqrt{x}-2 \ \ (E2).$$

Από (Ε1) έχουμε:

$$x-\sqrt{x}-3=0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \left(\sqrt{x}\right)^2-\sqrt{x}-3=0 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x}=\frac{1+\sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow x=\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^2=\frac{7+\sqrt{13}}{2},$$

δεκτή.

Από (Ε2) έχουμε:

$$x+\sqrt{x}+1=0,\ \Delta=-3<0, \text{ αδύνατη.}$$

2ος τρόπος

Θέτουμε $\sqrt{x}=t>0$, οπότε έχουμε:

$$t^4-3t^2-4t-3=0 \Leftrightarrow$$

$$t^4-2t^2-t^2-4t-4+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(t^4-2t^2+1\right)-\left(t^2+4t+4\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(t^2-1\right)^2-(t+2)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(t^2-t-3\right)\left(t^2+t+1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$t^2+t+1=0, \text{ αδύνατη ή}$$

$$t^2-t-3=0 \Leftrightarrow t=\frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

Άρα $x=t^2 \Leftrightarrow x=\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$, δεκτή.

3ος τρόπος

Υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο έχουμε:

$$x^2-3x-3=4\sqrt{x} \Leftrightarrow$$
$$x^4+9x^2+9-6x^3-6x^2+18x=16x \Leftrightarrow$$
$$x^4-6x^3+3x^2+2x+9=0.$$

Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner και βλέπουμε ότι η εξίσωση δεν έχει ακέραια ρίζα.

Έτσι δοκιμάζουμε την μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Δηλαδή αφού το αρχικό πολυώνυμο είναι

$$P(x)=x^4-6x^3+3x^2+2x+9$$

4ου βαθμού, αναζητούμε δύο πολυώνυμα 2ου βαθμού που το γινόμενό τους να ισούται με το $P(x)$. Αυτά είναι:

$$\left(x^2+\alpha\cdot x+1\right)\cdot\left(x^2+\beta\cdot x+9\right) \text{ ή}$$
$$\left(x^2+\alpha\cdot x-1\right)\cdot\left(x^2+\beta\cdot x-9\right) \text{ ή}$$
$$\left(x^2+\alpha\cdot x+3\right)\cdot\left(x^2+\beta\cdot x+3\right) \text{ ή}$$
$$\left(x^2+\alpha\cdot x-3\right)\cdot\left(x^2+\beta\cdot x-3\right).$$

Δοκιμάζουμε

$$x^4-6x^3+3x^2+2x+9=$$
$$=\left(x^2+\alpha\cdot x+1\right)\cdot\left(x^2+\beta\cdot x+9\right)$$
$$=x^4+\beta\cdot x^3+9x^2+\alpha\cdot x^3+\alpha\beta\cdot x^2+9\alpha x+x^2+\beta x+9$$
$$=x^4+(\alpha+\beta)x^3+(\alpha\beta+10)x^2+(9\alpha+\beta)x+9$$

Από ισότητα πολυωνύμων πρέπει το σύστημα να έχει λύση, αλλιώς δοκιμάζουμε άλλο ζεύγος δευτεροβάθμιων πολυωνύμων.

$$\left.\begin{array}{r}\alpha+\beta=-6\\ \alpha\beta+10=3\\ 9\alpha+\beta=2\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}\alpha=1,\beta=-7\\ -7+10=3\end{array}\right\}$$

Άρα $x^4-6x^3+3x^2+2x+9=$

$=\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(x^2-7x+9\right)$

και η εξίσωσή μας γίνεται

$$x^4-6x^3+3x^2+2x+9=0 \Leftrightarrow$$
$$\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(x^2-7x+9\right)=0 \Leftrightarrow$$
$$x^2+x+1=0, \text{ αδύνατη ή}$$
$$x^2-7x+9=0 \Leftrightarrow x=\frac{7+\sqrt{13}}{2}.$$

Άσκηση 5 (Νίκος Αντωνόπουλος)

Να λυθεί στο R η εξίσωση:

$$\frac{x^4-x^3+x^2-x+1}{11\left(x^2-x+1\right)^2}=\frac{1}{9}$$

Λύση

Πρέπει και αρκεί $x^2-x+1\neq 0$ το οποίο ισχύει αφού $\Delta=-3<0$.

Παρατηρούμε ότι, για $x=0$ προκύπτει $\dfrac{1}{11}=\dfrac{1}{9}$, αδύνατο, άρα $x\neq 0$. Έτσι έχουμε

$$\frac{x^4-x^3+x^2-x+1}{11\left(x^2-x+1\right)^2}=\frac{1}{9}\Leftrightarrow$$
$$\frac{x^4-x^3+x^2-x+1}{x^2\left(x-1+\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{11}{9}\Leftrightarrow$$
$$\frac{x^2-x+1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\left(x-1+\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{11}{9}\Leftrightarrow$$
$$\frac{x^2+\frac{1}{x^2}-\left(x+\frac{1}{x}\right)+1}{\left(x+\frac{1}{x}-1\right)^2}=\frac{11}{9}$$

Θέτουμε το $x+\dfrac{1}{x}=y \Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$

και η εξίσωση γίνεται:

$$9\left(y^2-y-1\right)=11(y-1)^2 \Leftrightarrow$$
$$2y^2-13y+20=0 \Leftrightarrow y=4 \text{ ή } y=\frac{5}{2}.$$

Άρα $x+\dfrac{1}{x}=4 \Leftrightarrow x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow$

$$\boxed{x_{1,2}=2\pm\sqrt{3}}$$

ή

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0\Leftrightarrow$$
$$\boxed{x_3=2} \text{ ή } \boxed{x_4=\frac{1}{2}}.$$

Τάξη:Β΄

Επαναληπτικές Ασκήσεις Γεωμετρίας

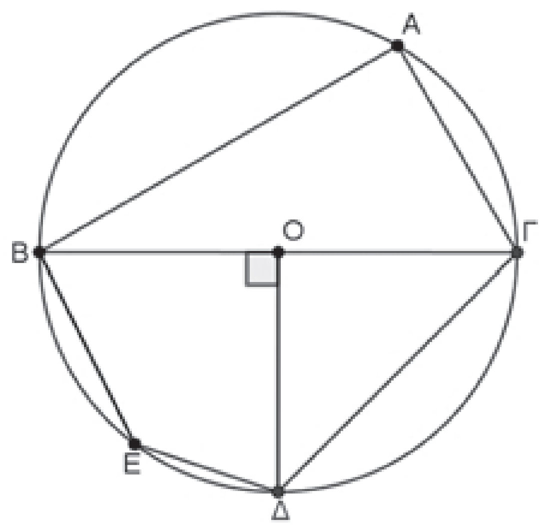
Α΄ Μέρος

3ο ΓΕΛ Κερατσινίου

Το άρθρο του πρώτου μέρους αποτελεί μια προσπάθεια μαθητών και μαθητριών της Β΄ τάξης του 3ου ΓΕΛ Κερατσινίου να κατασκευάσουν και να **προτείνουν δικές τους ασκήσεις** στα πλαίσια της Γεωμετρίας Β΄ Λυκείου. Έτσι αναδεικνύεται η πολύ καλή γνώση της ύλης, η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων, η **επινοητικότητα**, η **αυτοπεποίθηση** και τελικά η **θετική σκέψη.**

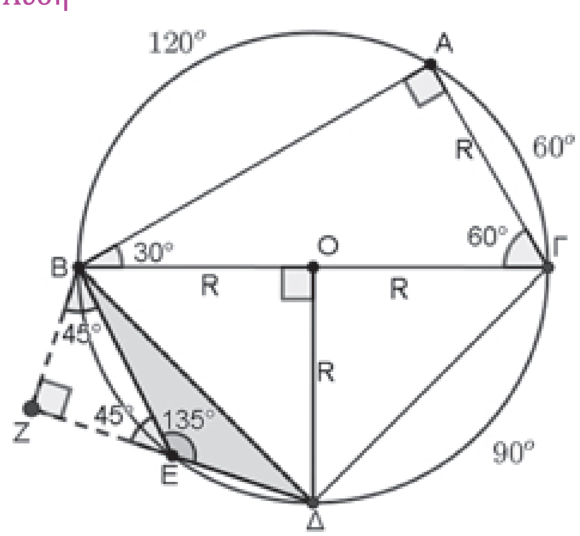
Άσκηση 1

Δίνεται κυρτό πεντάγωνο ΑΒΕΔΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας R όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Αν $\overset{\frown}{ΒΑ}=120^\circ$, $ΟΔ\perp ΒΓ$, $ΒΕ=\sqrt{8}$ και $(ΒΑΓ)=5\sqrt{3}$, να βρεθεί το εμβαδόν του ΒΓΔΕ.

Λύση



Η γωνία $Β\hat{Α}Γ=90^\circ$, ως εγγεγραμμένη γωνία η οποία βαίνει σε ημικύκλιο. Επίσης $Β\hat{Γ}Α=\frac{120^\circ}{2}=60^\circ$, ως εγγεγραμμένη σε τόξο 120°. Συνεπώς στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΑΓ είναι $Α\hat{Β}Γ=90^\circ-60^\circ=30^\circ$, άρα $ΑΓ=\frac{ΒΓ}{2}=R$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$ΒΓ^2=ΑΒ^2+ΑΓ^2\Rightarrow ΑΒ^2=ΒΓ^2-ΑΓ^2\Rightarrow$$
$$ΑΒ^2=4R^2-R^2\Rightarrow ΑΒ^2=3R^2\Rightarrow ΑΒ=R\sqrt{3}$$

Επίσης,

$$(ΒΑΓ)=5\sqrt{3}\Rightarrow \frac{1}{2}ΑΒ\cdot ΑΓ=5\sqrt{3}\Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{3}R^2=5\sqrt{3}\Rightarrow R^2=10\Rightarrow R=\sqrt{10}.$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΟΒΔ έχουμε:

$$ΒΔ^2=ΟΒ^2+ΟΔ^2\Rightarrow ΒΔ^2=2R^2\Rightarrow ΒΔ=\sqrt{20}.$$

Η γωνία $Β\hat{Ε}Δ=\frac{270^\circ}{2}=135^\circ$, ως εγγεγραμμένη γωνία η οποία βαίνει σε τόξο $270^\circ=\overset{\frown}{ΒΑ}+\overset{\frown}{ΑΓ}+\overset{\frown}{ΓΔ}$. Φέρνουμε το ύψος ΒΖ του τριγώνου ΒΕΔ. Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΖΒΕ είναι $Ζ\hat{Ε}Β=180^\circ-135^\circ=45^\circ$, οπότε και $Ζ\hat{Β}Ε=45^\circ$, άρα $Ζ\overset{\Delta}{Β}Ε$ ισοσκελές έτσι $ΒΖ=ΖΕ$.
Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΖΒΕ έχουμε:

$$ΒΕ^2=ΖΕ^2+ΖΒ^2\Rightarrow 8=2\cdot ΖΕ^2\Rightarrow ΖΕ=2.$$

Από το γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα στο αμβλυγώνιο τρίγωνο ΒΕΔ έχουμε

$$ΒΔ^2=ΕΔ^2+ΒΕ^2+2ΕΔ\cdot ΖΕ\Rightarrow$$
$$20=ΕΔ^2+8+4ΕΔ\overset{x=ΕΔ}{\Rightarrow} x^2+4x-12=0\Rightarrow$$
$$x=-6 \text{ ή } x=2,$$

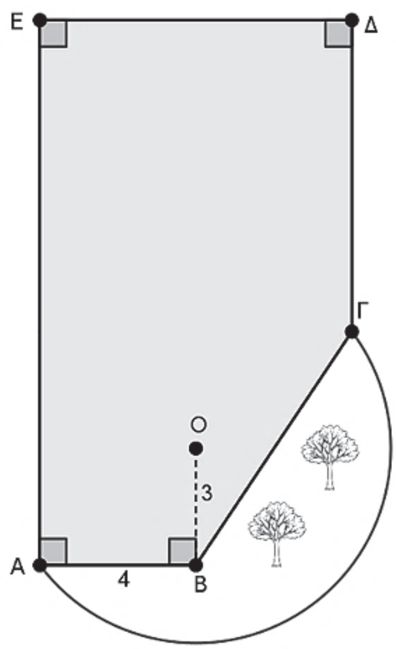
από τις οποίες δεκτή είναι η $x=2$, άρα $ΕΔ=2$.
Τελικά

$$(ΒΓΔΕ)=(ΒΕΔ)+(ΒΓΔ)=\frac{1}{2}ΔΕ\cdot ΒΖ+\frac{1}{2}ΒΓ\cdot ΟΔ$$
$$=\frac{1}{2}2\cdot 2+\frac{1}{2}2\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=12 \text{ τ.μ.}$$

[Από τις μαθήτριες: **Κουτσιανοπούλου Μαρία – Δαμασκηνή, Κουτσιανοπούλου Μιχαήλια**]

Άσκηση 2

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια αίθουσα συνεδριάσεων ΑΒΓΔΕ με το τρίγωνο ΑΒΓ να αποτελεί το χώρο αναμονής και ο προαύλιος χώρος να περικλείεται από το ημικύκλιο ΑΓ κέντρου Ο και τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΒΓ. Επίσης είναι ΑΒ = 4, ΟΒ = 3, ΕΔ = ΔΓ και $\hat{E}=\hat{\Delta}=\hat{A}=A\hat{B}O=90^o$.

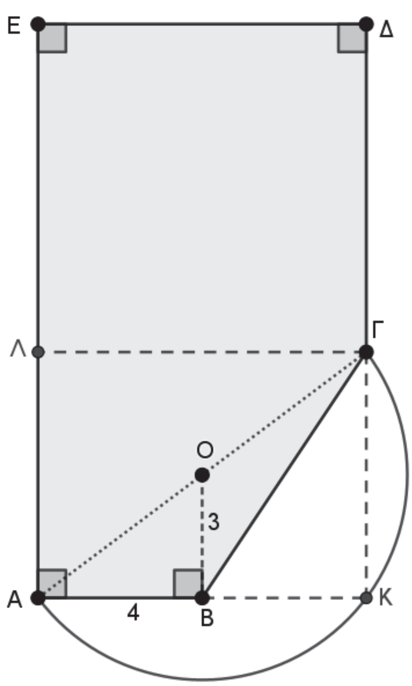


Να βρεθεί το εμβαδόν του

i) χώρου συνεδριάσεων

ii) του προαύλιου χώρου.

Λύση



i) Από το Γ φέρνουμε παράλληλη προς την ΕΔ και έστω Λ το σημείο τομής της με την ΕΑ. Τότε είναι $E\hat{\Lambda}\Gamma=90^o$, άρα το ΕΔΓΛ είναι ορθογώνιο (έχει τρεις γωνίες ορθές) και αφού ΕΔ = ΔΓ το ΕΔΓΛ είναι τετράγωνο.

Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ προς το Β και έστω Κ το σημείο στο οποίο, η ΑΒ τέμνει το ημικύκλιο.

Η ΑΚ είναι χορδή και ΟΒ το απόστημα, άρα $AB=BK=4$, οπότε $AK=8$.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα για το τρίγωνο ΑΟΒ έχουμε:

$OA^2=OB^2+AB^2 \Rightarrow OA^2=25 \Rightarrow OA=5 \Rightarrow A\Gamma=10$

Τα τρίγωνα ΑΚΓ και ΑΟΒ έχουν $\hat{A}$ κοινή και $\frac{AB}{AK}=\frac{4}{8}$, $\frac{AO}{A\Gamma}=\frac{5}{10}$, δηλαδή $\frac{AB}{AK}=\frac{AO}{A\Gamma}=\frac{1}{2}$, άρα είναι όμοια, συνεπώς $A\hat{K}\Gamma=A\hat{B}O=90^o$ και $\Gamma K=2OB=6$.

Επιπλέον οι ΑΕ και ΓΔ είναι κάθετες στην ΕΔ άρα $AE//\Gamma\Delta$ και οι ΑΕ και ΓΚ είναι κάθετες στην ΑΚ άρα $AE//\Gamma K$. Εφόσον από το σημείο Γ πρέπει να άγεται μια μόνο παράλληλη προς την ΑΕ, τα σημεία Δ,Γ και Κ είναι συνευθειακά. Άρα το ΕΔΚΑ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Επίσης το ΛΓΚΑ είναι ορθογώνιο καθώς έχει τρεις γωνίες ορθές, άρα $\Gamma K=A\Lambda=6$ και $AK=\Gamma\Lambda=E\Delta=8$.

Το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με

$$(AB\Gamma\Delta E)=(AK\Delta E)-(BK\Gamma)=8\cdot 14-\frac{1}{2}4\cdot 6=100\,\tau\mu$$

ii) Το εμβαδόν Ε του προαύλιου χώρου είναι ίσο με το εμβαδόν του ημικυκλίου μείον το εμβαδόν της αίθουσας αναμονής.

Το εμβαδόν της αίθουσας αναμονής είναι ίσο με

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}AB\cdot\Gamma K=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6=12$$

Άρα $E=\frac{\pi\cdot 5^2}{2}-(AB\Gamma)=\left(\frac{25\pi}{2}-12\right)\tau\mu$

[Από τις μαθήτριες: Κουτσιανοπούλου Μαρία – Δαμασκηνή, Κουτσιανοπούλου Μιχαήλια]

Άσκηση 3

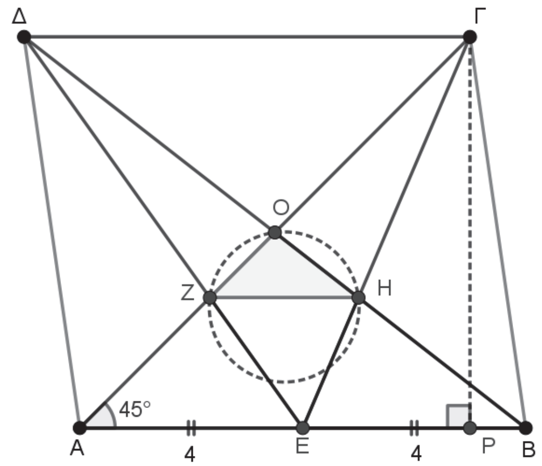
Δίνεται ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με κέντρο Ο, Ε το μέσο της ΑΒ και $\Gamma\hat{A}B=45^o$. Η ΓΕ τέμνει τη διαγώνιο ΔΒ στο Η και η ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Αν ΑΒ = 8 και (ΑΒΓΔ) = 56,

i) Να δείξετε ότι $ZH//AB$

ii) Να βρείτε το εμβαδόν (ΟΖΗ)

iii) Να βρείτε το μήκος του τόξου ΟΗ (μικρότερου του ημικυκλίου) του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΟΖΗ.

Λύση



i) Στο τρίγωνο ΑΔΒ το Ζ είναι το βαρύκεντρο αφού είναι το σημείο τομής των διαμέσων ΔΕ και ΑΟ. Οπότε

$$OZ=\frac{1}{3}OA,\ AZ=\frac{2}{3}AO,\ \text{άρα}\ AZ=2\cdot OZ.$$

Όμοια στο τρίγωνο ΑΓΒ το Η είναι το βαρύκεντρο, οπότε $OH=\frac{1}{3}OB,\ HB=\frac{2}{3}OB$, άρα $HB=2\cdot OH$. Άρα $\frac{OZ}{AZ}=\frac{1}{2}=\frac{OH}{BH}$, οπότε από το αντίστροφο του Θεωρήματος Θαλή είναι $ZH//AB$.

ii) Τα τρίγωνα ΑΓΒ και ΑΔΓ είναι ίσα (ΠΠΠ), άρα $(A\Gamma B)=\frac{(AB\Gamma\Delta)}{2}=\frac{56}{2}=28\,\tau\mu$. Η ΒΟ είναι διάμεσος του $A\hat{\Gamma}B$, άρα $(AOB)=\frac{(A\Gamma B)}{2}=14\,\tau\mu$.

Τα τρίγωνα ΟΖΗ και ΟΑΒ είναι όμοια ($\hat{O}$ κοινή και $O\hat{A}B=O\hat{Z}H=45^{o}$ ως εντός εναλλάξ) με λόγο ομοιότητας $\lambda=\frac{OZ}{OA}=\frac{1}{3}$, οπότε

$$\frac{(ZOH)}{(OAB)}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9},$$

άρα

$$(ZOH)=\frac{1}{9}(OAB)=\frac{14}{9}\ \tau\mu.$$

iii) Φέρνουμε το ύψος ΓΡ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Τότε

$$(AB\Gamma\Delta)=56\Rightarrow AB\cdot\Gamma P=56\Rightarrow 8\Gamma P=56\Rightarrow \Gamma P=7$$

Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΡ έχει $\Gamma\hat{A}P=45^{o}$, άρα $A\hat{\Gamma}P=45^{o}$, συνεπώς είναι ισοσκελές με $AP=\Gamma P=7$.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα προκύπτει

$$A\Gamma^2=\Gamma P^2+AP^2\Rightarrow A\Gamma^2=7^2+7^2\Rightarrow A\Gamma=7\sqrt{2},$$

και την ομοιότητα των τριγώνων ΟΑΒ και ΟΖΗ έχουμε

$$OZ=\frac{1}{3}\cdot OA=\frac{1}{3}\cdot\frac{A\Gamma}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{6}\ \text{ και }\ ZH=\frac{1}{3}\cdot AB=\frac{8}{3}.$$

Από νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΟΖΗ προκύπτει:

$$OH^2=OZ^2+ZH^2-2\cdot OZ\cdot ZH\cdot \sigma\upsilon\nu 45^{o}\Rightarrow$$

$$OH^2=\left(\frac{7\sqrt{2}}{6}\right)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2-2\cdot\frac{7\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$$

$$OH^2=\frac{65}{18}\Rightarrow OH=\sqrt{\frac{65}{18}}.$$

Είναι

$$(OZH)=\frac{OZ\cdot OH\cdot ZH}{4R}\Rightarrow R=\frac{OZ\cdot OH\cdot ZH}{4(OZH)}\Rightarrow$$

$$R=\frac{\frac{7\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{\sqrt{65}}{\sqrt{18}}\cdot\frac{8}{3}}{4\cdot\frac{14}{9}}\Rightarrow R=\frac{\sqrt{65}}{6}.$$

Το τόξο $\overset{\frown}{OH}$ έχει μέτρο ίσο με $2\cdot O\hat{Z}H=90^{o}$, άρα το μήκος του τόξου ΟΗ είναι ίσο με

$$\ell_{\overset{\frown}{OH}}=\frac{\pi\cdot R\cdot 90}{180}=\frac{\pi\cdot\sqrt{65}}{12}.$$

[Από τη μαθήτρια: **Σιγάλα Κατερίνα**]

Άσκηση 4

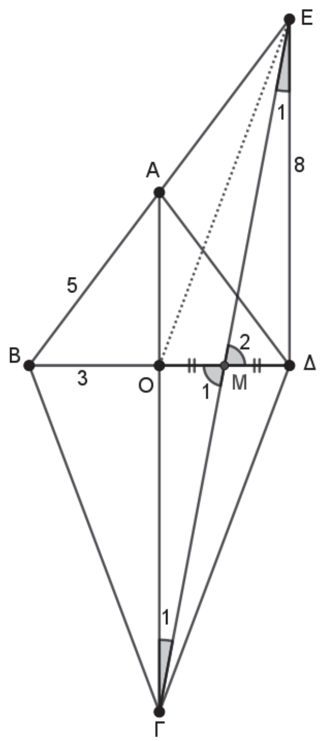
Δίνεται ΑΒΓΔ κυρτό τετράπλευρο με τη διαγώνιο ΑΓ να διχοτομεί τη διαγώνιο ΒΔ σε σημείο Ο. Από το Δ φέρνουμε ευθεία (ε) παράλληλη στην ΑΓ και έστω Ε το σημείο τομής της ευθείας (ε) με την προέκταση της ΒΑ προς το Α. Αν ΟΒ = 3, ΑΒ = 5, ΔΕ = 8 και η ευθεία ΕΓ διχοτομεί το ΟΔ, να δείξετε ότι $\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(EO\Gamma\Delta)}=\frac{3}{2}$.

ΛΥΣΗ

Τα τρίγωνα ΑΒΟ και ΒΕΔ είναι όμοια αφού έχουν τη γωνία $\hat{B}$ κοινή και $B\hat{A}O=B\hat{E}\Delta$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη. Άρα

$$\frac{BO}{B\Delta}=\frac{AO}{E\Delta}\Rightarrow\frac{3}{6}=\frac{AO}{8}\Rightarrow AO=4.$$

Τα τρίγωνα ΟΜΓ και ΜΔΕ έχουν ΜΔ=ΟΜ, $\hat{M}_1=\hat{M}_2$ ως κατακορυφήν και $\hat{\Gamma}_1=\hat{E}_1$ ως εντός εναλλάξ, άρα και $\Gamma\hat{O}M=E\hat{\Delta}M$, συνεπώς τα τρίγωνα είναι ίσα (ΓΠΓ). Άρα ΟΓ=8.



Επίσης στο τρίγωνο ΑΟΒ είναι $AB^2 = AO^2 + OB^2$ αφού $5^2 = 4^2 + 3^2$, άρα από το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος είναι $A\hat{O}B = 90^o$ δηλαδή $AO \perp B\Delta$ και εφόσον $AO // E\Delta$ έχουμε ότι $\Delta E \perp B\Delta$. Το ΕΟΓΔ είναι παραλληλόγραμμο αφού $\Delta E = // O\Gamma$. Τελικά είναι

$$\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(EO\Gamma\Delta)} = \frac{\frac{1}{2}A\Gamma \cdot B\Delta}{O\Delta \cdot \Delta E} = \frac{\frac{1}{2}(4+8)\cdot 6}{8\cdot 3} = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$$

[Από το μαθητή: **Νικόλαο – Παράσχο Πανταζή**]

Άσκηση 5

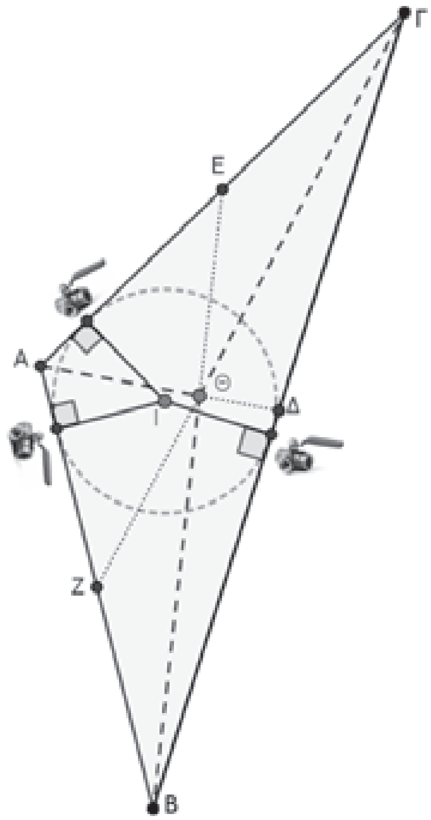
Σε ένα χωριό τρεις γιοι κληρονομούν το χωράφι του πατέρα τους το οποίο είναι σχήματος τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ = 90 m, ΒΓ = 170 m και ΑΓ = 100 m . Για να είναι δίκαιοι αποφασίζουν να μοιράσουν το χωράφι σε τρία ισεμβαδικά τρίγωνα. Επιπλέον υπάρχει εσωτερικά του χωραφιού μια δεξαμενή για πότισμα. Ο κάθε κληρονόμος θέλει να τοποθετήσει μια βάνα ποτίσματος σε σημείο της πλευράς του τριγώνου ΑΒΓ που του αντιστοιχεί, έτσι ώστε οι τρεις βάνες να ισαπέχουν από τη δεξαμενή.

i) **Βρείτε έναν τρόπο ώστε να μοιραστεί δίκαια το χωράφι. Πόσο είναι το εμβαδό του χωραφιού που θα έχει ο κάθε κληρονόμος;**

ii) **Σε ποιο σημείο του τριγώνου ΑΒΓ θα μπορούσε να βρίσκεται η δεξαμενή;**

iii) **Αν οι γιοι θέλουν να ενώσουν κυκλικά με σωλήνα και τις τρεις βάνες, πόσο μήκος σωλήνα θα χρειαστούν;**

ΛΥΣΗ



i) Φέρνουμε τις διαμέσους ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ και ως γνωστόν το σημείο τομής τους είναι το βαρύκεντρο Θ. Επομένως, αφού ΑΔ διάμεσος, είναι $(AB\Delta) = (A\Delta\Gamma)$ και ΘΔ διάμεσος στο τρίγωνο ΘΒΓ άρα $(\Theta B\Delta) = (\Theta\Delta\Gamma)$. Έτσι

$$(AB\Delta) = (A\Delta\Gamma) \Rightarrow (AB\Theta) + (\Theta B\Delta) = (A\Theta\Gamma) + (\Theta\Delta\Gamma)$$
$$\Rightarrow (AB\Theta) = (A\Theta\Gamma)$$

Όμοια δείχνουμε ότι $(AB\Theta) = (B\Theta\Gamma)$, συνεπώς

$$(AB\Theta) = (A\Theta\Gamma) = (B\Theta\Gamma) = \frac{(AB\Gamma)}{3}.$$

Είναι $\tau = \frac{AB + B\Gamma + A\Gamma}{2} = \frac{360}{2} = 180\,\text{m}$ και

το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με

$$(AB\Gamma) = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} =$$

$$(AB\Gamma) = \sqrt{180\cdot 90\cdot 10\cdot 80} = \sqrt{144\cdot 9\cdot 10^4} = 3600\text{m}^2$$

Άρα ο κάθε κληρονόμος θα έχει $\frac{3600}{3} = 1200\text{m}^2$.

ii) Θα μπορούσε να βρίσκεται στο έκκεντρο Ι του τριγώνου ΑΒΓ.

iii) Θέλουμε το μήκος του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. Είναι

$$(AB\Gamma) = \tau\rho \Rightarrow \rho = \frac{(AB\Gamma)}{\tau} = \frac{3600}{180} = 20\text{m},$$

οπότε θα χρειαστούν $L = 2\pi\rho = 40\pi\,\text{m}$.

[Από τη μαθήτρια: **Σταυριανάκου Ζαχαρούλα**]

Β΄ Μέρος:

Αργυρόπουλος Ηλίας , Αργυροπούλου Ευτυχία

Άσκηση 6

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB<A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε τα σημεία Δ, Ε (αντίστοιχα) έτσι ώστε $B\Delta=\Gamma E$ και υποθέτουμε ότι η προέκταση του ΔΕ τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Ζ. Από το Ε φέρνουμε επίσης παράλληλο προς την ΑΒ, που τέμνει την ΒΖ στο Η. Να αποδείξετε ότι:

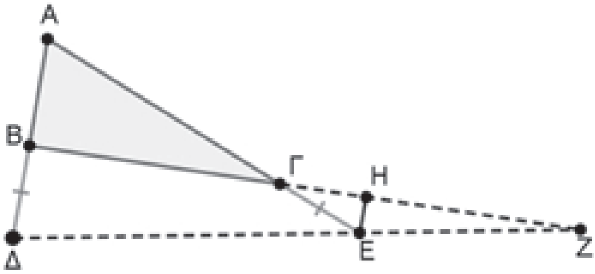
α) $\dfrac{EH}{B\Delta}=\dfrac{EZ}{\Delta Z}$ και $\dfrac{EH}{\Gamma E}=\dfrac{EZ}{\Delta Z}$.

β) $\dfrac{EH}{E\Gamma}=\dfrac{AB}{A\Gamma}$

γ) $\dfrac{AB}{A\Gamma}=\dfrac{EZ}{\Delta Z}$

δ) **Αν $AB=\dfrac{1}{2}A\Gamma$, τότε το Ε είναι μέσο του ΔΖ.**

Λύση



α) Αφού $EH//\Delta B$ προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΖΒΔ και ΖΗΕ έχουν: τις $B\hat{\Delta}Z=H\hat{E}Z$ και $\Delta\hat{B}Z=E\hat{H}Z$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά, οπότε είναι όμοια. Από την ομοιότητα αυτή προκύπτει η αναλογία $\dfrac{EH}{B\Delta}=\dfrac{EZ}{\Delta Z}$ από την οποία συνεπάγεται και η $\dfrac{EH}{\Gamma E}=\dfrac{EZ}{\Delta Z}$ (1), αφού $B\Delta=\Gamma E$.

β) Επειδή $EH//AB$ θα είναι $B\hat{A}\Gamma=\Gamma\hat{E}H$ και $A\hat{B}\Gamma=\Gamma\hat{H}E$ ως εντός εναλλάξ. Άρα τα τρίγωνα ΓΕΗ και ΓΑΒ είναι όμοια, οπότε $\dfrac{EH}{E\Gamma}=\dfrac{AB}{A\Gamma}$ (2).

γ) Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\dfrac{AB}{A\Gamma}=\dfrac{EZ}{\Delta Z}$

δ) Θέτοντας στην προηγούμενη αναλογία $AB=\dfrac{1}{2}A\Gamma$, βρίσκουμε ότι $\Delta Z=2EZ$.

Άσκηση 7

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=2+\sqrt{3}$, $B\Gamma=4$ και $A\Gamma=\sqrt{15}$. Να αποδείξετε ότι:

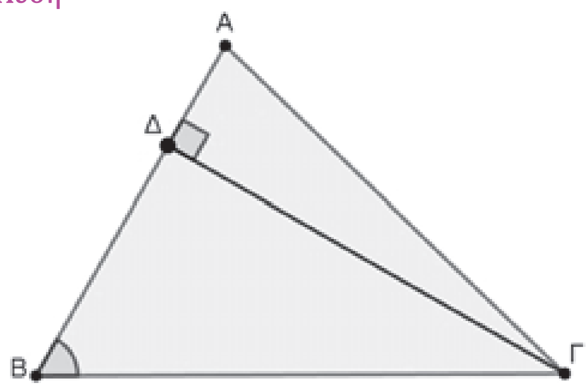
α) **μεγαλύτερη πλευρά του ΑΒΓ είναι η ΒΓ και το τρίγωνο είναι οξυγώνιο**

β) $\hat{B}=60°$

γ) **$\sigma\upsilon\nu A=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ και η προβολή ΑΔ της ΑΓ πάνω στην ΑΒ ίση με $\sqrt{3}$. Στη συνέχεια,**

δ) **Να βρείτε το ύψος του τριγώνου από την κορυφή Γ και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.**

Λύση



α) Έχουμε ότι: $B\Gamma=4=\sqrt{16}>\sqrt{15}=A\Gamma$ και $B\Gamma=4>2+\sqrt{3}=AB$ διότι $2>\sqrt{3}$, άρα η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου είναι η ΒΓ και ισχύει: $B\Gamma^2<AB^2+A\Gamma^2 \Leftrightarrow 0<6+4\sqrt{3}$, άρα το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

β) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu B=\frac{AB^2+B\Gamma^2-A\Gamma^2}{2AB\cdot B\Gamma}=\frac{1}{2}$$

άρα συμπεραίνουμε ότι $\hat{B}=60°$.

γ) Είναι

$$\sigma\upsilon\nu A=\frac{15+7+4\sqrt{3}-16}{2\sqrt{15}\left(2+\sqrt{3}\right)}=...=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Φέρουμε $\Gamma\Delta\perp AB$. Τότε παίρνουμε

$$\sigma\upsilon\nu A=\frac{A\Delta}{A\Gamma}\Rightarrow...\Rightarrow A\Delta=\sqrt{3}.$$

Άρα η προβολή ΑΔ της ΑΓ στην ΑΒ είναι $\sqrt{3}$.

δ) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΓ με εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε $\Gamma\Delta^2=A\Gamma^2-A\Delta^2=12$, δηλαδή $\Gamma\Delta=2\sqrt{3}$. Άρα το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι:

$$\left(AB\Gamma\right)=\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)2\sqrt{3}=\left(2\sqrt{3}+3\right)\ \tau\mu$$

Άσκηση 8

Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα, ώστε $BK=\dfrac{1}{2}AB$ και $A\Lambda=\dfrac{3}{4}\Gamma A$.

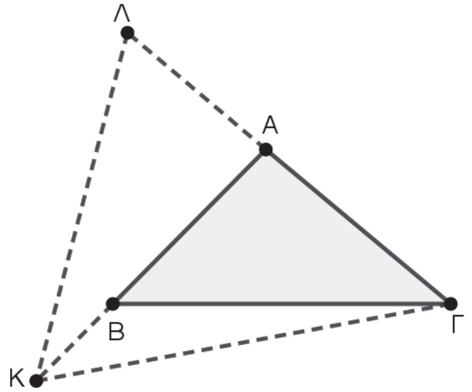
α. Να αποδείξετε ότι:

i. $(ΒΚΓ)=\frac{1}{2}(ΑΒΓ)$ και $(ΑΚΛ)=\frac{9}{8}(ΑΒΓ)$

ii. $(ΚΓΛ)=\frac{21}{8}(ΑΒΓ)$

β. Αν είναι $ΑΒ=18$, $ΒΓ=34$ και $ΑΓ=20$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΚΓΛ.

Λύση



α. i. Τα τρίγωνα ΒΚΓ και ΑΒΓ έχουν το ίδιο ύψος που φέρεται από την κορυφή Γ. Επομένως ο λόγος των εμβαδών τους θα είναι ίσος με τον λόγο των αντίστοιχων βάσεων, δηλαδή ισχύει: $\frac{(ΒΚΓ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{ΒΚ}{ΑΒ}$ και επειδή $ΒΚ=\frac{1}{2}ΑΒ$, έπεται ότι $(ΒΚΓ)=\frac{1}{2}(ΑΒΓ)$. Παρατηρούμε ότι

$K\hat{A}Λ+B\hat{A}Γ=180°$, άρα $\frac{(ΑΚΛ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{ΑΛ\cdot ΑΚ}{ΑΓ\cdot ΑΒ}$,

δηλαδή $(ΑΚΛ)=\frac{9}{8}(ΑΒΓ)$.

ii. Από το σχήμα έχουμε:

$$(ΚΓΛ)=(ΒΚΓ)+(ΑΚΛ)+(ΑΒΓ)=$$
$$\left(\frac{1}{2}+\frac{9}{8}+1\right)(ΑΒΓ)=\frac{21}{8}(ΑΒΓ).$$

β. Αρκεί να υπολογίσουμε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Εφαρμόζοντας τον τύπο του Ήρωνα με $τ=\frac{α+β+γ}{2}=36$ (τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου, $α=34$, $β=20$, $γ=18$), έχουμε:

$$Ε=\sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}=144\text{ τμ}$$

Άρα $(ΚΓΛ)=\frac{21}{8}\cdot 144=21\cdot 18=378$ τμ

Άσκηση 9

Σε κύκλο (Ο, R), παίρνουμε τα σημεία Α, Β, Γ και Δ κατά τη θετική φορά και με τη σειρά που δίνονται, έτσι ώστε: $Α\hat{Ο}Β=ω_4$, $Β\hat{Ο}Γ=ω_6$ και $Γ\hat{Ο}Δ=ω_4$, όπου $ω_4$ και $ω_6$ είναι οι κεντρικές γωνίες του εγγεγραμμένου στον (Ο, R) τετραγώνου και κανονικού εξάγωνου αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι:

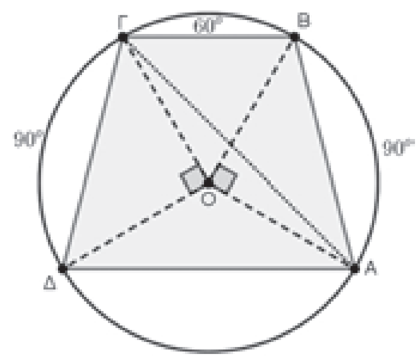
i. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

ii. Το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισόπλευρο και το ΔΟΑ ισοσκελές με $Δ\hat{Ο}Α=120°$

iii. το μήκος της βάσης ΔΑ του ισοσκελούς ΔΟΑ, είναι $ΔΑ=R\sqrt{3}$.

β. Αν η περίμετρος του τριγώνου ΔΟΑ είναι $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$, να βρείτε την ακτίνα R του κύκλου και να δείξετε ότι το μήκος του κύκλου (Ο, R) είναι 4π και το εμβαδόν του 4π.

Λύση



α. i. Είναι $Γ\hat{Α}Δ=Α\hat{Γ}Β=ω_4:2=45°$ (εντός εναλλάξ ίσες) άρα $ΓΒ//ΑΔ$ και $ΓΔ=ΑΒ$ αφού $\overset{\frown}{ΓΔ}=\overset{\frown}{ΑΒ}$, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις ΔΑ κα ΓΒ.

ii. Το τρίγωνο ΒΟΓ έχει $ΟΒ=ΟΓ=R$ και γωνία κορυφής $Β\hat{Ο}Γ=ω_6=60°$. Επομένως είναι $Ο\hat{Γ}Β=Ο\hat{Β}Γ=120°:2=60°$ άρα ΒΟΓ ισόπλευρο πλευράς R. Το τρίγωνο ΔΟΑ έχει: $ΟΔ=ΟΑ=R$, $Δ\hat{Ο}Α=360°-(ω_4+ω_6+ω_4)=120°$ οπότε είναι ισοσκελές με γωνία κορυφής $Δ\hat{Ο}Α=120°$.

iii. Από τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$ΔΑ^2=ΟΑ^2+ΟΔ^2-2\cdot ΟΑ\cdot ΟΔ\cdot συν120°=...=3R^2$$

άρα $ΔΑ=R\sqrt{3}$.

β. Η περίμετρος του τριγώνου ΔΟΑ, συναρτήσει της ακτίνα R, είναι: $\left(2+\sqrt{3}\right)R$, οπότε σύμφωνα με την υπόθεση θα είναι

$$\left(2+\sqrt{3}\right)R=\left(1+\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow R=2.$$

Επομένως το μήκος L του κύκλου είναι: $L=2πR=4π$ και το εμβαδόν Ε είναι $Ε=πR^2=4π$ τμ.

Τάξη: Β΄ Θέματα Αναλυτικής Γεωμετρίας

Χρήστος Λαζαρίδης

ΑΣΚΗΣΗ 1

Έστω Ο η αρχή ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Θεωρούμε τρίγωνο ΟΑΒ με $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=(x,4)$, $x\in R$, όπου $\vec{\alpha}=(|\vec{\alpha}|-2,|\vec{\alpha}|-1)$ που δεν είναι παράλληλο στον άξονα x΄x.

α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}|=5$

β) Αν επιπλέον το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ ισούται με 2,

i) να δείξετε ότι $x=2$ ή $x=4$

ii) να υπολογίσετε το $συν\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$

Λύση

α) $|\vec{\alpha}|^2=(|\vec{\alpha}|-2)^2+(|\vec{\alpha}|-1)^2=$

$|\vec{\alpha}|^2-4|\vec{\alpha}|+4+|\vec{\alpha}|^2-2|\vec{\alpha}|+1=2|\vec{\alpha}|^2-6|\vec{\alpha}|+5$

Δηλαδή, $|\vec{\alpha}|^2=2|\vec{\alpha}|^2-6|\vec{\alpha}|+5\Leftrightarrow$

$|\vec{\alpha}|^2-6|\vec{\alpha}|+5=0\Leftrightarrow |\vec{\alpha}|=1$ ή $|\vec{\alpha}|=5$.

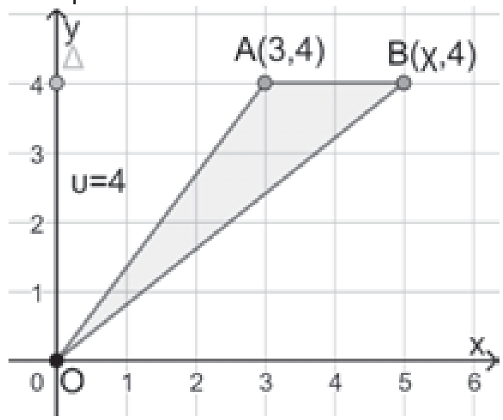
Η τιμή $|\vec{\alpha}|=1$ απορρίπτεται διότι τότε θα είναι $\vec{\alpha}=(-1,0)\parallel x'x$ άτοπο!

β)Ισχύει $\vec{\alpha}=(3,4)$, $\vec{\beta}=(x,4)$, άρα

i) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x-3,0)$. Έχουμε,

$(OAB)=2\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{(x-3)^2}=2\Leftrightarrow 2|x-3|=2$

$\Leftrightarrow x=2$ ή $x=4$



ii) $συν\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=\frac{3x+16}{5\sqrt{x^2+16}}$

Για $x=2$, $συν\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\frac{22}{5\sqrt{20}}$

Για $x=4$, $συν\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\frac{28}{5\sqrt{32}}$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται το σημείο $M(1,1)$

α) Να βρεθεί η μορφή των εξισώσεων που διέρχονται από το σημείο Μ

β) Να βρείτε τις ευθείες που σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο

γ) Να δείξετε ότι οι ευθείες που βρήκατε στο β ερώτημα εφάπτονται του κύκλου με εξίσωση $(c): x^2+y^2=2$

Λύση

α) Οι ζητούμενες εξισώσεις είναι:

$y-1=\lambda(x-1)$ με $\lambda\in R$ ή $x=1$.

β) Η ευθεία $x=1$ απορρίπτεται αφού ως παράλληλη με τον y΄y δεν τέμνει τους άξονες. Αν η ευθεία είναι παράλληλη στον y΄y ή διέρχεται από την αρχή των αξόνων δεν σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες, άρα $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1$.

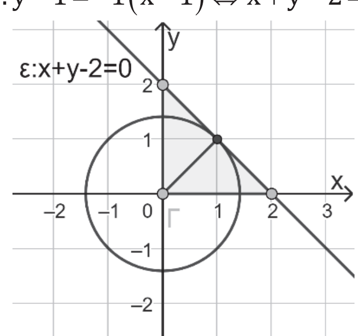
Για $y=0$, $x=\frac{\lambda-1}{\lambda}$ και για $x=0$, $y=-\lambda+1$.

Οπότε οι ευθείες τέμνουν τους άξονες στα σημεία: $K(0,1-\lambda)$ και $\Lambda\left(\frac{\lambda-1}{\lambda},0\right)$. Το τρίγωνο ΟΚΛ είναι ισοσκελές αν και μόνο αν, $(OK)=(O\Lambda)$. Από την τελευταία έχουμε:

$|\lambda-1|=\left|\frac{\lambda-1}{\lambda}\right|\Leftrightarrow|\lambda-1|\left(1-\frac{1}{|\lambda|}\right)=0\overset{\lambda\neq 1}{\Leftrightarrow}\lambda=-1$

Άρα η ευθεία έχει εξίσωση

$\varepsilon: y-1=-1(x-1)\Leftrightarrow x+y-2=0$



γ) Ο κύκλος (c) έχει κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{2}$. Η απόσταση του κέντρου από την ευθεία ε είναι:
$d(O,\varepsilon)=\dfrac{|0+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=\rho$. Άρα η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου c.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνεται ο μοναδιαίος κύκλος c , η παραβολή $c_1: y^2=4x$ και το σημείο $M(\sigma\upsilon\nu\varphi,\eta\mu\varphi)$ του 1ου τεταρτημορίου. Να αποδείξετε ότι:

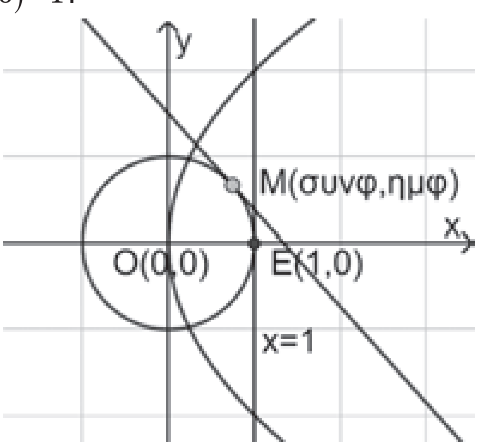
α) Ο κύκλος διέρχεται από την εστία Ε της παραβολής και εφάπτεται στην διευθετούσα της

β) Το σημείο Μ ανήκει στον κύκλο και όχι στην παραβολή

γ) Αν η εξίσωση της εφαπτόμενης του κύκλου στο Μ έχει κλίση $-\sqrt{3}$ να υπολογίσετε τη γωνία φ.

Λύση

α) Ο κύκλος έχει κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$. Η εστία της παραβολής είναι $E(1,0)$ και η διευθετούσα $\delta: x=1$. Ο κύκλος διέρχεται από την εστία Ε της παραβολής αφού οι συντεταγμένες της ικανοποιούν την εξίσωση του κύκλου διότι $1^2+0^2=1$. Επίσης η διευθετούσα εφάπτεται του κύκλου αφού $d(O,\delta)=1$.



β) Έχουμε $\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\eta\mu^2\varphi=1$, άρα $M\in(c)$. Επίσης $M\notin(c_1)$ διότι αν $M\in(c_1)$, τότε θα έχουμε: $\eta\mu^2\varphi=4\sigma\upsilon\nu\varphi\Rightarrow 1-\sigma\upsilon\nu^2\varphi=4\sigma\upsilon\nu\varphi\Rightarrow$ $\sigma\upsilon\nu^2\varphi+4\sigma\upsilon\nu\varphi-1=0\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\varphi=-2\pm\sqrt{5}\notin[-1,1]$

γ) Η εξίσωση της εφαπτόμενης του κύκλου (c) στο Μ είναι $x\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi+y\cdot\eta\mu\varphi=1$. Η κλίση είναι $-\dfrac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu\varphi}=-\sigma\varphi\varphi$.

Έτσι, $-\dfrac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu\varphi}=-\sqrt{3}\Leftrightarrow\sigma\varphi\varphi=\sqrt{3}\overset{0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow}\varphi=\dfrac{\pi}{6}$

ΑΣΚΗΣΗ 4

α) Έστω οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1: \lambda x-y+2\alpha=0$, $\varepsilon_2: \lambda x-y+2\beta=0$ όπου $\alpha,\beta,\lambda\in R$, $\alpha\neq\beta$. Να αποδείξετε ότι η μεσοπαράλληλη μ των ευθειών έχει εξίσωση $\mu: \lambda x-y+\alpha+\beta=0$

β) Να βρεθεί η εξίσωση του συνόλου των κύκλων που έχουν εφαπτόμενες τις ευθείες $x-y+2=0$, $x-y+4=0$

Λύση

α) Ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στην μεσοπαράλληλη μ, αν και μόνο αν, ισαπέχει από τις ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$. Έχουμε

$$d(M,\varepsilon_1)=d(M,\varepsilon_2)\Leftrightarrow\frac{|\lambda x-y+2\alpha|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\frac{|\lambda x-y+2\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}}$$

$$|\lambda x-y+2\alpha|=|\lambda x-y+2\beta|\Leftrightarrow$$

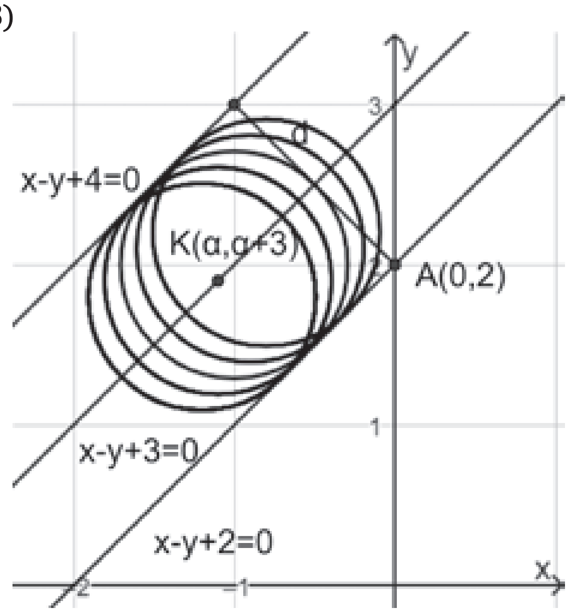
$$\lambda x-y+2\alpha=\lambda x-y+2\beta \text{ ή}$$

$$\lambda x-y+2\alpha=-\lambda x+y-2\beta\Leftrightarrow$$

$$0\cdot x+0\cdot y+\alpha-\beta=0 \text{ ή } \lambda x-y+\alpha+\beta=0\Leftrightarrow$$

$$\lambda x-y+\alpha+\beta=0$$

β)



Τα κέντρα των κύκλων ανήκουν στην μεσοπαράλληλη των ευθειών $x-y+2\cdot 1=0$ και $x-y+2\cdot 2=0$ οπότε από το ερώτημα α) για $\alpha=1$, $\beta=2$ και $\lambda=1$ η εξίσωση της μεσοπαράλληλης είναι $\mu: x-y+3=0$

Η ακτίνα ρ των κύκλων είναι σταθερή και ισούται με το μισό της απόστασης d των δύο ευθειών.
Έστω το τυχαίο σημείο $A(0,2)$ της ευθείας $x-y+2=0$ τότε

$$\rho=\frac{d}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{|0-2+4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Τα κέντρα Κ των κύκλων θα είναι της μορφής $K(\alpha,\alpha+3)$ οπότε οι εξισώσεις των κύκλων θα είναι της μορφής

$$(x-\alpha)^2+(y-\alpha-3)^2=\frac{1}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Έστω η έλλειψη $c:\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με μεγάλο άξονα Α΄Α.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(\alpha\sigma\upsilon\nu\theta,\ \beta\eta\mu\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}$ ανήκει στην έλλειψη.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της c στο Μ

γ) Να αποδείξετε ότι $(MA'A)\le\alpha\beta$

Λύση

α) Διαπιστώνουμε ότι οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την εξίσωση της έλλειψης. Πράγματι,

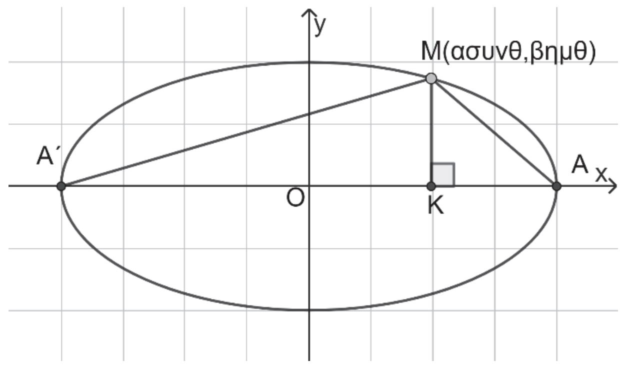
$$\frac{\alpha^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\alpha^2}+\frac{\beta^2\cdot\eta\mu^2\theta}{\beta^2}=\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta=1$$

β) Αντικαθιστώντας στον τύπο της εφαπτόμενης έχουμε:

$$\frac{x\cdot\alpha\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha^2}+\frac{y\cdot\beta\eta\mu\theta}{\beta^2}=1\Leftrightarrow\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha}\cdot x+\frac{\eta\mu\theta}{\beta}\cdot y=1$$

γ) Το τρίγωνο ΜΑΑ΄ έχει βάση $(A'A)=2\alpha$ και ύψος $(MK)=\beta|\eta\mu\varphi|$. Το εμβαδόν του είναι:

$$(MA'A)=\frac{1}{2}(A'A)\cdot(MK)=\frac{1}{2}\cdot 2\alpha\cdot|\beta\eta\mu\varphi|=|\eta\mu\varphi|\alpha\beta$$



Τελικά $(MA'A)=|\eta\mu\theta|\cdot\alpha\beta\le\alpha\beta\cdot 1=\alpha\beta$, αφού $|\eta\mu\theta|\le 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Δίνονται οι ελλείψεις

$$c_1: x^2+2y^2=1,\ \ c_2: 2x^2+y^2=1$$

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των c_1 και c_2 σχηματίζουν τετράγωνο.

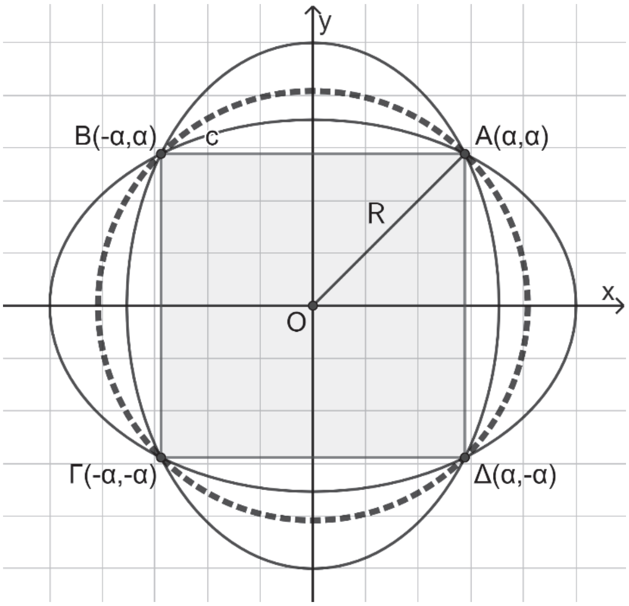
β) Να βρείτε την εξίσωση του περιγγεγραμμένου κύκλου στο τετράγωνο του ερωτήματος α)

γ) Αν μια ευθεία που έχει κλίση ίση με την εκκεντρότητα των ελλείψεων να υπολογίσετε την εφαπτόμενη της γωνίας που σχηματίζει με τον άξονα x΄x.

Λύση

α) Επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων των ελλείψεων. Εξυπηρετεί να θέσουμε $x^2=\kappa$, $y^2=\lambda$. Από την επίλυση έχουμε $\kappa=\lambda=\frac{1}{3}$.

Συμπεραίνουμε ότι τα κοινά σημεία είναι τα $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, τα οποία σχηματίζουν τετράγωνο με πλευρά $\frac{2}{\sqrt{3}}$



β) Ο κύκλος έχει κέντρο Ο και ακτίνα τέτοια ώστε

$$R^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

Η εξίσωση του κύκλου είναι

$$x^2+y^2=\frac{2}{3}$$

γ) Οι ελλείψεις έχουν ίσες εκκεντρότητες οι οποίες είναι

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha}=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}{1}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Αν ω η ζητούμενη γωνία τότε

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,y)$ του επιπέδου των οποίων η απόσταση από το σημείο $K(0,5)$ ισούται με τα $\frac{5}{3}$ της απόστασής τους από την ευθεία $\varepsilon: 5y-9=0$ είναι η υπερβολή

$$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$$

β) Να υπολογίσετε τις εστίες, τις ασύμπτωτες και την εκκεντρότητα της υπερβολής

Λύση

α) Για το τυχαίο σημείο Μ ισχύει:

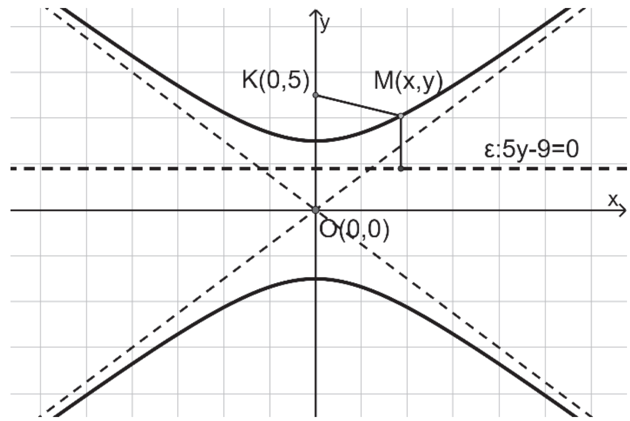
$$(MK)=\frac{5}{3}d(M,\varepsilon)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+(y-5)^2}=\frac{5}{3}\cdot\frac{|5y-9|}{\sqrt{5^2}}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2+y^2-10y+25}=\frac{|5y-9|}{3}\Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2-10y+25=\frac{(5y-9)^2}{9}\Leftrightarrow$$

$$9x^2+9y^2-90y+225=25y^2-90y+81\Leftrightarrow$$

$$9x^2-16y^2=-144\Leftrightarrow\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$$



β) Για την υπερβολή έχουμε $\alpha^2=9$, $\beta^2=16$, $\gamma^2=16+9=25$.

Οι εστίες είναι:

$$E'(0,-5), E(0,5)$$

$$\alpha^2=9\Rightarrow\alpha=3,$$

$$\beta^2=16\Rightarrow\beta=4 \text{ και}$$

$$\gamma^2=25\Rightarrow\gamma=5.$$

Άρα η εκκεντρότητα είναι $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{5}{3}$ και οι εξισώσεις των ασύμπτωτων είναι $y=\pm\frac{3}{4}x$

Τάξη: Γ΄

Θέματα Ανάλυσης

Δημήτρης Ανδριώτης

1. Έστω $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο O(0, 0) και για κάθε $x>0$ ισχύει $(x+1)^2 f'(x)+x=0$

α. Να βρείτε τον τύπο της.

Έστω $f(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1),\ x>-1$

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha<0$ η εξίσωση

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=-\alpha+\ln\frac{ex}{(x+1)^2}$$

έχει μοναδική θετική ρίζα.

δ. Να μελετήσετε την f ως προς τη κυρτότητα.

ε. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\xi\in(0,1)$ υπάρχουν $x_1, x_2\in(0,1)$ ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$

ΛΥΣΗ

α. Για κάθε x>–1 έχουμε:

$$f'(x)=-\frac{x}{(x+1)^2}\Rightarrow f'(x)=-\frac{x+1-1}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\left(-\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\right)'$$

$$\Rightarrow f(x)=-\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}+c$$

Επιπλέον, $f(0)=0$, οπότε: $c-1=0\Rightarrow c=1$

Άρα,

$$f(x)=-\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}+1$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1),\ x>-1$$

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με $f'(x)=-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{1-x-1}{(x+1)^2}=-\dfrac{x}{(x+1)^2}$

απ' όπου, εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1=(-1,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=[0,+\infty)$.

Σε ότι αφορά στα ακρότατα, η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για x=0.
Η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με $f(0)=0$.

Επιπλέον,

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\left(\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)\right)$$

$$=\lim_{x\to-1^+}\frac{x}{x+1}\left(1-\frac{x+1}{x}\ln(x+1)\right)=-\infty$$

Διότι $\displaystyle\lim_{x\to-1^+}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\left(x\cdot\frac{1}{x+1}\right)=-\infty$ και

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x+1}{x}\ln(x+1)=\lim_{x\to-1^+}\frac{\ln(x+1)}{\frac{x}{x+1}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to-1^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{(x+1)^2}}=0$$

Επιπλέον, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)\right)=-\infty$

Επίσης η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στα Δ_1, Δ_2. Επομένως,

$$f(\Delta_1)=(-\infty,0]\ \text{και}\ f(\Delta_2)=(-\infty,0]$$

οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(\Delta_1\cup\Delta_2)=(-\infty,0]$$

γ. Η εξίσωση ορίζεται μόνο όταν x>0. Με αυτόν τον περιορισμό, έχουμε:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=-\alpha+\ln\frac{ex}{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1}-\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)=-\alpha+\ln(xe)-\ln(x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{x+1}-\ln\frac{x+1}{x}=\ln e+\ln x-\ln(x+1)^2-\alpha$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{x+1}-\ln(x+1)+\ln x=1+\ln x-2\ln(x+1)-\alpha$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{x+1}+\ln(x+1)=1-\alpha\Leftrightarrow\alpha=1-\frac{1}{x+1}-\ln(x+1)$$

$$\Leftrightarrow\alpha=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)\Leftrightarrow f(x)=\alpha$$

Επειδή $\alpha<0$, ο αριθμός α περιέχεται στο $f(\Delta_2)=(-\infty,0]$ οπότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει λύση στο Δ_2.

Η λύση της εξίσωσης δεν είναι ο αριθμός 0, αφού $f(0)=0$, οπότε είναι θετικός αριθμός.

Τέλος, λόγω της μονοτονίας της f στο Δ_2, η λύση είναι μοναδική.

δ. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με

$$f''(x)=\left(-\frac{x}{(x+1)^2}\right)'=-\frac{(x+1)^2-2(x+1)x}{(x+1)^4}$$
$$=-\frac{x+1-2x}{(x+1)^3}=\frac{x-1}{(x+1)^3}$$

Εύκολα πλέον βρίσκουμε ότι η f είναι κυρτή στο διάστημα $[1,+\infty)$ και κοίλη στο $(-1,1]$.

ε. Έστω ξ τυχαίος αριθμός του διαστήματος $(0,1)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=f(x)-xf'(\xi),\ x\in[0,1]$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με

$$g'(x)=f'(x)-f'(\xi)$$

και επειδή η f είναι κοίλη στο διάστημα $[0,1]$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό, οπότε:

- Αν $0<x<\xi$ τότε $f'(x)>f'(\xi)\Rightarrow g'(x)>0$

οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,\xi]$.

- Αν $\xi<x<1$ τότε $f'(x)<f'(\xi)\Rightarrow g'(x)<0$

οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\xi,1]$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=\xi$, οπότε για κάθε $x\neq\xi$ ισχύει $g(x)<g(\xi)$.

Έστω τώρα M ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς $g(0),\ g(1)$.

Για οποιοδήποτε αριθμό κ που περιέχεται στο διάστημα $[M,g(\xi))$, προφανώς ισχύει

$$\kappa\in g\big([0,\xi)\big)\text{ και }\kappa\in g\big((\xi,1]\big)$$

οπότε υπάρχουν $x_1\in[0,\xi)$ και $x_2\in(\xi,1]$ ώστε $g(x_1)=\kappa=g(x_2)$. Έτσι, έχουμε:

$$g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow f(x_1)-x_1f'(\xi)=f(x_2)-x_2f'(\xi)$$
$$\Rightarrow f(x_1)-f(x_2)=x_1f'(\xi)-x_2f'(\xi)$$
$$\Rightarrow(x_1-x_2)f'(\xi)=f(x_1)-f(x_2)\Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

που είναι το ζητούμενο.

2. Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο συναρτήσεις ώστε

- **Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη**
- **$f(0)=1,\ f'(0)=-1$**
- **$f^2(x)+f'(x)f''(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**
- **$g(x)=-x^2-ex+1$**

α. Να αποδείξετε ότι

i. $f'(x)=-f(x)$

ii. $f(x)=e^{-x}$

β. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν δυο μόνο κοινά σημεία με τετμημένες $-1,\ 0$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{f(x)+f(x+1)+f(x+2)}{e^2+e+1}=\frac{1}{e^2}$$

δ. Να αποδείξετε ότι αν για κάποια παραγωγίσιμη συνάρτηση h ισχύει

$$h'(x)=\big(g(x)h'(x)+h(x)\big)e^x$$

τότε η h είναι σταθερή στο διάστημα $[-1,0]$.

ΛΥΣΗ

α. **i.** Είναι:

$$f^2(x)+f'(x)f''(x)=0\Rightarrow 3f^2(x)f'(x)+3\big(f'(x)\big)^2f''(x)=0$$
$$\Rightarrow\left[\big(f(x)\big)^3\right]'=\left[\big(-f'(x)\big)^3\right]'\Rightarrow\big(f(x)\big)^3=\big(-f'(x)\big)^3+c$$

απ' όπου, με δεδομένο ότι $f(0)=1$ και $f'(0)=-1$, βρίσκουμε $c=0$. Άρα,

$$\big(f(x)\big)^3=\big(-f'(x)\big)^3\Rightarrow f'(x)=-f(x)$$

ii. Με $f'(x)=-f(x)$, έχουμε:

$$e^xf(x)+e^xf'(x)=0\Rightarrow\big(e^xf(x)\big)'=0\Rightarrow e^xf(x)=c_1$$

Επιπλέον, $f(0)=1$, οπότε $e^0=c_1\Rightarrow c_1=1$.

Άρα, $f(x)=e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$.

β. Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=e^{-x}$ και $g(x)=-x^2-ex+1$ προσδιορίζονται από τη λύση της εξίσωσης $e^{-x}+x^2+ex-1=0$.

Προφανώς οι αριθμοί -1 και 0 είναι λύσεις της εξίσωσης.

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση δεν έχει άλλη λύση. Έστω ότι η εξίσωση έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες α, β, γ με $\alpha<\beta<\gamma$ (φυσικά οι δυο από αυτές είναι οι αριθμοί $-1,\ 0$).

Τότε σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha,\beta]$, $[\beta,\gamma]$ ισχύουν για την $\varphi(x)=e^{-x}+x^2+ex-1$ οι υποθέσεις για την εφαρμογή του Θ. Rolle, οπότε υπάρχουν $\rho_1\in(\alpha,\beta)$ και $\rho_2\in(\beta,\gamma)$ ώστε $\varphi'(\rho_1)=0=\varphi'(\rho_2)$.

Αν τώρα εφαρμόσουμε το Θ. Rolle για την

$$\varphi'(x)=-e^{-x}+2x+e$$

στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\rho\in(\rho_1,\rho_2)$ με $\varphi''(\rho)=0$, που είναι άτοπο αφού $\varphi''(x)=e^{-x}+2>0$.

Επομένως, η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μόνο δυο λύσεις, τους αριθμούς –1 και 0, οπότε οι C_f, C_g έχουν δυο μόνο κοινά σημεία με τετμημένες $-1, 0$.

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$t(x)=f(x)+f(x+1)+f(x+2),\ x\in\mathbb{R}$$

Η t είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$t'(x)=f'(x)+f'(x+1)+f'(x+2)<0$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αφού $f'(x)<0$.

Άρα η t είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Επιπλέον, $\dfrac{f(x)+f(x+1)+f(x+2)}{e^2+e+1}=\dfrac{1}{e^2}$

$$\Leftrightarrow f(x)+f(x+1)+f(x+2)=\frac{e^2+e+1}{e^2}$$

$$\Leftrightarrow f(x)+f(x+1)+f(x+2)=1+\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}$$

$$\Leftrightarrow f(x)+f(x+1)+f(x+2)=f(0)+f(1)+f(2)$$

$$\Leftrightarrow t(x)=t(0)\overset{t\ \text{"1-1"}}{\Leftrightarrow} x=0$$

δ. Είναι:

$h'(x)=\big(g(x)h'(x)+h(x)\big)e^x \Leftrightarrow$

$h'(x)e^{-x}=g(x)h'(x)+h(x)\Leftrightarrow h'(x)\big(g(x)-e^{-x}\big)-h(x)=0\Leftrightarrow$

$h'(x)\varphi(x)-h(x)=0$, (1) με $\varphi(-1)=\varphi(0)=0$, οπότε $h(-1)=h(0)=0$.

Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση h δεν είναι σταθερή στο κλειστό διάστημα $[-1,0]$, τότε η μέγιστη ή η ελάχιστη τιμή της θα είναι διαφορετική από τις τιμές της στα σημεία $-1, 0$, οπότε υπάρχει x_o που περιέχεται στο διάστημα $(-1,0)$ ώστε η $h(x_o)$ να είναι ακρότατη τιμή της $h(x)$ και $h(x_o)\neq 0$. Τότε όμως απ' το Θ. Fermat θα είναι $h'(x_o)=0$ και από την (1) παίρνουμε $h(x_o)=0$ που αποκλείεται. Άρα, η συνάρτηση h είναι σταθερή στο διάστημα $[-1,0]$.

3. Δίνεται η συνάρτηση

$f(x)=e^{x-1}-\ln x+1,\ x>0$ και η παραβολή

$$y=-(x-1)^2,\ x\in\mathbb{R}.$$

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$e^{x-1}+1=e^2+\ln\frac{ex}{3}$$

γ. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to1}\big(f(x)-2\big)\eta\mu\frac{f(x)}{x-1}$$

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(x)-1}{x-1}=\frac{\eta\mu x-2}{x-2}$$

έχει ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

ε. Μετακινούμε την παραβολή κατακόρυφα, λ μονάδες προς τα πάνω. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η C_f και η παραβολή τέμνονται σε δυο σημεία.

ΛΥΣΗ

α. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x}$ και $f''(x)=e^{x-1}+\dfrac{1}{x^2}$

Επειδή $f''(x)>0$ για κάθε $x>0$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επίσης $f'(1)=0$, οπότε έχουμε:

- Αν $x\in(0,1)$ τότε $f'(x)<f'(1)\Rightarrow f'(x)<0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$.
- Αν $x\in(1,+\infty)$ τότε $f'(x)>f'(1)\Rightarrow f'(x)>0$ οπότε η f είναι και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[1,+\infty)$.

Αυτό σημαίνει ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x=1, το $f(1)=1+1=2$

Επιπλέον, η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Τέλος, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^{x-1}-\ln x+1\right)=+\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x-1}-\ln x+1\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[e^{x-1}\left(1-\frac{\ln x}{e^{x-1}}+\frac{1}{e^{x-1}}\right)\right]=+\infty$$

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x-1}}=0$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^{x-1}} \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}=\frac{\frac{1}{x}}{e^{x-1}}=0$$

Έτσι, σε συνδυασμό με τη μονοτονία της συνεχούς συνάρτησης f στα Δ_1, Δ_2 συμπεραίνουμε ότι $f(\Delta_1)=[2,+\infty)$ και $f(\Delta_2)=[2,+\infty)$

οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[2,+\infty)$.

β. Με x>0 έχουμε: $e^{x-1}+1=e^2+\ln x+1-\ln 3 \Leftrightarrow$
$e^{x-1}-\ln x+1=e^2-\ln 3+1 \Leftrightarrow f(x)=f(3)$

Αν x≥1 τότε η f είναι «1–1» οπότε

$$f(x)=f(3)\Leftrightarrow x=3$$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση έχει μια ακόμα ρίζα στο διάστημα $(0,1)$. Επειδή ο αριθμός f(3) περιέχεται στο διάστημα $f(\Delta_2)$ θα περιέχεται και στο $f(\Delta_1)$ που ταυτίζεται μ' αυτό, οπότε η $f(x)=f(3)$ έχει λύση και στο Δ_1. Επιπλέον είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1, οπότε η ρίζα είναι μοναδική στο διάστημα Δ_1.

Άρα, η δοσμένη εξίσωση έχει ακριβώς δυο ρίζες.

γ. Είναι: $\lim\limits_{x\to1}\big(f(x)-2\big)=f(1)-2=0$ και $\left|\eta\mu\dfrac{f(x)}{x-1}\right|\le 1$,

οπότε $\left|\big(f(x)-2\big)\eta\mu\dfrac{f(x)}{x-1}\right|\le|f(x)-2|$

$$\Rightarrow -|f(x)-2|\le\big(f(x)-2\big)\eta\mu\frac{f(x)}{x-1}\le|f(x)-2|$$

Επιπλέον, $\lim\limits_{x\to1}\big(-|f(x)-2|\big)=\lim\limits_{x\to1}|f(x)-2|=0$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to1}\big(f(x)-2\big)\eta\mu\dfrac{f(x)}{x-1}=0$

δ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση

$$(x-2)\big(f(x)-1\big)-(x-1)(\eta\mu x-2)=0,\quad (1)$$

έχει ρίζα στο διάστημα $(1,2)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=(x-2)\big(f(x)-1\big)-(x-1)(\eta\mu x-2),\ 1\le x\le 2$$

Η g είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων και

- $g(1)=-1(f(1)-1)=-(2-1)=-1<0$
- $g(2)=-1(\eta\mu 2-2)>0$, διότι για κάθε x>0 από την $|\eta\mu x|<|x|$ συμπεραίνουμε ότι

$$|\eta\mu x|<x\Rightarrow -x<\eta\mu x<x\Rightarrow \eta\mu x-x<0$$

Διαφορετικά: $\eta\mu 2<1<2\Rightarrow \eta\mu 2-2<0$

Άρα, εφαρμόζεται για την g το Θ. Bolzano, οπότε η εξίσωση $g(x)=0$, δηλαδή η (1) έχει ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

ε. Αρκεί να βρούμε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $f(x)=-(x-1)^2+\lambda$ έχει δυο ρίζες. Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$e^{x-1}-\ln x+1+(x-1)^2=\lambda,\quad (2)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=e^{x-1}-\ln x+1+(x-1)^2,\quad x>0.$$

Η h είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$h'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}+2(x-1) \text{ και } h''(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x^2}+2$$

Επειδή $h''(x)>0$ για κάθε x>0, η h' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Επίσης $h'(1)=0$, οπότε έχουμε: Αν $x\in(0,1)$ τότε

$$h'(x)<h'(1)\Rightarrow h'(x)<0$$

οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ ενώ αν x>1 τότε

$$h'(x)>h'(1)\Rightarrow h'(x)>0$$

και η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[1,+\infty)$.

Αυτό σημαίνει ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x=1, το $h(1)=1+1=2$

Επιπλέον, $\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=+\infty$, $h(1)=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$

οπότε, σε συνδυασμό και με τη συνέχεια της f, παίρνουμε $h(\Delta_1)=[2,+\infty)$ και $h(\Delta_2)=[2,+\infty)$.

Επομένως, για οποιοδήποτε λ με λ>2 η εξίσωση (2) έχει ακριβώς μια λύση σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1 και Δ_2 οπότε η εξίσωση έχει ακριβώς δυο λύσεις.

4. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν

- $f'(x)=2x\big(1-f(x)\big)$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=0$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=1-e^{-x^2}$, $x\in\mathbb{R}$

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ. Να προσδιορίσετε, για τις διάφορες τιμές του α, το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$e^{x^2}-e^{\alpha}\cdot e^{x^2}=1$$

δ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την $x=2$, αν $g(x)=xf(x)$

ε. Το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sqrt{f(x)}}$

ΛΥΣΗ

α. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)e^{x^2}-e^{x^2}=-1$ ή αρκεί: $(f(x)-1)e^{x^2}=-1$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=(f(x)-1)e^{x^2},\ x\in\mathbb{R}.$$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$h'(x)=f'(x)e^{x^2}+2x(f(x)-1)e^{x^2}$$
$$=2x(1-f(x))e^{x^2}+2x(f(x)-1)e^{x^2}$$
$$=2x(1-f(x)+f(x)-1)e^{x^2}=0$$

Άρα, υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ ώστε $h(x)=c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0$, οπότε $(f(0)-1)e^{0}=c\Rightarrow c=-1$

Έχουμε λοιπόν,

$$h(x)=-1\Rightarrow(f(x)-1)e^{x^2}=-1$$
$$\Rightarrow f(x)-1=-e^{-x^2}\Rightarrow f(x)=1-e^{-x^2},\ x\in\mathbb{R}$$

που είναι το ζητούμενο.

β. Είναι: $f'(x)=2xe^{-x^2}$ και

$$f''(x)=2e^{-x^2}-4x^2e^{-x^2}=2(1-2x^2)e^{-x^2}$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι:

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=0$, το $f(0)=0$.

Επιπλέον,

$$f''(x)\ge 0\Leftrightarrow 1-2x^2\ge 0\Leftrightarrow x^2\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}\le f(x)\le\frac{\sqrt{2}}{2}$$

απ' όπου εύκολα συμπεραίνουμε ότι η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ και το $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ και κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Ισχύουν:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-e^{-x^2}\right)=1,$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-e^{-x^2}\right)=1$$

οπότε, αν $\Delta_1=(-\infty,0]$ και $\Delta_2=[0,+\infty)$ τότε λόγω της μονοτονίας και της συνέχειας της f παίρνουμε: $f(\Delta_1)=f(\Delta_2)=[0,1)$.

Άρα

$$f(\mathbb{R})=f(\Delta_1\cup\Delta_2)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[0,1)$$

γ. Είναι:

$$e^{x^2}-e^{\alpha}e^{x^2}=1\Leftrightarrow 1-e^{\alpha}=e^{-x^2}\Leftrightarrow -e^{\alpha}=-1+e^{-x^2}$$
$$\Leftrightarrow 1-e^{-x^2}=e^{\alpha}\Leftrightarrow f(x)=e^{\alpha}$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:

- Αν $\alpha<0$, τότε $e^{\alpha}\in(0,1)\subseteq[0,1)$ δηλαδή $e^{\alpha}\in f(\Delta_1)$ και $e^{\alpha}\in f(\Delta_2)$ οπότε η εξίσωση έχει από μια ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1 και Δ_2.
- Αν $\alpha\ge 0$, τότε $e^{\alpha}\ge 1$ οπότε ο αριθμός e^{α} δεν περιέχεται στο σύνολο τιμών της f, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

δ. Επειδή για κάθε $x\ge 0$ έχουμε $g(x)=xf(x)\ge 0$, το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με

$$E=\int_0^2 g(x)dx=\int_0^2\left(x-xe^{-x^2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^2+e^{-x^2}\right)'dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[x^2+e^{-x^2}\right]_0^2=\frac{1}{2}\left(4+e^{-4}-0-1\right)=\frac{1}{2}\left(e^{-4}+3\right)$$

ε. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x)=\frac{x^2}{1-e^{-x^2}},\ x>0$$

Προφανώς

$$\frac{x}{\sqrt{f(x)}}=\sqrt{\varphi(x)}$$

αφού $f(x)>0$ για κάθε $x>0$ και:

$$\lim_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{1-e^{-x^2}}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{2xe^{-x^2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{e^{-x^2}}=1$$

Έτσι έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=1\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\varphi(x)}=\sqrt{1}\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{f(x)}}=1$$

5. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- $f(0)=1$
- $\left(f(x)-e^{-x}\right)\left(f'(x)+e^{-x}\right)=0$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$

β. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ αντιστρέφεται και να βρείτε την g^{-1}.

γ. Αν $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε $h(x)=f\left(h(x)-x\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:

i. Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της h.

ii. Να αποδείξετε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Να βρείτε το $h(1)$ και να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha>1$ ισχύει:

$$\alpha-\frac{3}{\alpha}+2<\int_1^{\alpha}\frac{4h(x)}{\alpha}dx<2\alpha-\frac{2}{\alpha}$$

ΛΥΣΗ

α. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x)=f(x)-e^{-x},\ x\in\mathbb{R}.$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$\left(f(x)-e^{-x}\right)\left(f'(x)+e^{-x}\right)=0\Rightarrow\left(f(x)-e^{-x}\right)\left(f(x)-e^{-x}\right)'=0$$

$$\Rightarrow F(x)F'(x)=0\Rightarrow\left(\frac{1}{2}F^2(x)\right)'=0\Rightarrow\frac{1}{2}F^2(x)=c$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\left(f(x)-e^{-x}\right)^2=c$$

και $f(0)-e^{0}=1-1=0$, οπότε c=0

Άρα, $f(x)-e^{-x}=0$, οπότε $f(x)=e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

β. Είναι:

$$g(x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}$$

Αναζητούμε για ποιες τιμές του y η εξίσωση $g(x)=y$, έχει ως προς x, πραγματική ρίζα.

Έχουμε:

$$2y=e^{-x}-e^{x}\Leftrightarrow 2y=\frac{1}{e^x}-e^x\Leftrightarrow e^{2x}-2ye^x-1=0$$

$$\Leftrightarrow e^x=\frac{2y+2\sqrt{y^2+1}}{2}=y+\sqrt{y^2+1}$$

$$\text{ή }\ e^x=\frac{2y-2\sqrt{y^2+1}}{2}=y-\sqrt{y^2+1},\ (1)$$

Η δεύτερη περίπτωση αποκλείεται διότι για κάθε $y\in\mathbb{R}$ είναι

$$\sqrt{y^2+1}>\sqrt{y^2}=|y|\Rightarrow-\sqrt{y^2+1}<-|y|$$

$$\Rightarrow y-\sqrt{y^2+1}<y-|y|\le 0$$

και $e^x>0$. Έτσι, έχουμε:

$$(1)\Leftrightarrow x=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$$

οπότε για κάθε $y\in\mathbb{R}$, η εξίσωση $g(x)=y$, έχει ως προς x, μια πραγματική ρίζα.

Άρα, η g αντιστρέφεται και

$$g^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\ x\in\mathbb{R}.$$

γ.i. Είναι:

$$h(x)=e^{-(h(x)-x)}\Rightarrow h(x)=e^{x-h(x)}$$

και

$$e^{x-h(x)}>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Άρα, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $h(x)>0$.

ii. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$h'(x)=e^{x-h(x)}\left(1-h'(x)\right)\Rightarrow h'(x)=h(x)\left(1-h'(x)\right)$$

$$\Rightarrow h'(x)=h(x)-h(x)h'(x)$$

$$\Rightarrow\left(1+h(x)\right)h'(x)=h(x)\Rightarrow h'(x)=\frac{h(x)}{1+h(x)}>0$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα, η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iii. Έστω $h(1)=\beta$, $\beta>0$. Τότε έχουμε:

$$\beta=e^{1-\beta}\Leftrightarrow\beta e^{\beta}-e=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=xe^x-e$, $x>0$

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$\varphi'(x)=(x+1)e^x>0$$

οπότε είναι γνησίως αύξουσα και κατά συνέπεια «1-1». Επιπλέον, $\varphi(1)=0$, οπότε ο αριθμός 1 είναι η μοναδική ρίζα της. Άρα $\beta=h(1)=1$.

Αν στην γνωστή ανισότητα $\ln x\le x-1$ θέσουμε e^x στο x, έχουμε για κάθε $x\in\mathbb{R}$:

$$\ln e^x\le e^x-1\Rightarrow x\le e^x-1\Rightarrow e^x\ge x+1$$

οπότε

$$h(x)=e^{x-h(x)}\ge x-h(x)+1\Rightarrow 2h(x)\ge x+1\Rightarrow h(x)\ge\frac{x+1}{2}$$

Επίσης, αν $H(x)=h(x)-x$, $x\in\mathbb{R}$, τότε

$$H'(x)=\frac{h(x)}{1+h(x)}-1=\frac{h(x)-1-h(x)}{1+h(x)}=-\frac{1}{1+h(x)}<0$$

οπότε η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα. Επιπλέον, $H(1)=0$, οπότε για κάθε $x>1$ έχουμε

$$h(x)<H(1)\Rightarrow H(x)<0\Rightarrow h(x)<x$$

Τώρα, για την απόδειξη της

$$\alpha-\frac{3}{\alpha}+2<\int_1^\alpha\frac{4h(x)}{\alpha}dx<2\alpha-\frac{2}{\alpha}$$

αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\alpha^2+2\alpha-3<\int_1^\alpha 4h(x)dx<2(\alpha^2-1)$$

ή αρκεί

$$\frac{\alpha^2+2\alpha-3}{4}<\int_1^\alpha h(t)dt<\frac{1}{2}(\alpha^2-1)$$

Αλλά,

$$\frac{x+1}{2}\le h(x)<x$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$, οπότε:

$$\frac{1}{2}\int_1^\alpha(x+1)dx<\int_1^\alpha h(t)dt<\int_1^\alpha tdt$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_1^\alpha<\int_1^x h(x)dx<\frac{1}{2}[x^2]_1^\alpha$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{2}+\alpha-\frac{1}{2}-1\right)<\int_1^\alpha h(x)dx<\frac{1}{2}(\alpha^2-1)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{2}+\alpha-\frac{3}{2}\right)<\int_1^\alpha h(x)dx<\frac{1}{2}(\alpha^2-1)$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha^2+2\alpha-3}{4}<\int_1^\alpha h(x)dx<\frac{1}{2}(\alpha^2-1)$$

που είναι το ζητούμενο.

6. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύουν

- $xf(x^2)=2f(x)$ για κάθε $x>0$
- $f(x)>0$ για κάθε $x>1$

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_o\in(2,\,4)$ ώστε

$$f'(x_o)=0$$

β. Αν $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\neq x_o$, να εξετάσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_o.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>f(2)$.

δ. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell$, $\ell\in\mathbb{R}$, να βρείτε τον αριθμό ℓ.

ε. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\alpha>1$ ώστε

$$\alpha^2f'(\alpha)+\ln\alpha=1$$

στ. Αν επιπλέον για κάθε $x>0$ ισχύει

$$xf(x)+x^4f'(x^2)+\ln x=1$$

να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

ΛΥΣΗ

α. Η δοσμένη ισότητα για $x=2$, γράφεται:

$$2f(4)=2f(2)\Rightarrow f(4)=f(2)$$

επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [2, 4] οπότε απ' το Θ. Rolle προκύπτει ότι υπάρχει $x_o\in(2,\,4)$ ώστε $f'(x_o)=0$

β. Από τη δοσμένη ισότητα, με παραγώγιση των μελών της, έχουμε:

$$f(x^2)+2x^2f'(x^2)=2f'(x),\qquad(1)$$

Η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(0,\,x_o)$ και $(x_o,+\infty)$

Η (1) με $x=x_o$, γράφεται:

$$f(x_o^2)+2x_o^2f'(x_o^2)=2f'(x_o)\Rightarrow f'(x_o^2)=-\frac{f(x_o^2)}{2x_o^2}<0$$

αφού

$$x_o>1\Rightarrow x_o^2>1\Rightarrow f(x_o^2)>0$$

οπότε $f'(x_o^2)<0$, με $x_o^2>x_o$

Άρα, για κάθε

έχουμε $f'(x)<0$ οπότε η f, που είναι συνεχής και στο x_o, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[x_o,+\infty)$.

Η (1) με $x=\sqrt{x_o}$, γράφεται:

$$f(x_o)+2x_of'(x_o)=2f'\left(\sqrt{x_o}\right)\Rightarrow f'\left(\sqrt{x_o}\right)=\frac{1}{2}f(x_o)>0$$

αφού

$$x_o>1\Rightarrow f(x_o)>0$$

οπότε $f'\left(\sqrt{x_o}\right)>0$. Επιπλέον,

$$x_o>1\Rightarrow\sqrt{x_o}<x_o$$

οπότε $\sqrt{x_o}\in(0,x_o)$

Άρα, για κάθε $x<x_o$ έχουμε $f'(x)>0$, οπότε η f, που είναι συνεχής και στο x_o, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,\,x_o]$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = x_o$.

γ. Θα λύσουμε την ανίσωση χωριστά σε κάθε διάστημα μονοτονίας της.

- Λύση στο διάστημα $(0, x_o]$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, x_o]$, οπότε στο διάστημα αυτό έχουμε:

$$f(x) > f(2) \Leftrightarrow 2 < x \le x_o$$

Άρα κάθε αριθμός του διαστήματος $(2, x_o]$ είναι λύση της ανίσωσης.

- Λύση στο διάστημα $[x_o, +\infty)$

Επειδή $f(2) = f(4)$ η ανίσωση είναι ισοδύναμη με την $f(x) > f(4)$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[x_o, +\infty)$, οπότε στο διάστημα αυτό έχουμε:

$$f(x) > f(4) \Leftrightarrow x_o \le x < 4$$

Άρα κάθε αριθμός του διαστήματος $[x_o, 4)$ είναι λύση της ανίσωσης.

Επομένως, η δοσμένη ανίσωση έχει ως λύση, κάθε αριθμό του διαστήματος $(2, 4)$.

δ. Έστω $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. Τότε από τη δοσμένη ισότητα παίρνουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(xf(x^2)\right) = 2\ell$$

και αν θέσουμε $x = u^2$, τότε $(x \to +\infty \Rightarrow u^2 \to +\infty)$, έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{u\to+\infty} f(u^2) = \lim_{u\to+\infty}\left\{\frac{1}{u}.uf(u^2)\right\} = 2\ell \cdot 0 = 0$$

Άρα, ℓ=0.

ε. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - \frac{\ln x}{x},\ x > 0.$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [2, 4] με

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1-\ln x}{x^2} \text{ και}$$

$$g(4) = f(4) - \frac{\ln 4}{4} = f(2) - \frac{\ln 2^2}{4} = f(2) - \frac{\ln 2}{4} = g(2)$$

οπότε απ' το Θ. Rolle, υπάρχει $\alpha \in (2, 4)$ (προφανώς $\alpha > 1$) ώστε $g'(\alpha) = 0$ και

$$g'(\alpha) = 0 \Rightarrow f'(\alpha) - \frac{1-\ln\alpha}{\alpha^2} = 0 \Rightarrow \alpha^2 f'(\alpha) + \ln\alpha = 1$$

που είναι το ζητούμενο.

στ. Για κάθε $x>0$, έχουμε:

$$xf(x) + x^4 f'(x^2) + \ln x = 1$$

$$\Rightarrow f(x) + x^3 f'(x^2) = \frac{1-\ln x}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{xf(x^2)}{2} + x^3 f'(x^2) = \frac{1-\ln x}{x} \Rightarrow f(x^2) + 2x^2 f'(x^2) = 2\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} 2f'(x) = 2\frac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)'$$

Άρα, για κάθε $x>0$είναι

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + c$$

και $f(1) = 0$ οπότε $c=0$. Επομένως,

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},\ x > 0.$$

Εναλλακτική λύση για το ερώτημα (β).

Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(0, x_o]$ και $[x_o, +\infty)$ και η παράγωγός της δεν μηδενίζεται σε κανένα εσωτερικό σημείο τους. Επιπλέον η f' είναι συνεχής, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο εσωτερικό αυτών.

Άρα η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $(0, x_o]$ και $[x_o, +\infty)$.

Αλλά, $f(1) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x>1$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, x_o]$.

Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα $[x_o, +\infty)$. Τότε θα ήταν γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, οπότε $f(2) < f(4)$, άτοπο.

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[x_o, +\infty)$, οπότε παρουσιάζει ακρότατο (ολικό μέγιστο) στο x_o.

Το Βήμα του Ευκλείδη

Τα τετράγωνα στην Άλγεβρα

Ίρια Αναγνωστοπούλου – Γιώργος Τσαπακίδης

Τετράγωνα παραστάσεων εμφανίζονται στον αλγεβρικό λογισμό τόσο της σχολικής ύλης, όσο και σε θέματα μαθηματικών διαγωνισμών.

Στο άρθρο αυτό θα μελετήσουμε τη χρήση τετραγώνων σε διάφορες περιοχές της άλγεβρας σε σχέση με μαθηματικούς διαγωνισμούς.

Α. ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ ΣΤΙΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε εφαρμογές των πολύ γνωστών ταυτοτήτων:

- $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\,\alpha\,\beta+\beta^2$
- $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\,\alpha\,\beta+\beta^2$
- $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$.

Και των απλών προτάσεων:

- $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2=0 \Leftrightarrow \mathrm{A}=\mathrm{B}=\Gamma=0$
- Αν $\kappa,\lambda,\mu>0$ και $\kappa A^2+\lambda B^2+\mu\Gamma^2=0$, τότε $A=B=\Gamma=0$.

Πρόβλημα 1. Δείξτε ότι ο αριθμός $\sqrt{2024^2+2024^2\cdot 2025^2+2025^2}$ είναι φυσικός.

Σκέψεις: Προφανώς, αρκεί να δείξουμε ότι το υπόρριζο είναι τετράγωνο φυσικού.

Αλλά πώς;

Χρησιμοποιώντας τη σύνδεση των *2024* και *2025* : *2025 = 2024 + 1*.

Για την ευκολία των υπολογισμών, αν θέσουμε $x=2024$, τότε $2025=x+1$.

Απόδειξη: Είναι $2024^2+2024^2\cdot 2025^2+2025^2=x^2+x^2(x+1)^2+(x+1)^2= x^2+x^2(x^2+2x+1)+x^2+2x+1=x^2+x^4+2x^3+x^2+x^2+2x+1=(x^2)^2+x^2+1^2+2x^2\cdot x+2x^3\cdot 1+2x\cdot 1=(x^2+x+1)^2$, επομένως $\sqrt{(x^2+x+1)^2}= x^2+x+1=2024^2+2024+1$,
που είναι φυσικός αριθμός.

Πρόβλημα 2. Αν για τους θετικούς αριθμούς α,β,γ ισχύει

$$\alpha\beta\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\gamma\right)+\beta\gamma\left(\frac{\beta+\gamma}{2}-\alpha\right)+\gamma\alpha\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)=0,\quad \text{δείξτε ότι } \alpha=\beta=\gamma. \qquad (\text{Θαλής})$$

Σκέψεις: Κοιτάξτε το ζητούμενο: $\alpha=\beta=\gamma$.

Πώς αναλύεται; $\alpha=\beta$ *και* $\beta=\gamma$ *και* $\gamma=\beta$.

Ποιας σχέσης είναι απόρροια οι παραπάνω ισότητες;

Από την $\kappa_1(\alpha-\beta)^2+\kappa_2(\beta-\gamma)^2+\kappa_3(\gamma-\alpha)^2=0$ *με* $\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3>0$.

Απόδειξη: Μετά από τις πράξεις η υπόθεση γράφεται:

$$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-2\alpha\beta\gamma+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2-2\alpha\beta\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2-2\alpha\beta\gamma=0 \Leftrightarrow$$
$$\beta(\alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2)+\alpha(\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2)+\gamma(\beta^2+\alpha^2-2\alpha\beta)=0 \Leftrightarrow$$
$$\beta(\alpha-\beta)^2+\alpha(\beta-\gamma)^2+\beta=\gamma(\beta-\alpha)^2=0 \Leftrightarrow \alpha-\gamma=0 \text{ και } \beta-\gamma=0 \text{ και } \beta-\alpha=0$$
$$(\text{αφού } \alpha,\beta,\gamma>0) \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma.$$

Πρόβλημα 3. Αν οι α,β,γ είναι ακέραιοι και $\alpha+\beta+\gamma=0$, δείξτε ότι ο $2\alpha^4+2\beta^4+2\gamma^4$ είναι τετράγωνο ακεραίου.

Σκέψεις: Όσο λιγότερες μεταβλητές περιέχει μια αλγεβρική παράσταση, τόσο ευκολότερα είναι διαχειρίσιμη. Και πώς η $2\alpha^4+2\beta^4+2\gamma^4$ θα μετατραπεί σε παράσταση με λιγότερες μεταβλητές;

Αν αντικαταστήσουμε τη μια από αυτές σε συνάρτηση με τις δύο άλλες.

Απόδειξη: Είναι $\alpha+\beta+\gamma=0 \Leftrightarrow \gamma=-\alpha-\beta$, οπότε

$$2\alpha^4+2\beta^4+2\gamma^4=2\alpha^4+2\beta^4+2(\alpha+\beta)^4= 2\alpha^4+2\beta^4+2(\alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4)=$$
$$= 4\alpha^4+4\beta^4+8\,\alpha^3\beta+12\alpha^2\beta^2+8\alpha\beta^3=4(\alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta+3\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta^3)$$
$$= 4[(\alpha^2)^2+(\beta^2)^2+(\alpha\beta)^2+2\alpha^2\beta^2+2\alpha^3\beta+2\alpha\beta^3]=(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)^2= \text{τετράγωνο ακεραίου}.$$

Πρόβλημα 4. Αν $\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}+\frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2\gamma\alpha}+\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}=1$, δείξτε ότι δύο από τα κλάσματα του πρώτου μέλους της προηγούμενης ισότητας είναι ίσα με 1 και το άλλο με -1.

Σκέψεις: Η ύπαρξη του αθροίσματος των τετραγώνων δύο αριθμών και του διπλάσιου γινομένου τους είναι ξεκάθαρη ένδειξη τέλειου τετραγώνου αθροίσματος ή διαφοράς δύο αριθμών. Έτσι το πρόβλημα μετατρέπεται σε μεταφορά των παρονομαστών (διπλάσιων γινομένων) στους αριθμητές (αθροισμάτων τετραγώνων) στο πρώτο μέλος της δεδομένης ισότητας.

Τι πρέπει να κάνουμε, έτσι ώστε από το $\frac{\alpha}{\beta}$ να προκύψει το $\frac{\alpha\pm\beta}{\beta}$; Μα $\frac{\alpha\pm\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}\pm\frac{\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}\pm 1$.

Απόδειξη:

$$\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}+\frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2\gamma\alpha}+\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}-1+\frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2\gamma\alpha}-1+\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma-\alpha^2}{2\beta\gamma}+\frac{\gamma^2+\alpha^2-2\gamma\alpha-\beta^2}{2\gamma\alpha}+\frac{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-\gamma^2}{2\alpha\beta}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\beta-\gamma)^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}+\frac{(\gamma-\alpha)^2-\beta^2}{2\gamma\alpha}+\frac{(\alpha+\beta)^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\beta-\gamma-\alpha)(\beta-\gamma+\alpha)}{2\beta\gamma}+\frac{(\gamma-\alpha-\beta)(\gamma-\alpha+\beta)}{2\gamma\alpha}+\frac{(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)}{2\alpha\beta}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\beta-\gamma-\alpha)(\beta-\gamma+\alpha)}{2\beta\gamma}-\frac{(\alpha+\beta-\gamma)(\gamma-\alpha+\beta)}{2\gamma\alpha}+\frac{(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)}{2\alpha\beta}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta-\gamma)\left[\frac{\beta-\gamma-\alpha}{2\beta\gamma}-\frac{\gamma-\alpha+\beta}{2\gamma\alpha}+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2\alpha\beta}\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta-\gamma)\,\frac{\alpha(\beta-\gamma-\alpha)-\beta(\gamma-\alpha+\beta)+\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{2\alpha\beta\gamma}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta-\gamma)\,(\alpha\beta-\alpha\gamma-\alpha^2-\beta\gamma+\beta\alpha-\beta^2+\gamma\alpha+\gamma\beta+\gamma^2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta-\gamma)\,[(\gamma^2-(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)]=0 \Leftrightarrow (\alpha+\beta-\gamma)[\gamma^2-(\alpha-\beta)^2]=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta-\gamma)\,(\gamma-\alpha+\beta)(\gamma+\alpha-\beta)=0 \Leftrightarrow \gamma=\alpha+\beta \text{ ή } \alpha=\beta+\gamma \text{ ή } \beta=\gamma+\alpha.$$

Αν $\gamma=\alpha+\beta$, τότε:

$$\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}=\frac{\beta^2+(\alpha+\beta)^2-\alpha^2}{2\beta(\alpha+\beta)}=\frac{2\beta^2+2\alpha\beta}{2\beta(\alpha+\beta)}=\frac{2\beta(\alpha+\beta)}{2\beta(\alpha+\beta)}=1$$

$$\frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2\gamma\alpha}=\frac{(\alpha+\beta)^2+\alpha^2-\beta^2}{2(\alpha+\beta)\alpha}=\frac{2\alpha^2+2\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)\alpha}=\frac{2\alpha(\alpha+\beta)}{2(\alpha+\beta)\alpha}=1$$

$$\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2-(\alpha+\beta)^2}{2\alpha\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2-\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2}{2\alpha\beta}=\frac{-2\alpha\beta}{2\alpha\beta}=-1$$

Όμοια για τις άλλες περιπτώσεις.

Β. ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ ΣΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Αρκετές όχι πρωτοβάθμιες εξισώσεις με περισσότερους από ένα άγνωστο λύνονται με τη βοήθεια της πρότασης:

Αν κ, λ, μ θετικοί αριθμοί και $\kappa\,(\alpha-\beta)^2+\lambda\,(\beta-\gamma)^2+\mu\,(\gamma-\alpha)^2=0$, τότε $\alpha=\beta=\gamma$.

Πρόβλημα 5. **Λύστε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση $\boldsymbol{x^2+y^2+z^2+t^2=x(y+z+t)}$.** **(Ολυμπιάδα Μόσχας)**

Σκέψεις

Άθροισμα τετραγώνων είναι ένδειξη τέλειων τετραγώνων.

Λύση

$$x^2+y^2+z^2+t^2=x(y+z+t) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+t^2-xy-xz-xt=0$$

(που είναι τα διπλάσια γινόμενα;) $\Leftrightarrow\; x^2+y^2+z^2+t^2-2\frac{x}{2}y-2\frac{x}{2}y-2\frac{x}{2}z-2\frac{x}{2}t=0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{4}2\frac{x}{2}y+y^2\right)+\left(\frac{x^2}{4}-2\,\frac{x}{2}z+z^2\right)+\left(\frac{x^2}{4}-2\,\frac{x}{2}t+t^2\right)+\frac{x^2}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}-y\right)^2+\left(\frac{x}{2}-z\right)^2+\left(\frac{x}{2}-t\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}-y=0 \;\kappa\alpha\iota\; \frac{x}{2}-z=0 \;\kappa\alpha\iota\; \frac{x}{2}-t=0 \;\kappa\alpha\iota\; \frac{x}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow\; y=z=t=\frac{x}{2}=\;0 \Leftrightarrow y=z=t=x=0$$

Πρόβλημα 6. **Λύστε στο $\mathcal{R}$ την εξίσωση:**

$$\boldsymbol{\sqrt{x}+\sqrt{y}+2\sqrt{z-2}+\sqrt{u}+\sqrt{v}=x+y+z+u+v}$$

Σκέψεις

$x=\left(\sqrt{x}\right)^2$!

Λύση

Περιορισμοί: $x, y, u, v \geq 0$ και : $z \geq 2$.

$$E\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta \;\Leftrightarrow\; x+y+(z-2)+u+v-\sqrt{x}-\sqrt{y}-2\sqrt{z-2}-\sqrt{u}-\sqrt{v}+2=0$$

$$\Leftrightarrow\ (\sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) + (\sqrt{y}^2 - 2\sqrt{y}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) + (\sqrt{z-2}^2 - 2\sqrt{z-2}\cdot 1 + 1) +$$
$$(\sqrt{u}^2 - 2\sqrt{u}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) + (\sqrt{v}^2 - 2\sqrt{v}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = 0$$
$$\Leftrightarrow\ (\sqrt{x} - \frac{1}{2})^2 + (\sqrt{y} - \frac{1}{2})^2 + \left(\sqrt{z-2} - 1\right)^2 + (\sqrt{u} - \frac{1}{2})^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow\ \sqrt{x} = \frac{1}{2}\ \ \text{και}\ \ \sqrt{y} = \frac{1}{2}\ \text{και}\ \sqrt{z-2} = 1\ \text{και}\ \ \sqrt{u} = \frac{1}{2}\ \ \text{και}\ \sqrt{v} = \frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ x = y = u = v = \frac{1}{4}\ \ \text{και}\ z = 3.$$

Πρόβλημα 7. Λύστε στο $\mathcal{R}$ την εξίσωση: $x^2 + (\frac{x}{x+1})^2 = 3$.

Σκέψεις: *Άθροισμα τετραγώνων -> τετράγωνο αθροίσματος ή διαφοράς.*

Λύση

Περιορισμός: $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

$$x^2 + (\frac{x}{x+1})^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 + (\frac{x}{x+1})^2 - 2x\frac{x}{x+1} + 2x\frac{x}{x+1} - 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x - \frac{x}{x+1})^2 + 2\frac{x^2}{x+1} - 3 = 0 \Leftrightarrow (\frac{x^2+x-x}{x+1})^2 + 2\frac{x^2}{x+1} - 3 = 0 \Leftrightarrow (\frac{x^2}{x+1})^2 + 2\frac{x^2}{x+1} - 3 = 0\ \ (1)$$

Θέτουμε $y = \frac{x^2}{x+1}$, όποτε (1) $\Leftrightarrow y^2 + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-2\pm 4}{2} \Leftrightarrow y = 1$ ή $y = -3$.

Για $y = 1$, είναι $\frac{x^2}{x+1} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Για $y = -3$, είναι $\frac{x^2}{x+1} = -3 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 3 = 0$ *αδύνατη στο* $\mathbb{R}$ *αφού* $\Delta = -3 < 0$.

Γ. ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Δεν υπάρχει γενική μέθοδος λύσης των συστημάτων ανωτέρου του πρώτου βαθμού. Παρ 'όλα αυτά υπάρχουν τεχνικές που λύνουν συστήματα ειδικών μορφών. Οι πιο συνηθισμένες από τις τεχνικές αυτές είναι:

Α. Αν μια από τις εξισώσεις του συστήματος είναι πρωτοβάθμια, τη λύνουμε ως προς ένα άγνωστο, τον οποίο αντικαθιστούμε στις άλλες εξισώσεις του συστήματος.

Β. Συμμετρία.

Γ. Κυκλική συμμετρία.

Δ. Ομογένεια.

Ε. Πρόσθεση κατά μέλη των εξισώσεων του συστήματος.

ΣΤ. Αφαίρεση ανά δυο των εξισώσεων του συστήματος.

Πρόβλημα 8. Λύστε στο $\mathcal{R}$ το σύστημα: $\begin{cases} \boldsymbol{a+b+c=0} \\ \boldsymbol{ab^3+bc^3+c\alpha^3=0} \end{cases}$ (Αρχιμήδης)

Σκέψεις

Η μια εξίσωση του συστήματος είναι πρωτοβάθμια, άρα;

Λύση

$$a+b+c=0 \Leftrightarrow a = -b-c\text{, έτσι}$$
$$ab^3 + bc^3 + c\alpha^3 = 0 \Leftrightarrow (-b-c)b^3 + bc^3 + c(-b-c)^3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$-b^4 - cb^3 + bc^3 - cb^3 - 3b^2c^2 - 3bc^3 - c^4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$b^4 + 2cb^3 + 2bc^3 + 3b^2c^2 + c^4 = 0 \Leftrightarrow (b^2)^2 + (bc)^2 + (c^2)^2 + 2b^3c + 2b^2c^2 + 2bc^3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(b^2+bc+c^2)^2 = 0 \Leftrightarrow b^2+bc+c^2 = 0 \Leftrightarrow b^2 + 2b\frac{c}{2} + \frac{c^2}{4} + \frac{3c^2}{4} = 0 \Leftrightarrow (b+\frac{c}{2})^2 + \frac{3c^2}{4} = 0 \Leftrightarrow$$
$$b + \frac{c}{2} = 0\ \ \text{και}\ \ c = 0.$$
$$b = c = 0,\qquad \text{οπότε}\ \ \alpha = -b-c = 0.$$

Πρόβλημα 9. Λύστε στο $\mathcal{R}$ το σύστημα: $\begin{cases} \boldsymbol{x^2+127=10z-8y} \\ \boldsymbol{y^2+96=13x-18z} \\ \boldsymbol{z^2+119=30y-3x} \end{cases}$

Σκέψεις: Το σύστημα δεν περιέχει πρωτοβάθμια εξίσωση, δεν είναι συμμετρικό, δεν είναι κυκλικά συμμετρικό, δεν είναι ομογενές, γι' αυτό δοκιμάζουμε την πρόσθεση κατά μέλη.

Λύση: Με πρόσθεση κατά μέλη των εξισώσεων του συστήματος παίρνουμε:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 342 = 10x + 22y + 28z \Leftrightarrow$$
$$(x^2 - 10x + 25) + (y^2 - 22y + 121) + (z^2 - 28z + 196) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x-5)^2 + (y-11)^2 + (z-14)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5\ \text{και}\ \ y = 11\ \text{και}\ \ z = 14.$$

Δ. ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ ΣΤΙΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

Η θεμελιώδης ανισότητα που συνδέεται με τα τετράγωνα είναι: $x^2 \geq 0 \; για \; κάθε \; x \epsilon \mathbb{R}$ από την οποία προκύπτουν, οι:

a) $\alpha^2 + b^2 \geq 2ab, το = όταν \; \alpha = b.$
b) $\alpha + b \geq 2\sqrt{ab}$ με $\alpha, b \geq 0,\; το = όταν \; \alpha = b.$
c) $\frac{\alpha}{b} + \frac{b}{\alpha} \geq 2$ με $\alpha, b > 0,\; το = όταν \; \alpha = b.$
d) $\alpha^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,\; το = όταν \; \alpha = b$= c.
e) $(\alpha + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca),\; το = όταν \; \alpha = b = c.$
f) $3(\alpha^2 + b^2 + c^2) \geq (\alpha + b + c)^2,\; το = όταν \; \alpha = b = c.$
g) $(\alpha^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (\alpha x + by + cz)^2,\; το = όταν \frac{\alpha}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ (Ανισότητα Cauchy-Schwarz).
h) Αν $\alpha, b, c > 0$, τότε $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{\alpha+b+c},\; το = όταν \; \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ (κλασματική ανισότητα).

Πρόβλημα 8. Για κάθε $\alpha \epsilon \mathbb{R}, δείξτε \; ότι \; 4\alpha - \alpha^4 \leq 3.$

Σκέψεις: $\alpha^4 = (\alpha^2)^2$ που είναι το διπλάσιο γινόμενο;

Απόδειξη: $4\alpha - \alpha^4 \leq 3 \iff \alpha^4 - 4\alpha + 3 \geq 0 \iff \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 + 2\alpha^2 - 4\alpha + 2 \geq 0 \iff$
$(\alpha^2 - 1)^2 + 2(\alpha - 1)^2 \geq 0$, ισχύει ως άθροισμα τετραγώνων. Το = όταν α=1.

Πρόβλημα 9. Αν $\boldsymbol{\alpha^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1}$, δείξτε ότι
$\boldsymbol{(\alpha - b)^2 + (\alpha - c)^2 + (\alpha - d)^2 + (b - d)^2 + (b - d)^2 + (c - d)^2 \leq 4.}$ **(Αρχιμήδης)**

Σκέψεις: Πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την $\alpha^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, άρα να κάνουμε τα αναπτύγματα των τετραγώνων.

Απόδειξη: $(\alpha - b)^2 + (\alpha - c)^2 + (\alpha - d)^2 + (b - d)^2 + (b - d)^2 + (c - d)^2 \leq 4 \iff$

$$3(\,\alpha^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 2ab - 2ac - 2ad - 2bc - 2bd - 2cd \leq 4\,(\,\alpha^2 + b^2 + c^2 + d^2) \iff$$

$\alpha^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\alpha b + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd \geq 0 \iff (\alpha + b + c + d)^2 \geq 0$ που ισχύει.

Πρόβλημα 10. Για τους μη αρνητικούς αριθμούς $\boldsymbol{\alpha, b, c}$ δείξτε ότι:

$$\boldsymbol{ab + bc + ca \;\geq\; \sqrt{3abc(a + b + c)}}.$$ **(Ολυμπιάδα Αυστραλίας)**

Σκέψεις: Απαλλαγή από τη ρίζα, άρα ύψωση στο τετράγωνο.

Απόδειξη: $Ανισότητα \iff (ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$, που ισχύει, γιατί
$(ab + bc + ca)^2 \geq 3(abbc + bcca + caab)(από \; την \; ανισότητα \; \varepsilon) = 3abc(a + b + c).$

Πρόβλημα 11. Αν $\boldsymbol{xyz \neq 0}$, δείξτε ότι: $\boldsymbol{\frac{x^4}{y^2} + \frac{y^4}{z^2} + \frac{y^4}{x^2} \;\geq\; x^2 + y^2 + z^2}$. **(Ολυμπιάδα Βιέτ Ναμ)**

Σκέψεις: $κλάσματα + ανισότητα = ενδεχόμενη \; χρήση \; κλασματικής \; ανισότητας.$

Απόδειξη: $\frac{x^4}{y^2} + \frac{y^4}{z^2} + \frac{y^4}{x^2} = \frac{(x^2)^2}{y^2} + \frac{(y^2)^2}{z^2} + \frac{(z^2)^2}{x^2} \;\geq\; \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2+y^2+z^2} = x^2 + y^2 + z^2.$

Πρόβλημα 12. Αν για τους θετικούς αριθμούς $\boldsymbol{x, y, z}$ ισχύει $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = 56}$, τότε ποια είναι η μέγιστη τιμή του αθροίσματος $\boldsymbol{x + 2y + 3z}$;

Σκέψεις

- Η παράσταση $f(x, y, z)$ έχει μέγιστη (ελάχιστη) τιμή όταν $f(x, y, z) \leq M \; (f(x, y, z) \geq M)$ και υπάρχουν τιμές x_1, y_1, z_1 των x, y, z τέτοιες ώστε $f(x_1, y_1, z_1) = M$.
- Είναι προφανές ότι πρέπει να συνδέσουμε τις παραστάσεις $x^2 + y^2 + z^2$και $x + 2y + 3z$ με μια ανισότητα.
  Ποια ανισότητα μας θυμίζει το άθροισμα των τετραγώνων $x^2 + y^2 + z^2$;

Απάντηση: Από την ανισότητα $Cauchy - Schwarz$ έχουμε:

$$(1^2 + 2^2 + 3^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + 2y + 3z)^2 \iff 14.56 \;\geq\; (x + 2y + 3z)^2$$

$$\iff (x + 2y + 3z)^2 \;\leq 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 8 = 16 \cdot 7^2 \iff x + 2y + 3z \leq 4 \cdot 7 = 28 \; (αφού \; x, y, z > 0),$$

$$όπου \; το = ισχύει, όταν \; \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \iff z = 3x \; και \; y = 2x \; και \; επειδή \; x^2 + y^2 + z^2 = 56$$

$$\iff x^2 + 4x^2 + 9x^2 = 56 \iff x^2 = 4 \iff x = 2, y = 4 \; και \; z = 6, άρα \max(x + 2y + 3z) = 28$$

Πρόβλημα 13. Αν $\boldsymbol{x, y, z > 0 \; και \; x^2 + y^2 + z^2 = 1}$, τότε ποια είναι η ελάχιστη τιμή της παράστασης $\boldsymbol{S = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zy}{y}}$; **(Πανενωσιακή Ολυμπιάδα - Αρχιμήδης)**

Σκέψεις Πρέπει να εμφανιστεί στην S η παράσταση $x^2 + y^2 + z^2$, αυτό γίνεται αν υψώσουμε την S στο τετράγωνο.

Απάντηση: Είναι $S^2 = (\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y})^2 = (\frac{xy}{z})^2 + (\frac{yz}{x})^2 + (\frac{zx}{y})^2 + 2\left(\frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x} + \frac{yz}{x} \cdot \frac{zx}{y} + \frac{zx}{y} \cdot \frac{xy}{z}\right)$

$$= \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 + 2(y^2 + z^2 + x^2) \geq \frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x} + \frac{yz}{x} \cdot \frac{zx}{y} + \frac{zx}{y} \cdot \frac{xy}{z} + 2 \cdot 1$$

$(\alpha\pi\acute{o}\ \tau\eta\nu\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = y^2 + z^2 + x^2 + 2 = 1 + 2 = 3, \acute{\alpha}\rho\alpha$
$S \geq \sqrt{3}$, το = ισχύει όταν $\frac{xy}{z} = \frac{yz}{x} = \frac{zx}{y} \Leftrightarrow x = y = z$ και επειδή
$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$, άρα $S_{min} = \sqrt{3}$.

Ε. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Λύστε στο $\mathbb{R}$ τη εξίσωση:
$(x^2 + 2x + 1)^2 + (x^2 + 3x + 2)^2 + (x^2 + 4x + 3)^2 + \cdots + (x^2 + 1996x + 1995)^2 = 0$ **(Αρχιμήδης)**

2. Λύστε στο $\mathbb{R}$ το σύστημα: $\begin{cases} x + y = \sqrt{4z - 1} \\ y + z = \sqrt{4x - 1} \\ z + x = \sqrt{4y - 1} \end{cases}$

3. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της παράστασης: $2x^4 + y^4 - 2x^2y^2 - 8x^2 + 18$; **(Αρχιμήδης)**

4. Λύστε στο $\mathbb{R}$ το σύστημα: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \left(\frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{1}{y-1}\right)\left(\frac{1}{z-1}\right) = 8 \\ x, y, z > 0 \end{cases}$

5. Λύστε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση: $\sqrt{x - y} + \sqrt{y - z} + \sqrt{z - w} + \sqrt{x + w} = x + 2$. **(Ευκλείδης)**

6. Λύστε στο $\mathbb{R}$ το σύστημα: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 25z^2 = 6xy + 8yz \\ 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 240 \end{cases}$ **(Αρχιμήδης)**

7. Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι: $2(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1) \geq 1 + x^2y^2$.

8. Αν $x, y, z > 0$ και $x + y + z = 12$, δείξτε ότι $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + 3 \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$. **(Αρχιμήδης)**

9. Αν $x, y, z > 0$, ποια είναι η ελάχιστη τιμή της παράστασης $\frac{x}{\chi + 2y} + \frac{y}{y + 2z} + \frac{z}{z + 2x}$;

10. Λύστε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 2\sqrt{x_1 - 1} + 4\sqrt{x_2 - 2^2} + \cdots + 2n\sqrt{x_n - n^2}$.

11. Αν $xy\,z \neq 0$, δείξτε ότι $\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 \geq 3\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)$. **(Θαλής)**

12. Λύστε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση: $x^4 - 4x = 1$.

13. Αν α, β, γ τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma(\hat{A} = 90°)$, δείξτε ότι

$$\beta^4 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^4 \geq \frac{3}{4}\alpha^4.$$ **(Ευκλείδης)**

14. Αν $A = \eta\mu x_1 \sigma\upsilon\nu x_2 + \eta\mu x_2 \sigma\upsilon\nu x_3 + \cdots + \eta\mu x_n \sigma\upsilon\nu x_1$, τότε $A_{max} =$;

15. Αν $a_1, a_2, \ldots, a_{1n} > 0$, δείξτε ότι

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)} + \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_2(\alpha_2 + \alpha_3)} + \cdots + + \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}(\alpha_{n-1} + \alpha_n)} + + \frac{\alpha_1 - \alpha_n}{\alpha_n(\alpha_n + \alpha_1)} \geq 0.$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Ν. Βασίλιεφ, Α. Γεγκόροφ, Πανενωσιακές Μαθηματικές Ολυμπιάδες της Ε.Σ.Σ.Δ., 1961-1991, Κάτοπτρο, Αθήνα, 1998.
2. G. Dorofeev, M. Potapov, N. Rozov, Elementary Mathematics, Mir Publishers, Moscow, 1973.
3. Θ. Καζαντζή, Άλγεβρα, Τόμος Ι, Μαστορίδης, Θεσσαλονίκη, 1974.
4. V.A. Krechmar, A Problem Book in Algebra, Mir Publishers, Moscow, 1974.
5. V. Lydsky, κ.α. Problems in Elementary Mathematics, Mir Publishers, Moscow, 1973.
6. L. Larson, Problem Solving Through Problems, Springer, New York, 1983.
7. Μ. Μαραγκάκης, Ν. Μεταξάς, Ουσιώδη Μαθηματικά, τόμος ΙΙ, Dynamic Ideas, Belmont, Massachusetts, 2003.
8. Μ. Στεργίου, Ν. Σκορπρής, Κλασσικές και Νέες Ανισότητες, Σαββάλας, Αθήνα, 2007.
9. Ευκλείδης Α, Ευκλείδης Β, περιοδικά Ε.Μ.Ε.
10. Gazeta Matematica, περιοδικό της Ρουμάνικης Μαθηματικής Εταιρείας.

Ο Ευκλείδης προτείνει ...

«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα». P. R. HALMOS

Επιμέλεια: ΝΙΚΟΣ Θ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ – ΓΙΑΝΝΗΣ Κ. ΛΟΥΡΙΔΆΣ

ΑΣΚΗΣΗ 441 (ΤΕΥΧΟΣ 134)

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ο εγγεγραμμένος του κύκλος έχει ακτίνα ρ και ο περιγεγραμμένος έχει ακτίνα R. Να αποδείξετε ότι:

$$\sigma\varphi^2 A+\sigma\varphi^2 B+\sigma\varphi^2 \Gamma+7\le 8\left(\frac{R}{2\rho}\right)^2$$

Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι.

ΛΥΣΗ (Χασάπης Γιώργος – Ρόδος)

Είναι: $\sigma\varphi^2 A+\sigma\varphi^2 B+\sigma\varphi^2 \Gamma+3$

$$=\left(1+\sigma\varphi^2 A\right)+\left(1+\sigma\varphi^2 B\right)+\left(1+\sigma\varphi^2 \Gamma\right)$$

$$=\frac{1}{\eta\mu^2 A}+\frac{1}{\eta\mu^2 B}+\frac{1}{\eta\mu^2 \Gamma}$$

Από τον νόμο των ημιτόνων έχουμε ότι

$$\sigma\varphi^2 A+\sigma\varphi^2 B+\sigma\varphi^2 \Gamma+3=\frac{1}{\eta\mu^2 A}+\frac{1}{\eta\mu^2 B}+\frac{1}{\eta\mu^2 \Gamma}$$

$$=4R^2\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)$$

Αλλά, $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\le\frac{1}{4\rho^2}$ με την ισότητα να προκύπτει μόνο όταν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο (ανισότητα J. Steinig).

Έτσι έχουμε ότι

$$\sigma\varphi^2 A+\sigma\varphi^2 B+\sigma\varphi^2 \Gamma+3\le\frac{4R^2}{4\rho^2}=\left(\frac{R}{\rho}\right)^2$$

και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. Επομένως,

$$\sigma\varphi^2 A+\sigma\varphi^2 B+\sigma\varphi^2 \Gamma+7=4+\sigma\varphi^2 A+\sigma\varphi^2 B+\sigma\varphi^2 \Gamma+3$$

$$\le 4+\left(\frac{R}{\rho}\right)^2\le\left(\frac{R}{\rho}\right)^2+\left(\frac{R}{\rho}\right)^2$$

όπου έγινε χρήση και της γνωστής ανισότητας του Euler $R\ge 2\rho$, οπότε:

$$\sigma\varphi^2 A+\sigma\varphi^2 B+\sigma\varphi^2 \Gamma+7\le 2\left(\frac{R}{\rho}\right)^2$$

και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Σημείωση:

Αποδεικνύεται ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\frac{1}{R^2}\le\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\le\frac{1}{4\rho^2}$$

Λύση έστειλαν επίσης οι Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο και Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο.

ΑΣΚΗΣΗ 442 (ΤΕΥΧΟΣ 134)

Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει

$$21\alpha\beta+2\beta\gamma+8\gamma\alpha\le 12$$

να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή του αθροίσματος.

$$S=\frac{1}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{3}{\gamma}$$

Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο

ΛΥΣΗ (Από τον ίδιο)

Αν θέσουμε $\alpha=\frac{x}{3}$, $\beta=\frac{4y}{5}$ και $\gamma=\frac{3z}{2}$ τότε, με $x, y, z>0$ η υπόθεση γράφεται διαδοχικά:

$$12\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{4y}{5}+2\cdot\frac{4y}{5}\cdot\frac{3z}{2}+8\cdot\frac{3z}{2}\cdot\frac{x}{3}\le 12$$

$$\frac{28xy}{5}+\frac{12yz}{5}+\frac{20zx}{5}\le 12$$

$$28xy+12yz+20zx\le 12$$

$$7xy+3yz+5zx\le 15$$

Έτσι, το ζητούμενο άθροισμα γράφεται:

$$S=\frac{3}{x}+\frac{5}{2y}+\frac{2}{z}$$

Από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έχουμε:

$$15\ge 7xy+3yz+5zx\ge 15\sqrt[15]{x^{12}y^{10}z^8}$$

$$\Rightarrow x^6y^5z^4\le 1,\ (1)$$

Επιπλέον,

$$S=\frac{3}{x}+\frac{5}{2y}+\frac{3}{z}=\frac{6}{2x}+\frac{5}{2y}+\frac{4}{2z}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{6}{x}+\frac{5}{y}+\frac{4}{z}\right)\ge\frac{15}{2}\sqrt[15]{\frac{1}{x^6y^5z^4}},\quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $S\ge\frac{15}{2}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x=y=1$.

Επομένως η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος είναι 15 και προκύπτει όταν

$$\alpha=\frac{1}{3},\ \beta=\frac{4}{5}\ \text{ και }\ \gamma=\frac{3}{2}$$

Σημείωση:

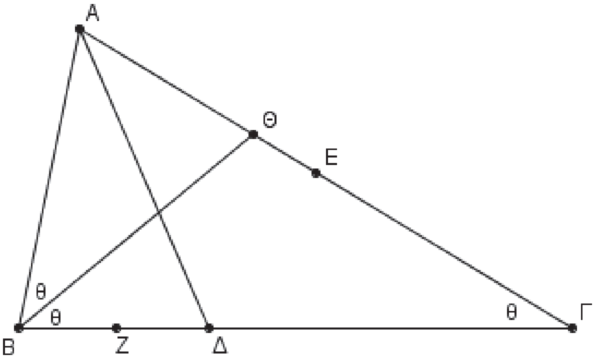
Από διπλή αβλεψία (προτείνοντος - υπευθύνου) η άσκηση στην πρότασή της ζητούσε τον υπολογισμό του αθροίσματος και όχι το ορθό που αναγράφεται στην τροποποιημένη εκφώνηση.

ΑΣΚΗΣΗ 443 (ΤΕΥΧΟΣ 135)

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$ και έστω ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΓ, ΒΔ αντίστοιχα και τα σημεία Α, Ε, Δ, Ζ είναι ομοκυκλικά, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι.

ΛΥΣΗ (Από τον ίδιο)



Από το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου, έχουμε:

$$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}\ \text{ δηλαδή}$$

$$\frac{B\Delta+\Delta\Gamma}{\Delta\Gamma}=\frac{\gamma+\beta}{\beta}\Rightarrow\frac{B\Gamma}{\Delta\Gamma}=\frac{\gamma+\beta}{\beta}\Rightarrow\Delta\Gamma=\frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$$

οπότε

$$B\Delta=B\Gamma-\Delta\Gamma=\alpha-\frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}=\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$$

Φέρνουμε την εσωτερική διχοτόμο ΒΘ της γωνίας Β και με ανάλογη διαδικασία βρίσκουμε ότι

$$A\Theta=\frac{\beta\gamma}{\alpha+\gamma}\ \text{ και }\ \Theta\Gamma=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\gamma}$$

Επειδή $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$ τα τρίγωνα ΑΒΘ και ΑΒΓ είναι όμοια. Άρα,

$$\frac{A\Theta}{AB}=\frac{AB}{A\Gamma}\Rightarrow\frac{\frac{\beta\gamma}{\alpha+\gamma}}{\gamma}=\frac{\gamma}{\beta}\Leftrightarrow\beta^2=\alpha\gamma+\gamma^2,\ (1)$$

Επίσης, έχουμε:

$$\Gamma Z=\Delta\Gamma+\frac{1}{2}B\Delta=\frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}+\frac{\alpha\gamma}{2(\beta+\gamma)}=\frac{2\alpha\beta+\alpha\gamma}{2(\beta+\gamma)}$$

Επειδή τα σημεία Α, Ε, Δ, Ζ είναι ομοκυκλικά, ισχύει:

$$\Gamma\Delta\cdot\Gamma Z=\Gamma E\cdot\Gamma A\Rightarrow\frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}+\frac{\alpha\gamma}{2(\beta+\gamma)}=\frac{2\alpha\beta+\alpha\gamma}{2(\beta+\gamma)}$$

$$\alpha(2\alpha\beta+\alpha\gamma)=(\beta+\gamma)^2\beta\Leftrightarrow\beta\gamma^2=\gamma(\alpha^2-2\beta^2)+\beta(2\alpha^2-\beta^2),\ (2)$$

Η ισότητα (1) με πολλαπλασιασμό επί β γίνεται:

$$\beta\gamma^2=\beta^3-\alpha\beta\gamma,\quad (3)$$

Από τις (2) και (3) παίρνουμε:

$$2\beta(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)=\gamma(\alpha-\beta)(2\beta+\alpha)$$

Αν $\alpha\ne\beta$ τότε προκύπτει ότι $\gamma<0$ που είναι αδύνατο. Άρα $\alpha=\beta$ δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με κορυφή Γ.

Λύση έστειλαν οι Λαγογιάννης Βασίλης - Νέο Ηράκλειο και ο Κτενιαδάκης Μιχάλης – Ηράκλειο Κρήτης, ο οποίος επισημαίνει ότι αν θεωρήσουμε ότι το μήκος καθεμιάς από τις ίσες πλευρές είναι ίσο με την μονάδα, τότε

$$\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\varphi$$

ΑΣΚΗΣΗ 444 (ΤΕΥΧΟΣ 135)

Δίνεται τρίγωνο Α ΒΓ και έστω Ι το σημείο τομής των διχοτόμων BB_1 και $\Gamma\Gamma_1$. Να αποδείξετε ότι

$$B_1I\cdot\Gamma_1I<\frac{BB_1\cdot\Gamma\Gamma_1}{4}<BI\cdot\Gamma I$$

Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο

ΛΥΣΗ (Από τον ίδιο)

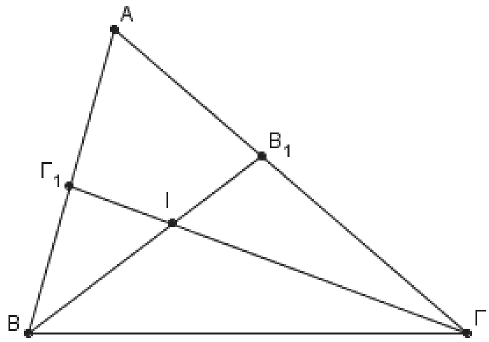
Από το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου στο τρίγωνο $BB_1\Gamma$ έχουμε

$$\frac{BI}{B_1I}=\frac{B\Gamma}{B_1\Gamma}\Rightarrow\frac{BI}{B_1I+IB}=\frac{B\Gamma}{B_1\Gamma+B\Gamma}\Rightarrow\frac{BI}{BB_1}=\frac{B\Gamma}{B_1\Gamma+B\Gamma}$$

Επίσης,

$$B\hat{B}_1\Gamma>B_1\hat{B}\Gamma\Rightarrow B\Gamma>B_1\Gamma\Rightarrow 2B\Gamma>B\Gamma+B_1\Gamma$$

$$\Rightarrow \frac{B\Gamma}{B\Gamma + B_1\Gamma} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BI}{BB_1} > \frac{1}{2}$$



Ομοίως βρίσκουμε: $\frac{\Gamma I}{\Gamma\Gamma_1} > \frac{1}{2}$, οπότε

$$\frac{BI}{BB_1}\frac{\Gamma I}{\Gamma\Gamma_1} > \frac{1}{4} \Rightarrow BI\cdot\Gamma I > \frac{BB_1\cdot\Gamma\Gamma_1}{4}, \quad (1)$$

Επιπλέον,

$$\frac{BI}{BB_1} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{IB_1}{BB_1} < \frac{1}{2} \text{ και } \frac{\Gamma I}{\Gamma\Gamma_1} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{I\Gamma_1}{\Gamma\Gamma_1} < \frac{1}{2}$$

οπότε

$$\frac{IB_1\cdot I\Gamma_1}{BB_1\cdot\Gamma\Gamma_1} < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{BB_1\cdot\Gamma\Gamma_1}{4} > IB_1\cdot I\Gamma_1, \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$B_1I\cdot\Gamma_1I < \frac{BB_1\cdot\Gamma\Gamma_1}{4} < BI\cdot\Gamma I$$

Λύση έστειλε επίσης Λαγογιάννης Βασίλης - Νέο Ηράκλειο.

Σημείωση: Η προηγούμενη άσκηση είχε δημοσιευθεί και παλαιότερα (Ασκ. 363) και είχε δοθεί μια διαφορετική λύση από τον Αποστολόπουλο Γιώργο και άλλους συναδέλφους.

Προτεινόμενα Θέματα

447. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ. Αν Ζ είναι το σημείο τομής των ΒΓ και ΔΕ, Η το ορθόκεντρο του τριγώνου και Μ το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι $ZH \perp AM$.

Βαγγέλης Σταματιάδης – Νέα Ιωνία

448. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει

$$\frac{\alpha^9}{\beta\gamma} + \frac{\beta^9}{\gamma\alpha} + \frac{\gamma^9}{\alpha\beta} \geq \alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha+\beta+\gamma)$$

Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο

449. Να βρείτε όλες τις πραγματικές λύσεις του συστήματος

$$\frac{9x^2}{2(1-x)^4} = 1 + \frac{3xy}{2(1-x)^2} \text{ και } 2x^2 + xy = 1$$

Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι.

450. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύουν $\upsilon_\beta = \sqrt{5}$ και $\upsilon_\gamma = 2\sqrt{2}$. Να υπολογίσετε το ελάχιστο δυνατό μήκος R_{min} της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου του.

Λαγογιάννης Βασίλειος – Ν. Ηράκλειο

451. Σε επίπεδο (π) θεωρούμε ν κύκλους που τέμνονται ανά δυο χωρίς κάποιος από αυτούς να διέρχεται από το σημείο τομής δυο άλλων. Να υπολογίσετε:

α. Το πλήθος Σ_ν των σημείων τομής τους.

β. Το πλήθος S_ν των ξένων μεταξύ τους χωρίων στα οποία χωρίζεται το (π) από αυτούς τους κύκλους.

γ. Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των Σ_ν και S_ν

Λευτέρης Τσιλιακός – Γαλάτσι

452. Δίνεται η παραβολή $(C): y^2 = 2px,\ p>0$

α. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): = \lambda x + \kappa,\ \lambda > 0$ εφάπτεται στην παραβολή στο $M(x_1, y_1),\ y_1 > 0$ αν και μόνο αν $p = 2\kappa\lambda$ και $x_1 = \frac{\kappa}{\lambda},\ y_1 = \frac{p}{\lambda} = 2\kappa$.

β. Έστω $M(x, y) \in (C)$ με $0 \neq x_1 \neq \frac{p}{2}$ και $y_1 > 0$, Ε η εστία της παραβολής και ΜΕΜ′ χορδή της παραβολής. Η (ε) τέμνει τον $x'x$ στο Γ και Δ η προβολή του Μ στον $x'x$, Λ η προβολή του Μ στην διευθετούσα (δ) και Ζ σημείο του $x'x$ ώστε $MZ \perp (\varepsilon)$. Να αποδείξετε ότι:

i. $O\Gamma = O\Delta$

ii. $E\Gamma = EM = EZ = M\Lambda = \Gamma\Lambda$

γ. Από σημείο Ρ φέρουμε τις εφαπτόμενες ΡΑ, ΡΒ στην (C). Να αποδείξετε ότι:

i. $PA \perp PB \Leftrightarrow P \in (\delta) \Leftrightarrow$ Ε σημείο της ΑΒ και $PE \perp AB \Leftrightarrow P \in (\delta)$ ή $P \in x'x$

ii. Αν το Ρ δεν είναι πάνω στην (δ), τότε η ΡΕ διχοτομεί την γωνία $A\hat{E}B$

Δεληστάθης Γεώργιος – Κάτω Πατήσια

αφορμές … και στιγμιότυπα

SEEMOUS 2025: θρίαμβος για τους Έλληνες φοιτητές

Ελληνικός θρίαμβος στην Κορυτσά: Φοιτητές του **ΕΚΠΑ, ΕΜΠ και ΑΠΘ** σάρωσαν στον διεθνή διαγωνισμό Μαθηματικών SEEMOUS 2025, που έγινε από **4-9 Μαρτίου 2025.** Στον διαγωνισμό συμμετείχαν 111 φοιτητές από 6 χώρες και 27 πανεπιστήμια. Πιο συγκεκριμένα:

- Διακρίσεις των φοιτητών του **ΕΚΠΑ:** Ορέστης Λιγνός Χρυσό μετάλλιο, Αναστάσιος Παστός Χρυσό μετάλλιο, Δημήτρης Φωτόπουλος Αργυρό μετάλλιο, Παναγιώτης Γλύπτης Χάλκινο μετάλλιο, Μανόλης Πετράκης Χάλκινο μετάλλιο, Λάμπρος Τέγος Χάλκινο μετάλλιο.

- Διακρίσεις των φοιτητών του **ΕΜΠ:** Ιωάννης Μαυρίκος Χρυσό μετάλλιο, Γεώργιος Βάος Αργυρό μετάλλιο, Παναγιώτης Κωνσταντόπουλος Αργυρό μετάλλιο, Κωνσταντίνος Κολοκυθάς Χάλκινο μετάλλιο, Χαράλαμπος Κουσουλης Χάλκινο μετάλλιο, Διονύσης Πετράκης Χάλκινο μετάλλιο, Χαράλαμπος Ρεπούσης Χάλκινο μετάλλιο, Μιχάλης Προυσαλίδης Χάλκινο μετάλλιο.
- **ΑΠΘ:** ο Ιωάννης Γαλαμάτης Χάλκινο μετάλλιο.

Ο SEEMOUS (South Eastern European Mathematical Olympiad for University Students) είναι ένας διεθνής μαθηματικός διαγωνισμός που απευθύνεται σε πρωτοετείς και δευτεροετείς φοιτητές πανεπιστημίων της Νοτιοανατολικής Ευρώπης. Διεξάγεται από το **2006-07** και έκτοτε προσελκύει ταλαντούχους φοιτητές από όλη την περιοχή. Οι διαγωνιζόμενοι καλούνται να λύσουν μέσα σε **5 ώρες τέσσερα προβλήματα** που καλύπτουν αντικείμενα όπως: Απειροστικός Λογισμός Γραμμική Άλγεβρα Βασική Άλγεβρα Πραγματική Ανάλυση Συνδυαστική Θεωρία Αριθμών Οι ενδιαφερόμενοι φοιτητές μέσα από ειδικά μαθήματα προετοιμασίας, που διδάσκονται από καθηγητές και παλαιότερους διακριθέντες φοιτητές. Το υψηλό επίπεδο διδασκαλίας και η **αγάπη** των φοιτητών για τα **Μαθηματικά** συμβάλλουν στις συνεχείς διακρίσεις, ενώ πολλοί από αυτούς συνεχίζουν τις σπουδές τους με πλήρεις υποτροφίες στα κορυφαία πανεπιστήμια της Ευρώπης και της Αμερικής. Σημαντικό να αναφερθεί ότι όλοι σχεδόν οι διακριθέντες, έχουν πάρει μέρος και στις αντίστοιχες Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες μαθητών, με αρκετές επιτυχίες.

Egmo 2025 - Κόσοβο

Έγινε πρόσφατα, στην Πρίστινα του Κοσόβου, με συμμετοχή **56 χωρών** από **11 – 17 Απριλίου 2025**, η $14^{η}$ EGMO η γνωστή Ολυμπιάδα κοριτσιών στα Μαθηματικά. Οι επόμενες διοργανώσεις έχουν προγραμματιστεί να γίνουν το **2026** (στο Bordeaux **Γαλλίας**) και το **2027** (στο Sibenik **Κροατίας**). Μια πολύ καλή προσπάθεια της Ελληνικής ομάδας συμμετοχής, που επέστρεψε με **δύο εύφημες μνείες,** σε έναν πολύ απαιτητικό διαγωνισμό, **με ομάδες** άλλων χωρών, που κάνουν συστηματική προετοιμασία πολλών ετών. Ένα **αισιόδοξο** αποτέλεσμα για την Ελληνική ομάδα, με ελπιδοφόρα προοπτική για το μέλλον.

Το βραβείο ABEL 2025

Η Νορβηγική Ακαδημία Επιστημών και Γραμμάτων αποφάσισε να απονείμει το Βραβείο Abel 2025 στον καθηγητή **Masaki Kashiwara** (γεννήθηκε στις 30 Ιανουαρίου 1947 στο Γιούκι της Ιαπωνίας). Ο Kashiwara-san είναι ο πρώτος Ιάπωνας μαθηματικός που έλαβε το βραβείο Abel 2025.

Λαμβάνει το βραβείο για "τις θεμελιώδεις συνεισφορές του στην **αλγεβρική ανάλυση** και θεωρία αναπαράστασης, ιδιαίτερα στην ανάπτυξη της θεωρίας των **D-modules** και στην ανακάλυψη των **κρυστάλλινων βάσεων"**.

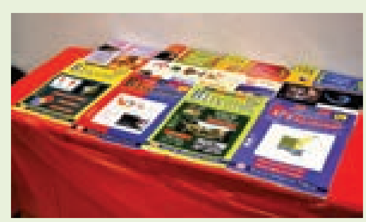
Ο Kashiwara ασχολήθηκε με τη μικροτοπική ανάλυση, τις υπερσυναρτήσεις και τη θεωρία των D-modules, επεκτείνοντας τις ιδέες του δασκάλου του **Μίκιο Σάτο** και συνεργάστηκε εκτενώς με Γάλλους μαθηματικούς. Η θεματική περιοχή ονομάζεται επίσης "**αλγεβρική ανάλυση**". Ασχολείται επίσης με τη **μαθηματική φυσική**. Το 1981, μαζί με τον Ζαν-Λυκ Μπριλίνσκι, απέδειξε την εικασία Καζντάν-Λούστιγκ στη γεωμετρική θεωρία απεικόνισης (η οποία είχε επίσης αποδειχθεί ανεξάρτητα από τους Αλεξάντερ Μπίλινσον και Τζόζεφ Μπερνστάιν).

Η θεωρία του για τα **D-modules**, που ανακαλύφθηκε ανεξάρτητα στη Ρωσία από τον Τζόζεφ Μπερνστάιν, βρήκε εφαρμογή στην **αλγεβρική γεωμετρία** (στρεβλές κυψέλες), ειδικά μετά την παραμονή του Kashiwara στο Παρίσι το 1976/77. Περίπου την ίδια εποχή με τον **Ζόγκμαν Μέμπχαουτ** (1979), έλυσε το 1980 το γενικευμένο πρόβλημα **Riemann - Hilbert**, όπου αντί για επιφάνειες Riemann εξετάζονται **μιγαδικές πολλαπλότητες** υψηλότερων διαστάσεων (η λεγόμενη αντιστοιχία Riemann - Hilbert).

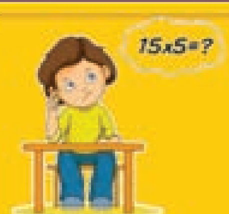
Εκδηλώσεις και Βραβεύσεις της ΕΜΕ

Αρχές Απρίλη 2025 έγιναν και οι βραβεύσεις των διαγωνισμών **Ευκλείδη και Αρχιμήδη** στο ΕΚΠΑ (Φιλοσοφική Σχολή Αθηνών) με μεγάλη συμμετοχή από μαθητές και γονείς, απ' όπου και η σχετική φωτογραφία.

Θυμίζουμε τη μεγάλη συμμετοχή των μαθητών στους διαγωνισμούς Θαλής, Πυθαγόρας και "ο μικρός Ευκλείδης". Ελπιδοφόρα **προοπτική** και ευοίωνο **μέλλον**.



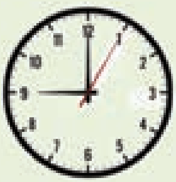
Συγκινητικό της **συμμετοχής** ήταν ότι για φέτος στο διαγωνισμό «**Ο Θαλής**» πήραν μέρος **28.000** περίπου παιδιά **μέσα** στα σχολεία (όπου και προκρίθηκαν για τον Αρχιμήδη **1000** περίπου παιδιά). Με εξεταστικά κέντρα **1805** σχολεία, αριθμός **ρεκόρ**. Μια ακόμα **επιτυχία** της ΕΜΕ για το **τρόπο οργάνωσης** και διεξαγωγής, ενός τέτοιου μεγάλου και δύσκολου εγχειρήματος και στην **αξιοπιστία** και στο **αποτέλεσμα**.



Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

— ΓΡΙΦΟΙ —



Το Παράξενο Ρολόι: Ένα ρολόι, από λάθος κατασκευή, έχει τον ωροδείκτη και λεπτοδείκτη με ίσο μήκος. Μπορούμε να βρίσκουμε τη σωστή ώρα;

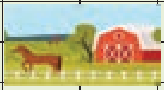
Το Μισό της Μισής πίτσας: Σε μια μεγάλη πίτσα **το μισό της μισής πίτσας** είναι **6 κομμάτια περισσότερα από το μισό μιας άλλης πίτσας που είναι τα ¾ της μεγάλης.** Πόσα κομμάτια είναι ολόκληρη η μεγάλη πίτσα;

Τα άλογα και οι Χήνες: Σε ένα κτήμα βόσκουν άλογα και χήνες . Τα πόδια τους είναι 34 περισσότερα από το διπλάσιο των κεφαλιών τους. Πόσα είναι τα άλογα;

Το σκαλοπάτι: Η Πέτρος στέκεται πάνω σε ένα σκαλοπάτι και είναι 38 εκ πιο ψηλά από την Ναταλία που είναι κάτω από αυτό. Αν αλλάξουν θέση τότε ο Πέτρος θα είναι 10 εκ πιο χαμηλά από την Ναταλία. Α)Τι ύψος έχει το σκαλοπάτι; Β) πόσο ποιο ψηλός είναι ο Πέτρος από τη Ναταλία;

Απαντήσεις στους γρίφους του τεύχους 135

Τα άλογα: Μετακινούμε τα άλογα από τους γωνιακούς στάβλους στους διπλανούς(οριζόντια) και προσθέτουμε τα 4 άλογα στους υπόλοιπους στάβλους(όχι στους γωνιακούς).

I I I	I I	I I	I I I
I I			I I
I I			I I
I I I	I I	I I	I I I

I I	I I I	I I I	I I
I I			I I
I I			I I
I I	I I I	I I I	I I

I I	I I I	I I I	I I
I I I			I I I
I I I			I I I
I I	I I I	I I I	I I

Οι σοκολάτες: Ο περιπτεράς είχε 29(2+9=11) σοκολάτες, 19 των 3€, 7 των 4€ και 3 των 5€ (19+7+3=29) και (19x3=57, 7x4=28, 3x5=15 όλα 100€).

Το χαρτζιλίκι: Ο πατέρας της Μαρίας θα της δώσει συνολικά 30χ10=300€ ή αν ο μήνας έχει 31 μέρες 310€. Όμως η Μαρία πρέπει να του επιστρέψει: $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{14}=1\frac{2^{15}-1}{2-1}= 2^{15}-1$ λεπτά (γεωμετρική πρόοδος). Δηλαδή 32768-1 λεπτά= 327,67 Ευρώ!!! Φυσικά δεν πρέπει να δεχτεί η Μαρία την πρόταση του πατέρα της.

Τα πετράδια: Το συνολικό βάρος τους είναι 1+2+3+ … +33=
=33x(33+1)/2=33x17=561.

Το κάθε παιδί θα πάρει 561:3=187 γραμμάρια.
Θα τα μοιράσουμε ως εξής τα 9 πρώτα
θα τα βάλουμε σε ένα μαγικό τετράγωνο

4	**3**	**8**
9	**5**	**1**
2	**7**	**6**

Έτσι θα πάρει ο καθένας από μια στήλη 15 γρ.,
τα υπόλοιπα τα βάζουμε σε τριάδες ως εξής:

10	11	12
15	14	13
16	17	18
21	20	19
22	23	24
27	26	25
28	29	30
33	32	31

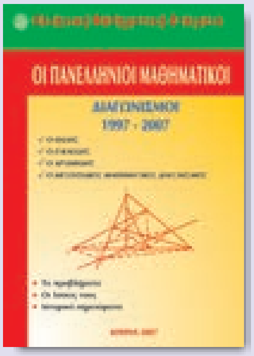
Η κάθε στήλη έχει 172 γρ., που 172+15=187γρ. θα πάρει ο καθένας.

Από τα Μαγικά τετράγωνα στο βιβλίο της ΕΜΕ «Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν».

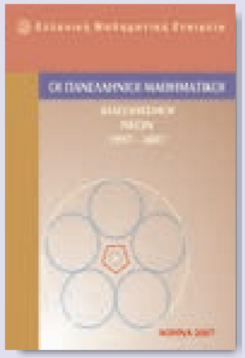
Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ολυμπιάδες

Προσφορές



Νέα τιμή βιβλίου: 15€



Νέα τιμή βιβλίου: 10€

Τιμή βιβλίου: 25€

Διαγωνισμοί

2η έκδοση

Τιμή βιβλίου: 18€

2η έκδοση

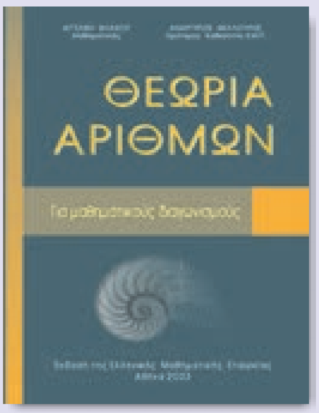
Τιμή βιβλίου: 18€

2η έκδοση

Τιμή βιβλίου: 18€

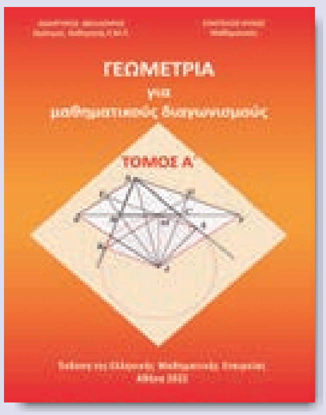
Βιβλία της ΕΜΕ

Νέο Βιβλίο



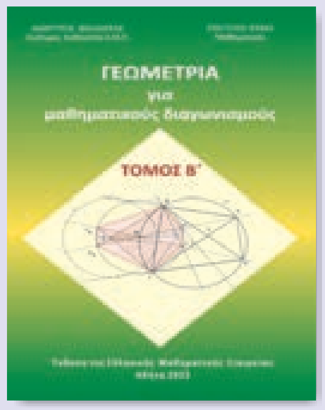
Τιμή βιβλίου: 25€

Νέο Βιβλίο



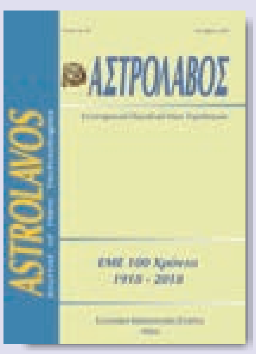
Τιμή βιβλίου: 25€

Νέο Βιβλίο

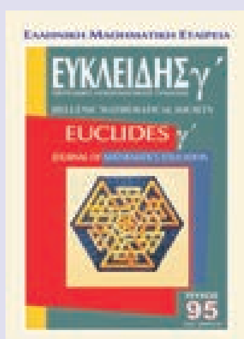


Τιμή βιβλίου: 20€

Περιοδικά



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€

Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr