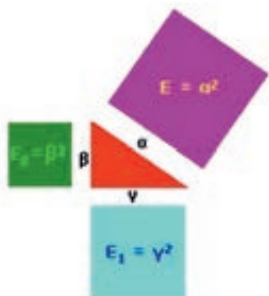


136



ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΔΕΙΑΣ 1089/88 ΚΕΜΠ.Α.Θ.



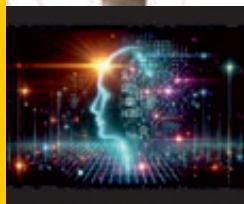
ΕΓΚΛΕΙΔΗΣ

Μαθηματικό περιοδικό για το

ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΠΡΙΛΙΟΣ - ΜΑΙΟΣ - ΙΟΥΝΙΟΣ 2025 ευρώ 3



Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

✓ Γενικά άρθρα

Το Εκπαιδευτικό σύστημα Μοντεσσόρι για τα Μαθηματικά και η άποψη του ChatGPT Χριστόπουλος Π. Παναγιώτης	1
Αριθμοί γίγαντες γύρω και μέσα μας Γιαννιώτη Φένια Μπατέλης Χρήστος	9

✓ Τα Μαθηματικά στο Σχολείο

• Α' Τάξη Ασκήσεις Επανάληψης Χρήστος Π. Τσιφάκης – Αγγελική Γ. Δανιήλογλου	12
• Β' Τάξη Ασκήσεις για Επανάληψη Θανάσης Χριστόπουλος	17
Μήκος κύκλου & τόξου – Εμβαδόν κυκλικού δίσκου & κυκλικού τομέα Μαρία Παππά	21
• Γ' Τάξη Γενικές Ασκήσεις Χρήστος Π. Τσιφάκης	23

✓ Τα Μαθηματικά στο Σχολείο

• Γ' Τάξη Γραμμικά Συστήματα Επιμέλεια: Ειρήνη Κοτσακιλάφη	27
✓ Μαθηματικοί Διαγωνισμοί	

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Επιμέλεια: Επιτροπή Διαγωνισμών	32
Θέματα προετοιμασίας Τάκης Χρονόπουλος	39
ΣΧΟΛΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ και Μαθηματικά Επιμέλεια: Χριστόπουλος Π. Παναγιώτης	43
Το ηλεκτρικό ποδήλατο Ευσταθία Γαρίνη, Χρήστος Μπατέλης	46
Τα μαθηματικά μας διασκεδάζουν Χριστόπουλος Π. Παναγιώτης	48

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025
Εκδότης: Ανάργυρος Φελλούρης
Διευθυντής: Ιωάννης Τυρλής

Επιμέλεια Έκδοσης:
Μαραγκάκης Στυλιανός

Συντακτική Επιτροπή

Συντονιστές: Δρούσας Παναγιώτης Χριστόπουλος Παναγιώτης Κουτσούρης Λέων	Κωστοπούλου Καλλιόπη Λυμπερόπουλος Γεώργιος Μαγουλάς Αντώνιος Μάλλιαρης Χρήστος Μπερδούσης Γεώργιος
Μέλη: Αρδαβάνη Καλλιόπη Βαρβεράκης Ανδρέας Γεωργιάδου - Καμπουρίδη Βαρβάρα Γκιουλέκα Αλεξάνδρα Γρυπάρης Παντελής Διαμαντίδης Δημήτριος Ζιώγας Χρήστος Καλαμπόκα Αθηνά Καλδή Φωτεινή Καραμπάσας Κωνσταντίνος Καψή Θέμις Κεϊσογλου Στέφανος Κουστέρης Χρήστος Κόσουβας Γεώργιος Κοτσακιλάφη Ειρήνη Κυριακοπούλου Αθανασία	Νικολόπουλος Ιωάννης Ντόρβας Νικόλαος Παπαϊωάννου Δημήτριος Παππά Μαρία Πούλιου Χριστίνα Ρίζος Ιωάννης Ρουσούλη Μαρία Σιούλας Ιωάννης Σίσκου Μαρία Σταθιάς Γεώργιος Τουρναβίτης Στέργιος Τριανταφύλλου Ανδρέας Τσαπακίδης Γεώργιος Τσιφάκης Χρήστος Φερεντίνος Σπύρος Χριστόπουλος Θανάσης

Γράμμα της Σύνταξης

Σα βγεις στον πηγαιμό για την Ιθάκη,
να εύχεσαι νάναι μακρύς ο δρόμος,
γεμάτος περιπέτειες, γεμάτος γνώσεις.
Κων. Καβάφης

Αγαπητοί μαθητές-μαθήτριες
και συνάδελφοι καθηγητές-καθηγήτριες

ΚΑΛΟ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ

Από τους Συντονιστές της συντακτικής ομάδας του περιοδικού

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών



Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:
printfair
Τηλ.: 2102469799 - 2102401695
Υπεύθυνος Τυπογραφείου:

Α. Κρέτσης

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ενδειξη «Για τον Ευκλείδη Α'». Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση με σύστημα κριτών.**

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)
Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλλονται στέλνεται:
1. **ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα** λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. **ALPHA**, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. **EUROBANK**, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Πληρώνεται στα **γραφεία** της Ε.Μ.Ε.



Το Εκπαιδευτικό σύστημα Μοντεσσόρι για τα Μαθηματικά και η άποψη του ChatGPT

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Τα μαθηματικά είναι μάθημα που έχει κατ' εξοχήν αυξημένες απαιτήσεις για αφαιρετική ικανότητα. Με τον τρόπο, που παρουσιάζεται στο σχολείο, δημιουργούνται δυσκολίες στα παιδιά, με αποτέλεσμα να ταλαιπωρούνται μαθητές και εκπαιδευτικοί.

Ένα μάθημα, που εκ των πραγμάτων θα έπρεπε να ασκεί την κριτική σκέψη, και να βοηθάει στην αναγκαιότητα της ανακάλυψης και διερεύνησης σχέσεων, συσχετισμών, συνδυασμών, στο συμβατικό σχολείο εισάγεται φορμαλιστικά, κατά κύριο λόγο με απομνημόνευση ιδιοτήτων, αλγορίθμων και αποστήθιση αποδείξεων θεωρημάτων και ασκήσεων. Αποδείξεων, που πολλά παιδιά, λόγω ακριβώς του λαθεμένου τρόπου προσέγγισης του μαθήματος, δεν μπορούν να καταλάβουν, να «μάθουν» διαφορετικά, και τελικά, στο βαθμό που μπορούν, τα απομνημονεύουν, για «να περάσουν την τάξη». Η βασική φιλοσοφία της μεθόδου Μοντεσσόρι για τα μαθηματικά είναι επαναστατική. Με κατάλληλο εποπτικό υλικό, τα παιδιά ξαναεφευρίσκουν τα μαθηματικά. Τα κατανοούν σταδιακά σε βάθος, ακολουθώντας, κατ' αναλογία, τα διαχρονικά βήματα του ανθρώπου από την άγνοια στην κατάκτηση αυτού του εργαλείου, που ανοίγει τις πόρτες όλων των επιστημών, αυτής της τόσο χρήσιμης γνώσης, που διευκολύνει τη ζωή μας. Στο σύστημα Μοντεσσόρι η «διδασκαλία» των μαθηματικών ξεκινάει από τις νεαρότερες ακόμη ηλικίες.

Τα μικρά παιδιά μαθαίνουν πρώτα να απαριθμούν με πραγματικά υλικά, (όπως οι πρωτόγονοι, στις σπηλιές μετρούσαν τους λιγοστούς καρπούς, που μπορούσαν να συλλέξουν) και δομούν έτσι σιγά-σιγά την έννοια του αριθμού στο μυαλό τους. Στο βαθμό που αναπτύσσεται η αφαιρετική τους ικανότητα, η τάση τους να δημιουργούν σύμβολα τα οδηγεί στην καταγραφή αυτών των αριθμών στο χαρτί σαν «σκίτσα» (γραφή), και στην αναγνώριση αυτών των συμβόλων γραμμένων στο χαρτί (ανάγνωση). Η δημιουργία συμβόλων είναι απαραίτητη για την επικοινωνία μέσα στην «ομάδα» και ικανοποιεί την τάση του «ανήκειν σε ομάδα».

Αυτούς τους αριθμούς, που το παιδί τους μαθαίνει με τη φυσική απαρίθμηση μέσω του εποπτικού υλικού, μαθαίνει και να τους χειρίζεται να ανακαλύπτει τις ιδιότητές τους, τους διάφορους συνδυασμούς, που μπορεί να κάνει με αυτούς (πράξεις) μέσα από καθημερινά προβλήματα, που η ίδια η ζωή του βάζει για λύση. Και το μυαλό του εκπαιδεύεται να συσχετίζει, να συνδυάζει, να επεκτείνει, να γενικεύει. Έτσι η κατάκτηση της γνώσης των μαθηματικών έρχεται αβίαστη και η αναγκαιότητα της χρήσης τους εμπεδώνεται φυσιολογικά. Σταδιακά, με την ηλικιακή ωρίμανση του παιδιού, τα συγκεκριμένα αντικείμενα που απαριθμούσε, που χρησιμοποιούσε για να κάνει πράξεις, δεν του χρειάζονται ποια για να χειριστεί τους αριθμούς, γιατί έχουν οικοδομηθεί έννοιες στο μυαλό του και έχει αποκτήσει την ικανότητα να δουλεύει

αφαιρετικά. Κάθε ανθρώπινο ον γεννιέται έχοντας «εν δυνάμει» τις μελλοντικές ικανότητές του. Το παιδί ωθούμενο από τις δικές του εσωτερικές δυνάμεις έχει ανάγκη να γνωρίσει ό,τι το περιβάλλει, αποκτώντας έτσι εμπειρίες που θα το οδηγήσουν στην ομαλή εξέλιξή του. Χρειάζεται λοιπόν, ένα περιβάλλον που θα το βοηθήσει να ασκήσει και να αναπτύξει όλες αυτές τις «εν δυνάμει» ικανότητες, να κατακτήσει την ανεξαρτησία του αλλά και τη συνεργασία με τα άλλα άτομα. Θεμελιώδης όρος του Μοντεσσοριανού συστήματος είναι η δημιουργία αυτού ακριβώς του περιβάλλοντος, μέσα στο οποίο το παιδί θα μπορεί να εργάζεται με συγκέντρωση και υλικό (δουλειές) που ανταποκρίνεται στο ενδιαφέρον για όση ώρα αυτό παραμένει «ενεργό» νιώθοντας έτσι τη χαρά της δημιουργίας.

Όσο για τα συστήματα αρίθμησης και την αξία θέσης των ψηφίων, που στο συμβατικό σχολείο υπάρχουν μαθητές που δεν τα κατανοούν ακόμη και στην πρώτη τάξη του Λυκείου, το ειδικό υλικό πνευματικής ανάπτυξης, όπως ονομάζεται το εποπτικό υλικό στο σύστημα **Μοντεσσόρι**, κάνει «θαύματα».

Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και με τη γεωμετρία. Μαθαίνει τις ιδιότητές των υλικών σχημάτων, να τα χειρίζεται να τα αναλύει σε μικρότερα σχήματα, να τα συσχετίζει (ισότητα, ομοιότητα). Συνειδητοποιεί το εμβαδόν των επίπεδων σχημάτων και τον όγκο των στερεών, όπως περίπου και οι παλιοί μας πρόγονοι των παραποτάμιων πολιτισμών, που χρειάζονταν τη μέτρηση των χωραφιών τους. Στη συνέχεια προχωράει στο πρώτο βήμα προς την αφαίρεση. Φτιάχνει «σκίτσα» στο χαρτί, γεωμετρικά αφηρημένα σχήματα. «Διαβάζει» γεωμετρικά σχήματα. Και τέλος δομούνται αφηρημένες γεωμετρικές εικόνες-έννοιες στο μυαλό του. Αργότερα, στο Γυμνάσιο, στο Λύκειο θα αποδεχθεί και θα κατανοήσει τη συμβατική αρχή, πως τα σχήματα που εξετάζει η γεωμετρία δεν έχουν υλικό, για συγκεκριμένους λόγους θεωρητικούς. Αυτή η αφαιρετική διαδικασία θα του είναι οικεία και διαχειρίσιμη. Το παιδί θα είναι έτοιμο να συνειδητοποιήσει ότι για κάθε καινούργιο που ανακαλύπτει ή επινοεί θα πρέπει να βρίσκει αιτιολογία, απόδειξη-επαλήθευση της ορθότητάς του, είτε συγκρίνοντας το με την πραγματικότητα είτε με σύνθετο συλλογισμό.



Μαθαίνει ακόμη να συνδυάζει την αριθμητική με τη γεωμετρία, με τη φυσική ακόμα και με τη γεωγραφία με έναν εκπληκτικό τρόπο που του δίνει ικανοποίηση και χαρά κάθε φορά που ανακαλύπτει καινούργια πράγματα. Όλα τα γνωστικά αντικείμενα συσχετίζονται και συνδυάζονται. Οι Αλγεβρικές «ταυτότητες», το Πυθαγόρειο θεώρημα, ανακαλύπτονται με τη βοήθεια στερεών σχημάτων, που χωρίζονται κατάλληλα σε μικρότερα σχήματα ακόμα γίνονται και πράξεις με μεγάλους αριθμούς.

Η ευχαρίστησή τους από τη λύση τέτοιων προβλημάτων, που τα παιδιά έχουν διαλέξει ή και επινοήσει μόνα τους, καμία σχέση δεν έχει με τη λύση μιας στεγνής εξίσωσης γραμμένης σε ένα φυλλάδιο ή σε ένα τετράδιο. Στις μεγαλύτερες τάξεις στις φυσικές επιστήμες αξιοποιούν πειράματα βασισμένα στην επίσημη σχολική ύλη.

Η τέχνη και η χρήση της σύγχρονης τεχνολογίας δεν λείπουν από αυτό το πρόγραμμα. Με λελογισμένη χρήση συμπληρώνονται γνώσεις για μια σειρά μαθήματα: Προϊστορία, Ιστορία, Περιβάλλον, Γεωγραφία, Ξένες γλώσσες, Πολιτισμός, Τέχνες. Η μουσική και η ρυθμική κίνηση είναι εκεί από τα πρώτα τους βήματα στο σχολείο.

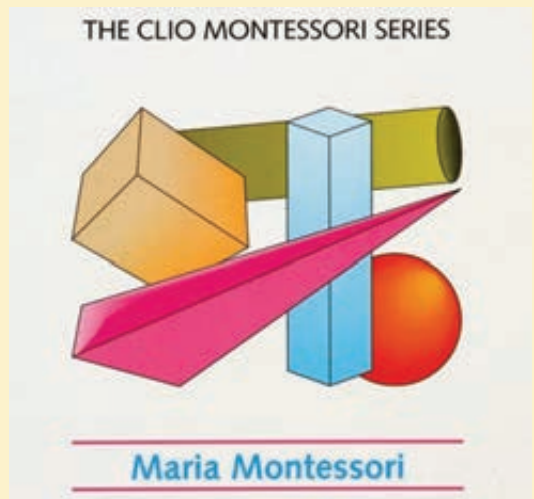
Η εξέλιξη των παιδιών είναι τόσο γρήγορη που από το νηπιαγωγείο κιόλας έχουν τη δυνατότητα να μαθαίνουν δύσκολες Μαθηματικές έννοιες. Η ευχαρίστηση και η ευφορία στη έκφραση των παιδιών, κάθε φορά που ανακαλύπτουν κάτι καινούργιο, όταν φέρουν σε πέρας την εργασία, που μόνα τους διάλεξαν, δεν περιγράφονται. Το σύστημα Μοντεσσόρι δεν «δημιουργεί» μικρούς Αϊνστάιν. Αυτές είναι μεταφυσικές αντιλήψεις. Η Μαρία Μοντεσσόρι δεν υποσχόταν κάτι τέτοιο. Πίστευε ότι κάθε παιδί αναπτύσσεται σύμφωνα με τη δική του τάση, ότι μερικά παιδιά αναπτύσσονται ταχύτερα, και κάποια πιο αργά, αλλά ότι όλα εξελίσσονται. Ήταν πεπεισμένη ότι η κατάλληλη αγωγή μπορεί να τα βοηθήσει να αναπτύξουν στο μέγιστο τις δυνατότητές τους. Ήταν μία πραγματική πειραματική επιστήμονας, η οποία εξερεύνησε τον νου του παιδιού και το πως δουλεύει ο εγκέφαλος μας. Για τα Μαθηματικά κατέγραψε τη δουλειά της σε δύο πολυσέλιδα βιβλία.

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού σε αυτό το σύστημα και πώς τον εκπληρώνει;

Ο εκπαιδευτικός πρέπει να εμπνέει την τάξη, να παρουσιάζει τα πράγματα με τον πιο ενδιαφέροντα κατά το δυνατόν τρόπο και μετά να αφήνει την ελεύθερη επιλογή όταν τα παιδιά έχουν κατανοήσει. Στο πρώτο στάδιο το παιδί είναι πολύ δραστήριο και μαθαίνει μέσω των αισθήσεων και όχι μέσω της διδασκαλίας. Στο δεύτερο στάδιο το παιδί μαθαίνει με την ευφυΐα του και ο εκπαιδευτικός πρέπει να είναι παρόν.

Τις παιδαγωγικές αρετές που θέλει το σύστημα Μοντεσσόρι από το δάσκαλο, τις συναντάμε σε πολλούς εκπαιδευτικούς του συμβατικού σχολείου, αφού οι προοδευτικές αρχές των μεγάλων παιδαγωγών, μέχρι σήμερα, έχουν περάσει σε ένα πολύ μεγάλο βαθμό στη ζωή μας, έχουν ζυμωθεί με την εκπαιδευτική μας κουλτούρα. Γονείς και εκπαιδευτικοί πρέπει ακόμα να έχουμε υπ' όψη «Ότι η υπακοή δεν είναι είδος υποταγής αλλά η επιθυμία να ακολουθήσει το παιδί έναν αληθινό οδηγό και άρα πρέπει να εμπνέεται». Το σύστημα Μοντεσσόρι είναι γενικότερη παιδαγωγική συμπεριφορά. Είναι στάση ζωής. Και ευτυχώς, χωρίς να το έχουμε συνειδητοποιήσει, έχει επηρεάσει ως ένα βαθμό λίγο έως πολύ και τη δική μας συνείδηση. **(Τα πιο πάνω είναι από την εργασία της κας Τούλας Πάντου που πριν λίγο καιρό μου έδωσε ο συνάδελφος Θεόδωρος Βουρεκάς).**

Στο σημείο αυτό, μετά τον ωραίο αυτό λόγο της κας Πάντου, ζήτησα τη βοήθεια από την Τεχνητή Νοημοσύνη(ChatGPT), έχει πλέον μπει στη ζωή μας και είναι ένας σπουδαίος δάσκαλος που μπορούμε να συζητάμε μαζί του τα πάντα.



Ρώτησα το ChatGPT

Ποιο εκπαιδευτικό σύστημα είναι καλύτερο για τα Μαθηματικά;

Το ChatGPT μου είπε:

Δεν υπάρχει μία απόλυτη απάντηση για το ποιο εκπαιδευτικό σύστημα είναι «καλύτερο» στα Μαθηματικά, καθώς αυτό εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, όπως η διδακτική προσέγγιση, οι εκπαιδευτικοί στόχοι, η κουλτούρα της εκπαίδευσης και τα αποτελέσματα των μαθητών. Ωστόσο, μπορούμε να εξετάσουμε ορισμένα εκπαιδευτικά συστήματα που διακρίνονται διεθνώς για την απόδοσή τους στα Μαθηματικά, σύμφωνα με μελέτες όπως το **PISA (Programme for International Student Assessment)** και το **TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study)**, αλλά και τις **Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες**. Οι χώρες με υψηλές επιδόσεις στα Μαθηματικά είναι:

Η Σιγκαπούρη – Το εκπαιδευτικό σύστημα της Σιγκαπούρης θεωρείται από τα κορυφαία παγκοσμίως. Δίνει έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση και την επίλυση προβλημάτων.

Η Φινλανδία – Αν και το σύστημα της δεν είναι εξειδικευμένο αποκλειστικά στα Μαθηματικά, η Φινλανδία προσφέρει ένα παιδοκεντρικό μοντέλο μάθησης που βασίζεται στην κατανόηση και όχι στην απομνημόνευση.

Η Ιαπωνία – Χρησιμοποιεί τη μέθοδο της «διδασκτικής έρευνας» (*lesson study*), όπου οι μαθητές διερευνούν τις έννοιες και συνεργάζονται για την κατανόηση δύσκολων θεμάτων.

Η Κίνα (Σαγκάη & Πεκίνο) – Δίνει έμφαση στην εξάσκηση, την αυστηρή πειθαρχία και την κατανόηση μέσω πολλαπλών προσεγγίσεων.

Η Νότια Κορέα – Ένα πολύ απαιτητικό σύστημα με έντονη προετοιμασία, ιδιαίτερα μέσω φροντιστηρίων.



Τι κάνει ένα εκπαιδευτικό σύστημα καλό στα Μαθηματικά;

- Έμφαση στη βαθιά κατανόηση (όχι μόνο μηχανικές διαδικασίες)
- Διαδραστική διδασκαλία με συνεργασία μαθητών
- Σύνδεση των μαθηματικών με την καθημερινή ζωή
- Κατάλληλοι και καλά εκπαιδευμένοι εκπαιδευτικοί
- Συνεχής έρευνα και προσαρμογή των διδακτικών μεθόδων

Ρώτησα το ChatGPT

Το σύστημα Μοντεσσόρι είναι καλό σήμερα;

Το ChatGPT μου είπε:

Ναι, η Μοντεσσόρι εκπαίδευση παραμένει πολύτιμη και εφαρμόζεται παγκοσμίως, αλλά η αποτελεσματικότητά της εξαρτάται από το παιδί και το εκπαιδευτικό πλαίσιο.

Τι κάνει τη Μοντεσσόρι καλή επιλογή για μικρές ηλικίες;

Η Εστίαση στη μαθητοκεντρική μάθηση, η Διδασκαλία μέσω βιωματικής μάθησης, Ανάπτυξη αυτονομίας και ευθύνης(μαθαίνουν να διαχειρίζονται το χρόνο και τις

δραστηριότητές τους), **Έμφαση στην κριτική σκέψη και την επίλυση προβλημάτων, Ολιστική προσέγγιση** (περιλαμβάνει και κοινωνικές/συναισθηματικές δεξιότητες).

Τα Μαθηματικά στη Μοντεσσόρι διδάσκονται με χειροπιαστά υλικά (π.χ. χάντρες για πράξεις, κύβοι για δεκαδικό σύστημα). Βοηθάει τα παιδιά να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες βιωματικά πριν τις δουν αφηρημένα. Βέβαια ορισμένα παιδιά μπορεί να χρειαστούν επιπλέον καθοδήγηση για πιο προχωρημένες έννοιες.

Πότε ίσως να μην είναι η καλύτερη επιλογή;

- Αν το παιδί λειτουργεί καλύτερα με αυστηρή δομή και πρόγραμμα.
- Αν το σχολείο ή ο δάσκαλος δεν εφαρμόζει σωστά τη μέθοδο.
- Αν υπάρχει μεγάλη ανάγκη για εξετασιοκεντρική προσέγγιση (π.χ. προετοιμασία για απαιτητικά τεστ).

Πλεονεκτήματα της Μοντεσσόρι στα Μαθηματικά

- ✓ Καλλιεργεί την αγάπη για τα μαθηματικά
- ✓ Ενισχύει τη λογική σκέψη και την κριτική ικανότητα
- ✓ Δίνει αυτοπεποίθηση στα παιδιά
- ✓ Αναπτύσσει την αυτονομία και τη συγκέντρωση
- ✓ Βοηθά στην κατανόηση δύσκολων εννοιών με απλό και φυσικό τρόπο

Το σύστημα Μοντεσσόρι είναι ιδανικό για την **ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης μέσα από το παιχνίδι και τη βιωματική μάθηση**, βοηθώντας τα παιδιά να αποκτήσουν βαθιά κατανόηση των αριθμών και των πράξεων από μικρή ηλικία. **Συμπέρασμα**

Η μέθοδος Μοντεσσόρι είναι εξαιρετική για παιδιά που αγαπούν τη μάθηση μέσω της ανακάλυψης και θέλουν να καλλιεργήσουν την αυτονομία τους. Αν το παιδί σου χρειάζεται περισσότερη δομή ή υψηλούς στόχους σε συγκεκριμένα μαθήματα, ίσως ένας συνδυασμός Μοντεσσόρι και παραδοσιακής εκπαίδευσης να είναι η καλύτερη επιλογή.



Ερώτηση του ChatGPT προς εμένα.

Σε ενδιαφέρει για κάποιο συγκεκριμένο επίπεδο (π.χ. νηπιαγωγείο, δημοτικό);

Του απάντησα: Ναι για το Γυμνάσιο.

Μου απάντησε:

Στην ηλικία των **13-18 ετών**, το σύστημα Μοντεσσόρι στοχεύει στην **αφηρημένη σκέψη, τη σύνδεση των μαθηματικών με την πραγματική ζωή και την ανεξάρτητη μάθηση**. Σε αυτή την ηλικιακή ομάδα, οι μαθητές ενθαρρύνονται να ανακαλύπτουν τη μαθηματική λογική μέσα από πρακτικές εφαρμογές, έρευνα και συνεργατικά έργα.

- ◆ Εστίαση στην πραγματική εφαρμογή των μαθηματικών
- ◆ Μελέτη αφηρημένων και προχωρημένων μαθηματικών εννοιών
- ◆ Ανεξάρτητη και συνεργατική μάθηση

Θεματικές και προσέγγιση:

Άλγεβρα & Αφηρημένα Μαθηματικά

- Προχωρημένες αλγεβρικές έννοιες (εξισώσεις, ανισώσεις, πολυώνυμα).
- Πρακτικές εφαρμογές άλγεβρας (στατιστική ανάλυση, οικονομικά μοντέλα).
- Χρήση **χειροπιαστών υλικών** (π.χ. αλγεβρικά πλακίδια) για τη διευκόλυνση της κατανόησης των συμβολικών σχέσεων.

Γεωμετρία & Τριγωνομετρία

- Διερεύνηση γεωμετρικών σχέσεων μέσω **χειροπιαστών μοντέλων**.
- Σύνδεση της γεωμετρίας με την **τέχνη, την αρχιτεκτονική και τη μηχανική**.
- Χρήση **γεωμετρικών πινάκων και υλικών** για την κατανόηση αποδείξεων.

Στατιστική & Πιθανότητες

- Εφαρμογή στατιστικών μοντέλων σε πραγματικά δεδομένα.
- Ανάλυση πιθανοτήτων μέσα από πειράματα και παρατηρήσεις.
- Χρήση **λογισμικών εργαλείων** για επεξεργασία δεδομένων.

Λογισμός & Ανάπτυξη Κριτικής Σκέψης

- Εισαγωγή στις βασικές αρχές του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού.
- Μαθηματικές έννοιες που σχετίζονται με τη φυσική και την τεχνολογία.
- Σύνδεση των μαθηματικών **με την οικονομία, την τεχνητή νοημοσύνη, τη βιολογία κ.ά.**

Εφαρμογές στην Πραγματική Ζωή

- Δημιουργία **οικονομικών μοντέλων** για κατανόηση του χρηματοπιστωτικού συστήματος.
- **Κωδικοποίηση και μαθηματικά της πληροφορικής**.
- Χρήση των μαθηματικών στη **μηχανική, τη φυσική και τις επιστήμες υπολογιστών**.

Μέθοδοι Διδασκαλίας

- ✓ **Πρότζεκτ & έρευνα:** Οι μαθητές ερευνούν πραγματικά προβλήματα (π.χ. μαθηματικά στη βιολογία, στα οικονομικά, στη φυσική).
- ✓ **Συνεργατική μάθηση:** Οι μαθητές δουλεύουν σε ομάδες, λύνουν προβλήματα και κάνουν παρουσιάσεις.
- ✓ **Διαθεματική προσέγγιση:** Σύνδεση των μαθηματικών με την επιστήμη, την τέχνη, την κοινωνία.
- ✓ **Χρήση εργαλείων τεχνολογίας:** Λογισμικά προσομοίωσης, προγραμματισμός, ανάλυση δεδομένων.

Γιατί είναι ωφέλιμα τα Μαθηματικά Μοντεσσόρι στην εφηβεία;

- ✓ Ενθαρρύνουν την **κριτική σκέψη και την ανάλυση δεδομένων**.
- ✓ Βοηθούν τους μαθητές να συνδέσουν τα μαθηματικά με την **καθημερινή ζωή και την καριέρα τους**.
- ✓ Αναπτύσσουν την **αυτονομία και την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων**.
- ✓ Δημιουργούν **πιο θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά**, κάνοντάς τα ενδιαφέροντα και πρακτικά.

Ρώτησα το ChatGPT

Τι πιστεύεις για την αξιολόγηση των μαθητών; τι ταιριάζει καλύτερα στο σημερινό σχολείο; Εγώ πιστεύω, είναι καλύτερα να γίνεται μόνο για παιδαγωγικούς λόγους. Για την προαγωγή των μαθητών να γίνονται πολλές αξιολογήσεις όχι μόνο μια εξέταση. Στους διαγωνισμούς για την κατάληψη μιας θέσης να είναι διαγνωστική η αξιολόγηση για την ικανότητα του εξεταζόμενου.

Το ChatGPT για την αξιολόγηση μου είπε:

Αυτό που προτείνεις είναι ένα πιο παιδαγωγικό και δίκαιο σύστημα αξιολόγησης, το οποίο εστιάζει στη βελτίωση του μαθητή αντί στην απλή κατάταξη ή τιμωρητική αξιολόγηση. Η αξιολόγηση των μαθητών πρέπει να είναι δίκαιη, πολυδιάστατη και να εστιάζει στην πραγματική κατανόηση και πρόοδο του μαθητή, όχι μόνο στην απομνημόνευση.

Αξιολόγηση με παιδαγωγικό χαρακτήρα

- ✓ **Στόχος:** Η βελτίωση του μαθητή, όχι η απλή μέτρηση της απόδοσης.
- ✓ **Περιοδική αξιολόγηση για προαγωγή,** όχι μία και μοναδική εξέταση.
- ✓ **Οι διαγωνισμοί να έχουν διαγνωστικό χαρακτήρα,** δηλαδή να χρησιμοποιούνται για την ανίχνευση δεξιοτήτων και την καταλληλότητα για συγκεκριμένες θέσεις (π.χ. εισαγωγή σε ειδικά σχολεία, πανεπιστήμια, προγράμματα αριστείας), χωρίς να καθορίζουν τη γενική αξία του μαθητή.

Βασικές Αρχές μιας Καλής Αξιολόγησης

- ✓ **Διαμορφωτική αξιολόγηση (Formative Assessment)** – Συνεχής ανατροφοδότηση στη διάρκεια της μάθησης (τεστ αυτοαξιολόγησης, ερωτήσεις, εργασίες).
- ✓ **Τελική ή συνολική αξιολόγηση (Summative Assessment)** – Τυπικές εξετάσεις ή δοκιμασίες στο τέλος μιας ενότητας.
- ✓ **Αυθεντική αξιολόγηση (Authentic Assessment)** – Έμφαση στην εφαρμογή γνώσεων μέσα από έργα, παρουσιάσεις ή μελέτες περίπτωσης.
- ✓ **Προσωπική πρόοδος και όχι μόνο σύγκριση** – Εστίαση στην ατομική ανάπτυξη, όχι απλώς στη σύγκριση με τους συμμαθητές.

Μέθοδοι Αξιολόγησης

- ♦ **Γραπτές εξετάσεις** – Απαραίτητες σε κάποιες περιπτώσεις αλλά δεν πρέπει να είναι ο μόνος τρόπος αξιολόγησης.
- ♦ **Προφορικές εξετάσεις και συζητήσεις** – Χρήσιμες για την αξιολόγηση κριτικής σκέψης.
- ♦ **Έργα & παρουσιάσεις** – Βοηθούν στην εφαρμογή της γνώσης και στην ανάπτυξη δεξιοτήτων.
- ♦ **Αξιολόγηση βάσει φακέλου εργασιών (Portfolio)** – Συγκεντρώνει δείγματα δουλειάς των μαθητών σε όλη τη διάρκεια του χρόνου.
- ♦ **Αυτοαξιολόγηση & ομότιμη αξιολόγηση** – Οι μαθητές αξιολογούν τη δική τους πρόοδο ή παρέχουν ανατροφοδότηση στους συμμαθητές τους.

Ιδανικό Σύστημα Αξιολόγησης

- ♦ **Συνδυασμός μεθόδων** – Καμία μέθοδος δεν πρέπει να υπερισχύει απόλυτα.
- ♦ **Αξιολόγηση που αναπτύσσει τις δεξιότητες του 21ου αιώνα** (κριτική σκέψη, επίλυση προβλημάτων, συνεργασία).
- ♦ **Δίκαιη και προσαρμοσμένη στις ανάγκες των μαθητών** – Όχι μόνο εξετάσεις που προκαλούν άγχος, αλλά και τρόποι που δείχνουν πραγματικά τις ικανότητες του μαθητή.

Πλεονεκτήματα αυτού του μοντέλου

- ✓ **Λιγότερο άγχος για τους μαθητές,** αφού η προαγωγή δεν εξαρτάται από μία και μόνο εξέταση.
- ✓ **Πιο ακριβής και δίκαιη εικόνα της προόδου** μέσα από πολλαπλές αξιολογήσεις.
- ✓ **Ενίσχυση της εσωτερικής παρακίνησης** – Οι μαθητές επικεντρώνονται στη μάθηση και όχι

στη «βαθμοθηρία».

✓ **Καλύτερη αναγνώριση των ταλέντων και των δυνατοτήτων** του κάθε μαθητή μέσα από διαγνωστικούς διαγωνισμούς.

Πώς θα μπορούσε να εφαρμοστεί;

- ♦ **Συνεχής διαμορφωτική αξιολόγηση** (feedback από τους δασκάλους και τους ίδιους τους μαθητές).
- ♦ **Χρήση ποικιλίας μεθόδων αξιολόγησης** (έργα, παρουσιάσεις, προφορικές εξετάσεις, πρακτικές εφαρμογές).
- ♦ **Διαγνωστικά τεστ** για την κατεύθυνση των μαθητών στις σπουδές και όχι για ανταγωνιστική κατάταξη.
- ♦ **Συνεργασία σχολείου – γονέων – μαθητών** για την υποστήριξη της μαθησιακής πορείας.

Συνέχισα το διάλογο με την Τεχνητή Νοημοσύνη, είναι ατελείωτος και μου έδωσε πολλές πληροφορίες για πολλά θέματα. Το συμπέρασμα: Η γνώση πολλαπλασιάζεται καθημερινά, οι πληροφορίες πρέπει να αξιολογούνται. Τα σχολεία, τα βιβλία, οι εκπαιδευτικοί χρειάζονται καθημερινά τη στήριξη της πολιτείας. Η ενημέρωση και ο πλούτος των πληροφοριών απαιτούν κριτική σκέψη για να μη χαθεί ο άνθρωπος στο πέλαγος της εύκολης πλέον πληροφόρησης. Οι εκπαιδευτικοί να απαλλαγούν από την γραφειοκρατία, να αφοσιωθούν αποκλειστικά στο έργο τους. Οι τάξεις να είναι με μικρό αριθμό μαθητών και εξοπλισμένες με το απαραίτητο εκπαιδευτικό υλικό. Βιβλία γραμμένα από μικτές ομάδες επιστημόνων, παιδαγωγών, μαθηματικών, κλπ. που να σπρώχνουν το παιδί στην έρευνα, την κριτική σκέψη και όχι την απομνημόνευση .



Το σύστημα εισαγωγικών εξετάσεων στην Ανώτατη Εκπαίδευση έχει αποβεί καταστρεπτικό για την έννοια της αληθινής παιδείας ως διάπλαση πνεύματος, ψυχής, προσωπικότητας και σωστής επαγγελματικής επιλογής των νέων. Όσο καλή και αν είναι η προαίρεση και προσπάθεια των εκπαιδευτικών δεν είναι αρκετή για να εξαλείψει εντελώς τη αυταρχική παιδεία του παρελθόντος, τον τρόπο που μεγαλώσαμε όλοι, τον τρόπο που διδαχτήκαμε οι ίδιοι. Η ασφυκτική πίεση, των συνθηκών εργασίας των εκπαιδευτικών, των προγραμμάτων σπουδών, των κτηριακών υποδομών μηδενίζουν πολλές φορές κάποιες προσπάθειες μαθητών και εκπαιδευτικών να ασχοληθούν απερίσπαστοι για την πραγματική επιστημονική γνώση. Το σύστημα εκπαίδευσης πρέπει να επικεντρώνει στην αγάπη για τη μάθηση, την προσήλωση στην πνευματική πρόοδο, την καλλιέργεια κριτικής ικανότητας και την ελεύθερη ανάπτυξη ταλέντων. Το τρίπτυχο που αποτελεί την ουσία του Μοντεσσोरιανού συστήματος αγωγής και εκπαίδευσης είναι:

Ανεξαρτησία,

Ελευθερία με όρια και

Σεβασμός για την φυσική ψυχολογική ανάπτυξη του παιδιού («Ψυχική υγεία του παιδιού πάνω απ' όλα»).

Αριθμοί γίγαντες γύρω και μέσα μας

Γιαννιώτη Φένια Μπατέλης Χρήστος

Όταν αναφερόμαστε σε αριθμούς γίγαντες πρόκειται για πάρα πολύ μεγάλους αριθμούς. Τέτοιοι αριθμοί υπάρχουν παντού, τόσο γύρω μας όσο και μέσα μας, αρκεί να ξέρουμε πως να τους αναγνωρίζουμε.

Ας ξεκινήσουμε με γνωστούς αριθμούς. Το χίλια έχει τρία μηδενικά, το εκατομμύριο έχει έξι μηδενικά, το δισεκατομμύριο έχει εννέα μηδενικά και γενικά κάθε φορά που προσθέτετε τρία μηδενικά, έχετε ένα αριθμό με νέο όνομα.

εκατομμύριο	εξάκις εκατομμύριο	εντεκάκις εκατομμύριο
δισεκατομμύριο	επτάκις εκατομμύριο	...
τρισεκατομμύριο	οκτάκις εκατομμύριο	...
τετράκις εκατομμύριο	εννεάκις εκατομμύριο	...
πεντάκις εκατομμύριο	δεκάκις εκατομμύριο	googol

Τι είναι το googol;

Είναι ένας αριθμός που σχηματίζεται από τη μονάδα ακολουθούμενη από 100 μηδενικά.

Ο μαθηματικός Εντουαρντ Κάσνερ έδωσε το όνομα σ' αυτό τον αριθμό. Ζήτησε τη γνώμη του 9χρονου ανιψιού του και η απάντηση ήταν googol. Ο ανιψιός σκέφτηκε ακόμα και το googolplex, τη μονάδα ακολουθούμενη από googol μηδενικά. Είναι ένα τεράστιος αριθμός χωρίς καμιά πρακτική αξία, να φανταστείτε ότι το σύμπαν δεν έχει αρκετό χώρο για να τον γράψουμε. Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε έναν πολύ γρήγορο εκτυπωτή που μπορεί και τυπώνει 1 εκατομμύριο ψηφία κάθε δευτερόλεπτο. Αν υποθέσουμε ότι ξεκίνησε την εκτύπωση στην αρχή του σύμπαντος, δηλαδή 13,8 δισεκατομμύρια χρόνια πριν ή αλλιώς 10^{18} δευτερόλεπτα πριν, τότε το πλήθος των ψηφίων που θα έχουμε θα είναι ακόμα πολύ μικρότερο από το 1 googol. Να σημειώσουμε ότι η μηχανή αναζήτησης του διαδικτύου Google πήρε το όνομά της από το googol.



Ας δούμε μερικά παραδείγματα με γίγαντες αριθμούς που υπάρχουν γύρω μας.

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε την έκφραση «αστρονομικός αριθμός». Οι άνθρωποι δεν έπλασαν τυχαία τη συγκεκριμένη έκφραση. Έχει να κάνει με το πλήθος των άστρων του Γαλαξία μας, με τις αποστάσεις μεταξύ των ουράνιων σωμάτων, το μέγεθος, το βάρος ή την ηλικία των πλανητών, σε κάθε περίπτωση συναντάμε πάντα αριθμούς οι οποίοι ξεπερνούν τη

φαντασία μας. Ο Έλληνας μαθηματικός Αρχιμήδης προσπάθησε να υπολογίσει πόσοι κόκκοι άμμου θα γέμιζαν το σύμπαν. Στη προσπάθειά του να τους υπολογίσει, ο Αρχιμήδης εφηύρε νέους τρόπους μέτρησης χρησιμοποιώντας κολοσσιαίους αριθμούς που τους ονόμασε μυριάδες (1 μυριάδα=10.000) και δούλευαν όπως οι δυνάμεις. Σύμφωνα με τους υπολογισμούς του Αρχιμήδη, θα χρειαστείτε 10^{63} (1 εικοσάκις εκατομμύριο) κόκκους άμμου για να γεμίσετε το σύμπαν. Στον αέρα που αναπνέουμε κρύβεται κάποιος αριθμός γίγαντας. Κάθε κυβικό εκατοστό ατμοσφαιρικού αέρα περιέχει περίπου 27.000.000.000.000.000.000 μόρια. Ένα ποτήρι νερό περιέχει περίπου 8 επτάκις εκατομμύρια μόρια και πιθανότατα μόρια που κάποτε βρέθηκαν στο σώμα και κάθε άλλου ανθρώπου στην ιστορία.

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα με γίγαντες αριθμούς που υπάρχουν μέσα μας.

Αν εξετάσουμε με το μικροσκόπιο μια σταγόνα αίματος, θα παρατηρήσουμε ένα τεράστιο πλήθος από κόκκινα σωματίδια (τα ερυθρά αιμοσφαίρια). Μοιάζουν με μικρούς δίσκους, συμπιεσμένοι στο κέντρο. Όλα σχεδόν έχουν το ίδιο μέγεθος - έχουν 0,007 χιλιοστά διάμετρο και 0,002 χιλιοστά πάχος. Υπάρχουν 5.000.000 τέτοια σωματίδια σε μία μικροσκοπική σταγόνα αίμα, η οποία έχει όγκο γύρω στο 1 κυβικό χιλιοστό. Πόσα ερυθρά αιμοσφαίρια, λοιπόν, υπάρχουν στο ανθρώπινο σώμα; Το ανθρώπινο σώμα περιέχει δεκατέσσερις φορές λιγότερα λίτρα αίμα απ' όση είναι αριθμητικά η μάζα του σε χιλιόγραμμα. Λόγου χάρη, αν κάποιος ζυγίζει 40 χιλιόγραμμα, θα έχει γύρω στα 3 λίτρα (3.000.000 κυβικά χιλιοστά) αίμα. Ένας απλός υπολογισμός θα μας δείξει ότι έχει ακριβώς:



$5.000.000 \times 3.000.000 = 15.000.000.000.000$ ερυθρά αιμοσφαίρια.

Επίσης ένας γιγαντιαίος αριθμός είναι η ποσότητα τροφής που καταναλώνει στη διάρκεια της ζωής του ένας άνθρωπος (αν θεωρήσουμε ως μέση διάρκεια ζωής τα 70 χρόνια). Θα χρειαζόταν ένα κανονικό φορτηγό τρένο για να μεταφέρει όλο το νερό, το ψωμί, το κρέας, τα ψάρια, τα λαχανικά, τα αβγά, το γάλα, κ.λπ., που θα καταναλάωνε. Είναι πραγματικά δύσκολο να πιστέψει κανείς ότι ένας άνθρωπος μπορεί να καταβροχθίσει, αν και όχι μονομιάς φυσικά, ένα ολόκληρο φορτηγό τρένο φορτωμένο με τόνους τρόφιμα.

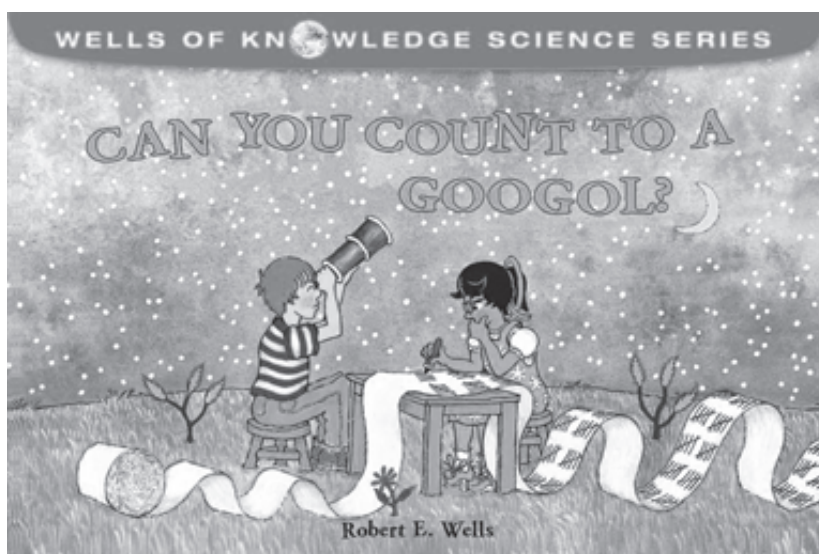
Να δούμε και κάτι από τα φυτά.

Μια ώριμη παπαρούνα έχει κατά μέσο όρο 3.000 μικροσκοπικούς σπόρους, καθένας από τους οποίους μπορεί να δώσει ένα νέο φυτό. Πόσα φυτά θα είχαμε αν φύτευαν όλοι οι σπόροι; Αν υπάρχει αρκετό καλλιεργήσιμο έδαφος γύρω από την παπαρούνα, από κάθε σπόρο της θα φυτρώσει ένα φυτό που θα μας δώσει άλλα 3.000 φυτά ως το επόμενο καλοκαίρι. Καθένα από τα 3.000 φυτά θα δώσει τουλάχιστον μία παπαρούνα (συνήθως δίνουν περισσότερες) με 3.000 σπόρους. Όταν κι αυτοί οι σπόροι βλαστήσουν, θα μας δώσουν ο

καθένας 3.000 νέα φυτά. Έτσι, στο τέλος του δεύτερου χρόνου θα έχουμε: $3.000 \times 3.000 = 9.000.000$ φυτά. Στο τέλος του τρίτου χρόνου οι απόγονοι της αρχικής μας παπαρούνας θα είναι: $9.000.000 \times 3.000 = 27.000.000.000$.

Στο τέλος του τέταρτου χρόνου: $27.000.000.000 \times 3.000 = 81.000.000.000.000$.

Στο τέλος του πέμπτου χρόνου δεν θα υπάρχει αρκετός χώρος στη Γη για τις παπαρούνες μας, γιατί το πλήθος τους τότε θα είναι: $81.000.000.000.000 \times 3.000 = 243.000.000.000.000.000$. Γνωρίζουμε ότι ολόκληρη η στερεή επιφάνεια του πλανήτη μας, δηλαδή όλες οι ήπειροι και τα νησιά, είναι μόνο 135.000.000 τετραγωνικά χιλιόμετρα, ή **135.000.000.000.000** τετραγωνικά μέτρα. Ο σπόρος της παπαρούνας κρύβει έναν γιγαντιαίο αριθμό! Αυτός ο αριθμός είναι περίπου 2.000 φορές μικρότερος από το πλήθος των φυτών παπαρούνας που θα έχουν βλαστήσει ως το τέλος του πέμπτου χρόνου. Βλέπετε, λοιπόν, ότι αν όλοι οι σπόροι φύτευαν και γίνονταν φυτά, οι απόγονοι μίας παπαρούνας θα κάλυπταν μέσα σε πέντε χρόνια ολόκληρη την ξηρά της Γης με 2.000 φυτά ανά τετραγωνικό μέτρο. Εύλογα θα ρωτούσε κάποιος πώς δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο; Ο λόγος είναι απλός: η συντριπτική πλειοψηφία των σπόρων πεθαίνει πριν ριζώσει. Ή πέφτουν σε άγονο έδαφος ή, αν προλάβουν να βλαστήσουν, πνίγονται από άλλα φυτά ή κατατρώνονται από τα ζώα. Αντίστοιχα παραδείγματα μπορούμε να βρούμε και στα ζώα και στα έντομα. Για παράδειγμα, το πλήθος των εντόμων που αντιστοιχούν σε κάθε άνθρωπο είναι 1,4 δισεκατομμύρια. Αν αναλογιστούμε ότι ο παγκόσμιος πληθυσμός το 2024 ήταν 8,16 δισεκατομμύρια, τότε το πλήθος των εντόμων το 2024 ήταν: **1.400.000.000 x 8.160.000.000**. Επίσης, το συνολικό βάρος όλων των εντόμων της γης είναι 70 φορές μεγαλύτερο από το συνολικό βάρος των ανθρώπων. Πως μπορούμε να το υπολογίσουμε όμως; Αφού το μέσο βάρος των ανθρώπων είναι 65 κιλά και το πλήθος των ανθρώπων είναι 8,16 δισεκατομμύρια, τότε το συνολικό βάρος είναι: **65 x 8.160.000.000**. Άρα, το συνολικό βάρος των εντόμων της γης είναι: **65 x 8.160.000.000 x 70**.



Βιβλιογραφία

1. Διασκεδαστικά Μαθηματικά Yakov Perelman
2. Σκέψου έναν αριθμό JOHNNY BALL
3. Richard Fisher (2003). *The numbers that are too big to imagine*. BBC
4. Royal entomological society website



Ασκήσεις Επανάληψης

Χρήστος Π. Τσιφάκης – Αγγελική Γ. Δανιήλογλου

Για τα παιδιά που ονειρεύονται....., για τα παιδιά που προσπαθούν.....

ΑΣΚΗΣΗ 1.

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 4^2 + (2^3 - 1, 25 \cdot 4)^2 \cdot 2 - (1, 84 : 2, 3 + 1^{2025}) : 3$$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= 4^2 + (2^3 - 1, 25 \cdot 4)^2 \cdot 2 - (1, 84 : 2, 3 + 1^{2025}) : 3 \\ &= 16 + (8 - 5)^2 \cdot 2 - \left(\frac{184}{10} \cdot \frac{10}{23} + 1 \right) : 3 = \\ &= 16 + 3^2 \cdot 2 - (8 + 1) : 3 = 16 + 18 - 3 = 31 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.

Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = 4 + 3 \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4} \right) : \frac{5}{2} \text{ και}$$

$$B = 2^5 - 29 \cdot (3^2 - 2^3)^{2024} + (6^2 - 9 \cdot 4) \cdot 29 + 5^2 : (3^2 - 2^2)$$

α) Να δείξετε ότι $A = \frac{9}{2}$ και $B = 8$

β) Να υπολογίσετε την παράσταση $\Gamma = 4A - 2B$.

Λύση

$$\alpha) A = 4 + 3 \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4} \right) : \frac{5}{2} =$$

$$4 + 1 - \left(\frac{6}{4} - \frac{1}{4} \right) : \frac{5}{2} = 5 - \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{5} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}.$$

$$B = 2^5 - 29 \cdot (3^2 - 2^3)^{2024} + (6^2 - 9 \cdot 4) \cdot 29 + 5^2 : (3^2 - 2^2) =$$

$$32 - 29 \cdot (9 - 8)^{2024} + (36 - 36) \cdot 29 + 25 : (9 - 4) =$$

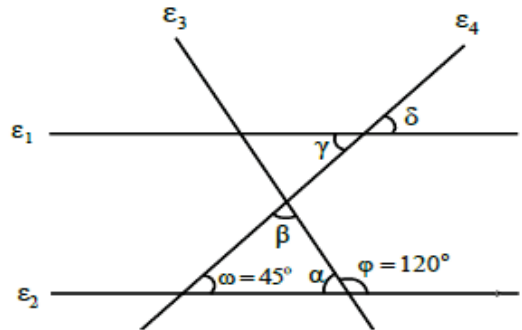
$$32 - 29 + 0 + 25 : 5 = 3 + 5 = 8.$$

$$\beta) \Gamma = 4A - 2B = 4 \cdot \frac{9}{2} - 2 \cdot 8 = 18 - 16 = 2.$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι ευθείες

$(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2)$ που τέμνονται από τις (ε_3) και (ε_4) . Να υπολογίσετε τις γωνίες α , β , γ , δ αν γνωρίζετε ότι $\omega = 45^\circ$ και $\varphi = 120^\circ$.



Λύση

Η γωνία $\gamma = \omega = 45^\circ$ ως εντός εναλλάξ.

Η γωνία $\delta = \gamma = 45^\circ$ ως κατακορυφήν.

Η γωνία α είναι παραπληρωματική της φ
 $\alpha = 180^\circ - \varphi = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Έχουμε ότι $\alpha + \beta + \omega = 180^\circ$, άρα

$$\beta = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.

Ένα ποδηλάτο κόστιζε αρχικά 200€. Στην αρχή του έτους η τιμή του αυξήθηκε κατά 10%.

α) Να βρείτε τη νέα τιμή του ποδηλάτου μετά την αύξηση κατά 10%.

β) Μετά από δυο μήνες έγινε ξανά αύξηση της νέας τιμής του ποδηλάτου κατά 20%. Ποια είναι η τελική τιμή μετά τη νέα αύξηση;

γ) Να βρείτε το ποσοστό της συνολικής αύξησης της τιμής του ποδηλάτου μετά τις δυο διαδοχικές αυξήσεις.

Λύση

$$\alpha) \text{ Η πρώτη αύξηση είναι: } 200 \cdot \frac{10}{100} = 20 \text{ ευρώ.}$$

Άρα η νέα τιμή του ποδηλάτου είναι 220 €.

β) Η νέα αύξηση είναι: $220 \cdot \frac{20}{100} = 44 \text{ €}$, άρα η νέα τιμή του είναι: 264 €.

γ) Η αρχική τιμή ήταν 200 € και η τελική του 264 €. Άρα το ποσοστό αύξησης είναι $\frac{64}{200} = \frac{32}{100} = 32\%$.

ΑΣΚΗΣΗ 5.

Σ' ένα Γυμνάσιο, για την ανάδειξη προέδρου του 15μελούς, ψήφισαν 250 μαθητές. Ο υποψήφιος Α πήρε το 46% των ψήφων, ο υποψήφιος Β πήρε 100 ψήφους ενώ τα υπόλοιπα ψηφοδέλτια ήταν άκυρα και λευκά.

α. Πόσες ψήφους πήρε ο υποψήφιος Α;

β. Τι ποσοστό πήρε ο υποψήφιος Β και τι ποσοστό πήραν τα άκυρα και λευκά ψηφοδέλτια;

Λύση

α. Ο Α υποψήφιος πήρε $250 \cdot \frac{46}{100} = 115$ ψήφους.

β. Ο Β υποψήφιος πήρε $\frac{100}{250} = \frac{2}{5} = 0,4$, άρα πήρε το 40% των ψήφων, οπότε τα άκυρα και λευκά ήταν το $(100 - 46 - 40)\% = 14\%$ των ψήφων.

ΑΣΚΗΣΗ 6.

Ένας υπάλληλος ξοδεύει τον μήνα από τον μισθό του τα $\frac{2}{5}$ για φαγητό, το $\frac{1}{4}$ για ενοίκιο, το $\frac{1}{10}$

για ατομικά έξοδα και του περισσεύουν 300 €.

α) Συγκρίνοντας τα κλάσματα του μισθού που ξοδεύει, να βρείτε που ξοδεύει τα περισσότερα και που τα λιγότερα.

β) Ποιο είναι το ποσοστό του μισθού που του περισσεύει και πόσος είναι ο μισθός του;

Λύση

α) Έχουμε ότι ξοδεύει $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$ δηλαδή

$\frac{8}{20}$, $\frac{5}{20}$, $\frac{2}{20}$. Άρα ξοδεύει τα λιγότερα για ατομικά και τα περισσότερα για φαγητό.

β) Συνολικά ξοδεύει τα

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{8}{20} + \frac{5}{20} + \frac{2}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \text{ του}$$

μισθού του. Άρα τα 300 € που του περισσεύουν αντιστοιχούν στο $\frac{1}{4}$ του μισθού του. Άρα ο

συνολικός μισθός του είναι $300 : \frac{1}{4} = 1200 \text{ €}$.

ΑΣΚΗΣΗ 7.

Δίνεται ο αριθμός 73α0, όπου α ένα ψηφίο ώστε ο αριθμός να διαιρείται με το 9.

i) Να βρείτε το ψηφίο α.

ii) Να υπολογίσετε την τιμή του

$$\beta = \alpha^2 - (\alpha + 10) : 3 - 5 \cdot \alpha$$

iii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός $K = 5 \cdot \alpha + 10 \cdot \beta$ διαιρείται με καθέναν από τους 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10 και 25.

Λύση

i) Για να διαιρείται ένας αριθμός με το 9 πρέπει το άθροισμα των ψηφίων του να διαιρείται με το 9. Άρα $7 + 3 + \alpha + 0 = 10 + \alpha = \text{πολ}9$. Άρα πρέπει το $\alpha = 8$.

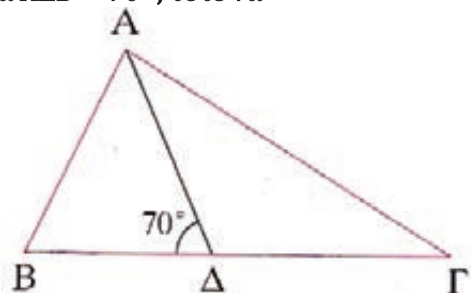
ii) $\beta = \alpha^2 - (\alpha + 10) : 3 - 5 \cdot \alpha = 8^2 - 18 : 3 - 5 \cdot 8 = 64 - 6 - 40 = 18$.

iii) $K = 5 \cdot \alpha + 10 \cdot \beta = 40 + 180 = 220$

Ο αριθμός 220 γράφεται ως γινόμενο πρώτων παραγόντων: $220 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11$, άρα διαιρείται με τους 2, 4, 5, 10.

ΑΣΚΗΣΗ 8.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Αν η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας ΒΑΓ σχηματίζει με την πλευρά ΒΓ γωνία $\angle ADB = 70^\circ$, τότε να



βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ και το είδος του τριγώνου ΑΒΔ ως προς τις πλευρές.

Λύση

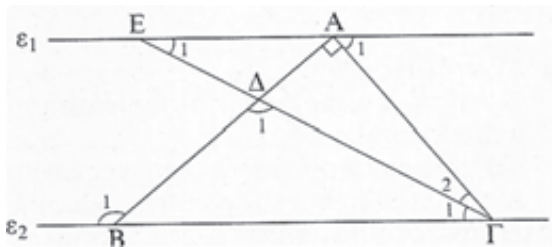
Η γωνία $\hat{A}\hat{\Delta}B = 70^\circ$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\Delta\hat{A}\Gamma$, άρα $\hat{A}\hat{\Delta}B = \hat{\Delta}\hat{A}\Gamma + \hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{\Delta}\hat{A}\Gamma = \hat{A}\hat{\Delta}B - \hat{\Gamma} = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$.

Αφού η $\Delta\hat{A}$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ έχουμε $\hat{B}\hat{A}\Delta = \hat{\Delta}\hat{A}\Gamma = 30^\circ$, άρα $\hat{A} = 60^\circ$ και τότε η $\hat{B} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.

Το τρίγωνο $\Delta\hat{B}\Delta$ είναι σκαληνό.

ΑΣΚΗΣΗ 9.

Στο παρακάτω σχήμα είναι $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$, $\hat{B}_1 = 140^\circ$, $\hat{\Delta}_1 = 4\hat{\Gamma}_1$ και $BA \perp AG$. Να βρείτε τις γωνίες $\hat{\Delta}_1$, $\hat{A}_1$ και $\hat{\Gamma}_2$.



Λύση

Η γωνία $\hat{\Gamma}\hat{B}\Delta = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$ ως παραπληρωματική της $\hat{B}_1 = 140^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\hat{B}\Gamma$ θα έχουμε ότι

$\hat{\Gamma} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ οπότε η $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma} = 50^\circ$ ως εντός εναλλάξ.

Στο τρίγωνο $\Delta\hat{B}\Gamma$ έχουμε: $\hat{\Delta}_1 + \hat{B} + \hat{\Gamma}_1 = 180^\circ$

άρα $5 \cdot \hat{\Gamma}_1 = 180^\circ - 40^\circ$ δηλαδή $\hat{\Gamma}_1 = \frac{140^\circ}{5} = 28^\circ$

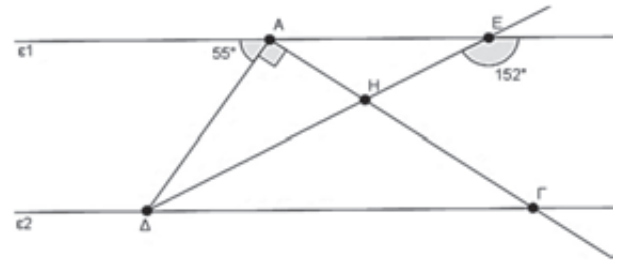
και η $\hat{\Gamma}_2 = 50^\circ - 28^\circ = 22^\circ$.

ΑΣΚΗΣΗ 10.

Στο παρακάτω σχήμα είναι $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}\hat{E}H$ και $\hat{H}\hat{A}E$

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{E}\hat{\Delta}\Gamma$ και $\hat{A}\hat{\Gamma}\Delta$
 γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\Delta}\hat{H}\Gamma$ και $\hat{A}\hat{H}\Delta$
 δ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}\hat{\Delta}H$ και να εξετάσετε αν το τρίγωνο $\Delta\hat{A}E$ είναι ισοσκελές.



Λύση

α) Η γωνία $\hat{A}\hat{E}H = 180^\circ - 152^\circ = 28^\circ$ ως παραπληρωματική της $\hat{E} = 152^\circ$.

Η γωνία $\hat{H}\hat{A}E = 180^\circ - (90^\circ + 55^\circ) = 35^\circ$.

β) Η γωνία $\hat{E}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{A}\hat{E}H = 28^\circ$, ως εντός εναλλάξ. Όμοια η γωνία $\hat{A}\hat{\Gamma}\Delta = \hat{H}\hat{A}E = 35^\circ$ ως εντός εναλλάξ.

γ) Στο τρίγωνο $\Delta\hat{H}\Gamma$ έχουμε $\hat{\Delta}\hat{H}\Gamma = 180^\circ - (28^\circ + 35^\circ) = 117^\circ$ και η

$\hat{A}\hat{H}\Delta = 63^\circ$, ως παραπληρωματική της.

δ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\hat{A}H$ έχουμε ότι

$\hat{A}\hat{\Delta}H = 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ$. Άρα το τρίγωνο $\Delta\hat{A}E$ δεν είναι ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ 11.

Να βρεθεί ο μικρότερος θετικός ακέραιος α , ο οποίος είναι πολλαπλάσιο του 25 και διαιρούμενος με 8, 9, 10 δίνει κάθε φορά υπόλοιπο 5.

Λύση

Αν ο αριθμός α είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος που διαιρείται με το 8, 9, 10 και αφήνει κάθε φορά υπόλοιπο 5, τότε ο αριθμός $\alpha - 5$ θα είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο του 8, του 9 και του 10. Άρα ο $\alpha - 5 = 720$ δηλαδή $\alpha = 725$, ο οποίος είναι πολλαπλάσιο του 25.

ΑΣΚΗΣΗ 12.

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$K = -2 - (5 - 3 + 8) - 10 - 2 \cdot (-3 - 5)$$

$$\Lambda = [(-3) \cdot (-1) + (-2) \cdot (+3)] \cdot (-2) + 2$$

$$M = \left[(-1) \cdot \left(+\frac{1}{2} \right) \right] : \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) :$$

α) Να δείξετε ότι $K = -6$, $\Lambda = 8$, $M = -\frac{1}{2}$.

β) Να υπολογίσετε τις απόλυτες τιμές: $\left| \frac{K}{\Lambda} \right|$, $\left| \frac{\Lambda}{M} \right|$, $|M|$ και να απλοποιήσετε τα κλάσματα που προκύπτουν.

γ) Να διατάξετε τα κλάσματα του (β) ερωτήματος από το μικρότερο στο μεγαλύτερο.

Λύση

$$\alpha) K = -2 - (5 - 3 + 8) - 10 - 2 \cdot (-3 - 5) =$$

$$-2 - 5 + 3 - 8 - 10 + 6 + 10 =$$

$$-2 - 5 + 3 - 8 + 6 + 10 = 9 - 15 = -6.$$

$$\Lambda = [(-3) \cdot (-1) + (-2) \cdot (+3)] \cdot (-2) + 2 =$$

$$(3 - 6) \cdot (-2) + 2 = (-3) \cdot (-2) + 2 = 6 + 2 = 8.$$

$$M = \left[(-1) \cdot \left(+\frac{1}{2} \right) \right] : \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) = \left(-\frac{1}{2} \right) : 1 = -\frac{1}{2}.$$

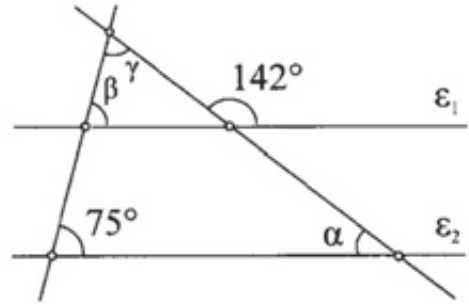
$$\beta) \left| \frac{K}{\Lambda} \right| = \left| \frac{-6}{8} \right| = \left| -\frac{3}{4} \right| = \frac{3}{4},$$

$$\left| \frac{\Lambda}{M} \right| = \left| \frac{8}{-\frac{1}{2}} \right| = |-16| = 16, |M| = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

$$\gamma) \text{ Έχουμε } \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 16 \text{ άρα } |M| < \left| \frac{K}{\Lambda} \right| < \left| \frac{\Lambda}{M} \right|.$$

ΑΣΚΗΣΗ 13.

Στο παρακάτω σχήμα είναι $(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2)$



Να υπολογίσετε τις γωνίες α , β και γ .

Λύση

Η γωνία $\beta = 75^\circ$ ως εντός, εκτός και επί τα αυτά

Οι γωνίες $\beta + \gamma = 142^\circ$ και αφού $\beta = 75^\circ$ έχουμε
ότι $\gamma = 142^\circ - 75^\circ = 67^\circ$.

Έχουμε ότι $\alpha + 75^\circ + \gamma = 180^\circ$, δηλαδή
 $\alpha = 180^\circ - 142^\circ = 38^\circ$.

ΑΣΚΗΣΗ 14.

Αν αυξήσουμε μια γωνία x κατά 40° γίνεται ίση με την παραπληρωματική της. Να υπολογίσετε τη γωνία καθώς και την παραπληρωματική της.

Λύση

Η παραπληρωματική της γωνίας x ισούται με $180^\circ - x$.

Άρα έχουμε $x + 40^\circ = 180^\circ - x$ δηλαδή

$$2x = 180^\circ - 40^\circ \text{ ή } 2x = 140^\circ \text{ άρα } x = 70.$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Α) Να συμπληρώσετε τα κενά:

Δύο ποσά x και y λέγονται ανάλογα όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ποσού x με έναν αριθμό, τότε οι αντίστοιχες τιμές του άλλου ποσού y με τον ίδιο αριθμό.

Το πηλίκο των ανάλογων ποσών x και y λέγεται και είναι πάντα

Τα ανάλογα ποσά x και y συνδέονται με την ισότητα

Τα ζευγάρια των τιμών (x, y) παριστάνουν σημεία που βρίσκονται πάνω σε

γραμμή που διέρχεται από το σημείο

Β) Να συμπληρώσετε τα κενά:

1) Απόλυτη τιμή ενός αριθμού, ονομάζεται η του σημείου που παριστάνεται στον άξονα από τον αριθμό αυτόν, από το σημείο

2) Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού a , συμβολίζεται με και δεν μπορεί να είναι

..... αριθμός.

3) Από δύο αρνητικούς αριθμούς μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει την

απόλυτη τιμή.

4) Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη

..... τιμή, την και στο άθροισμα βάζουμε το πρόσημο του

..... με την απόλυτη τιμή.

5) Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους αριθμούς πολλαπλασιάζουμε τις και στο γινόμενο βάζουμε πρόσημο

Γ) Να συμπληρώσετε τα κενά:

1. Η ημιευθεία που έχει για αρχή την κορυφή μιας γωνίας και τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες ονομάζεται της γωνίας.

2. Κάθε γωνία που είναι μικρότερη από την ορθή λέγεται

Αμβλεία ονομάζεται η κυρτή γωνία που είναι από την ορθή. Το

μέτρο της είναι μεγαλύτερο από μοίρες και μικρότερο από μοίρες.

3. Δύο γωνίες που έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές τους είναι αντικείμενες ημιευθείες λέγονται

Οι γωνίες αυτές είναι

4. Παράλληλες ονομάζονται δύο ευθείες του ίδιου επιπέδου που

Δύο ευθείες του ίδιου επιπέδου που δεν είναι παράλληλες υποχρεωτικά

και το κοινό τους σημείο λέγεται σημείο

5. Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB λέγεται και του

σημείου A από το

Δ1. Πότε δυο γωνίες ονομάζονται παραπληρωματικές; Να σχεδιάσετε δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες.

Δ2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

α. Οξεία γωνία λέγεται κάθε γωνία με μέτρο μικρότερο των 90°

β. Πλήρης γωνία λέγεται η γωνία της οποίας το μέτρο είναι ίσο με 180°

γ. Μη κυρτή γωνία λέγεται κάθε γωνία με μέτρο μεγαλύτερο των 90° και

μικρότερο των 180°

Δ3. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i. Κατακορυφήν γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν την κορυφή τους και τις πλευρές τους

ii. Δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 90° ονομάζονται

Ε) Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις

Ε1) Ποια είναι η σειρά με την οποία πρέπει να κάνουμε τις πράξεις σε μία αριθμητική παράσταση;

Ε2) Πότε δύο γωνίες λέγονται παραπληρωματικές, πότε λέγονται συμπληρωματικές, πότε λέγονται εφεξής και πότε κατακορυφήν;

ΣΤ) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

ΣΤ1) Το ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από μια κορυφή ενός τριγώνου κάθετα στην απέναντι πλευρά ονομάζεται του τριγώνου

ΣΤ2) Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος AB από τα άκρα A και B του ευθυγράμμου τμήματος.

ΣΤ3) Το ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από μια κορυφή ενός τριγώνου μέχρι το μέσο της απέναντι πλευράς ονομάζεται του τριγώνου.

Β' Τάξη

Ασκήσεις για Επανάληψη

Θανάσης Χριστόπουλος

Ασκηση 1^η

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$i) \quad \frac{3x-2}{4} - \frac{5x-1}{6} = \frac{2(x-2)}{3} + 1$$

$$ii) \quad \frac{\frac{3}{5}(x-2)}{2} - \frac{\frac{1}{2}(3x-1)}{5} - \frac{x-3}{10} = \frac{4}{5}(2x-4)$$

Λύση

i) Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το ΕΚΠ των παρονομαστών, οπότε:

$$12 \cdot \frac{3x-2}{4} - 12 \cdot \frac{5x-1}{6} = 12 \cdot \frac{2(x-2)}{3} + 12 \cdot 1 \quad \text{ή}$$

$$3 \cdot (3x-2) - 2 \cdot (5x-1) = 8 \cdot (x-2) + 12 \quad \text{ή}$$

$$9x - 6 - 10x + 2 = 8x - 16 + 12 \quad \text{ή} \quad -9x = 0$$

άρα $x=0$

$$ii) \quad \frac{\frac{3}{5}(x-2)}{2} - \frac{\frac{1}{2}(3x-1)}{5} - \frac{x-3}{10} = \frac{4}{5}(2x-4) \quad \text{ή}$$

$$\frac{3(x-2)}{10} - \frac{(3x-1)}{10} - \frac{x-3}{10} = \frac{4}{5}(2x-4) \quad \text{ή}$$

$$10 \cdot \frac{3(x-2)}{10} - 10 \cdot \frac{(3x-1)}{10} - 10 \cdot \frac{x-3}{10} = 10 \cdot \frac{4}{5}(2x-4)$$

$$3(x-2) - (3x-1) - (x-3) = 8(2x-4) \quad \text{ή}$$

$$3x - 6 - 3x + 1 - x + 3 = 16x - 32 \quad \text{ή}$$

$$3x - 3x - x - 16x = +6 - 5 - 3 - 32 \quad \text{ή}$$

$$-17x = -34 \quad \text{άρα } x=2$$

Ασκηση 2^η

Να λύσετε την ανίσωση:

$$3 - 2 \frac{2x-3}{3} - \frac{x}{6} < \frac{1}{2} \left(1 - 5 \frac{x-1}{3} \right)$$

Λύση

$$3 - 2 \frac{2x-3}{3} - \frac{x}{6} < \frac{1}{2} \left(1 - 5 \frac{x-1}{3} \right) \quad \text{ή}$$

$$3 - 2 \frac{2x-3}{3} - \frac{x}{6} < \frac{1}{2} - 5 \frac{x-1}{6} \quad \text{ΕΚΠ}=6$$

$$6 \cdot 3 - 6 \cdot 2 \frac{2x-3}{3} - 6 \cdot \frac{x}{6} < 6 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot 5 \frac{x-1}{6} \quad \text{ή}$$

$$18 - 4(2x-3) - x < 3 - 5(x-1) \quad \text{ή}$$

$$18 - 8x + 12 - x < 3 - 5x + 5 \quad \text{ή} \quad -4x < -22$$

$$\text{Άρα } x > \frac{11}{2}$$

Ασκηση 3^η

Να βρείτε τις κοινές ακέραιες λύσεις των ανισώσεων:

$$i) \quad 1 - \frac{2(x-5)}{6} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{3x-7}{4} + 1 \right) \quad \text{και}$$

$$ii) \quad \frac{x}{3} - \frac{2x-1}{5} < \frac{x + \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}} - 3$$

Λύση

$$i) \quad 1 - \frac{2(x-5)}{6} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{3x-7}{4} + 1 \right) \quad \text{ή}$$

$$1 - \frac{2(x-5)}{6} \geq \frac{3x-7}{12} + \frac{1}{3} \quad \text{ή}$$

$$12 \cdot 1 - 12 \cdot \frac{2(x-5)}{6} \geq 12 \cdot \frac{3x-7}{12} + 12 \cdot \frac{1}{3} \quad \text{ή}$$

$$12 - 4(x-5) \geq 3x - 7 + 4 \quad \text{ή} \quad -7x \geq -35$$

$$\text{Άρα } x \leq 5$$

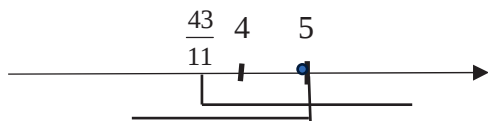
$$ii) \quad \frac{x}{3} - \frac{2x-1}{5} < \frac{x + \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}} - 3 \quad \text{ή}$$

$$\frac{x}{3} - \frac{2x-1}{5} < \frac{2x+1}{3} - 3 \quad \text{ή}$$

$$15 \cdot \frac{x}{3} - 15 \cdot \frac{2x-1}{5} < 15 \cdot \frac{2x+1}{3} - 15 \cdot 3 \quad \text{ή}$$

$$5x - 6x + 3 < 10x + 5 - 45 \quad \text{ή} \quad -11x < -43$$

$$\text{Άρα } x > \frac{43}{11} \quad \text{αλλά} \quad \frac{43}{11} < \frac{44}{11} = 4$$



επομένως οι ακέραιοι που αληθεύουν και τις δύο ανισώσεις είναι $x=4$ και $x=5$

Άσκηση 4^η

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \frac{4}{3} : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{3}{5} : \left[1 + \frac{2}{5} \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{1}{11} + \frac{1}{2}$$

Λύση

$$A = \frac{4}{3} : \frac{1}{6} + \frac{3}{5} : \left[1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{6} \right] + \frac{1}{11} + \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{4}{3} : \frac{1}{6} + \frac{3}{5} : \frac{22}{15} + \frac{1}{11} + \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{4}{3} \cdot 6 + \frac{3}{5} \cdot \frac{15}{22} + \frac{1}{11} + \frac{1}{2}$$

$$A = 8 + \frac{9}{22} + \frac{2}{22} + \frac{11}{22}$$

$$A = 8 + \frac{22}{22} \text{ οπότε } A=9$$

Άσκηση 5^η

Να γράψετε τον αριθμό

$$\kappa = \frac{3,96}{13,2} \cdot \frac{2^{13} \cdot 5^{10} \cdot 25^2}{4^{-3} \cdot 5^{-3}}, \text{ σε μορφή: } \alpha \cdot 10^\gamma \text{ με}$$

$$1 \leq \alpha < 10$$

Λύση

$$\kappa = \frac{3,96}{13,2} \cdot \frac{2^{13} \cdot 5^{10} \cdot 25^2}{4^{-3} \cdot 5^{-3}}$$

$$\kappa = 0,3 \cdot \frac{2^{13} \cdot 5^{10} \cdot (5^2)^2}{(2^2)^{-3} \cdot 5^{-3}}$$

$$\kappa = 0,3 \cdot 2^{13} \cdot 5^{10} \cdot 5^4 2^6 \cdot 5^3$$

$$\kappa = 0,3 \cdot 2^{19} \cdot 5^{17} \text{ ή } \kappa = 0,3 \cdot 2^2 (2 \cdot 5)^{17}$$

$$\text{και τελικά } \kappa = 1,2 \cdot 10^{17}$$

Άσκηση 6^η

Σε τρίγωνο ΑΒΓ οι πλευρές του είναι:

$$AB = \sqrt{27\sqrt{3}\sqrt{9}} + \sqrt{6 \cdot \sqrt{39} - \sqrt{9}}$$

$$BG = \sqrt{76} + \sqrt{23} + \sqrt{4}$$

$$AG = \sqrt{3} \left(\sqrt{12} + \sqrt{|5-8|} \right) + 3^{3^0}$$

Δείξτε ότι αυτό είναι ορθογώνιο. Ποια είναι η ορθή γωνία;

Λύση

$$AB = \sqrt{27\sqrt{3} \cdot 3} + \sqrt{6 \cdot \sqrt{39} - 3} \text{ ή}$$

$$AB = \sqrt{27 \cdot 3} + \sqrt{6 \cdot 6} \text{ οπότε } AB=15$$

$$BG = \sqrt{76} + \sqrt{23+2} \text{ ή } BG = \sqrt{76+5}$$

$$BG = \sqrt{81} \text{ οπότε } BG=9$$

$$AG = \sqrt{3} \left(\sqrt{12} + \sqrt{|5-8|} \right) + 3^{3^0} \text{ ή}$$

$$AG = \sqrt{3} \left(\sqrt{3 \cdot 4} + \sqrt{|-3|} \right) + 3^1 \text{ ή}$$

$$AG = \sqrt{3} \left(\sqrt{3} \cdot \sqrt{4} + \sqrt{3} \right) + 3 \text{ ή}$$

$$AG = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 2 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 3 \text{ ή } AG=6+3+3 \text{ οπότε } AG=12.$$

Μεγαλύτερη πλευρά είναι η ΑΒ και

$$AB^2=15^2=225, \text{ επίσης}$$

$$BG^2+AG^2=9^2+12^2=81+144=225 \text{ επομένως το}$$

τρίγωνο είναι ορθογώνιο και η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή, δηλαδή $\hat{\Gamma} = 90^\circ$

Άσκηση 7^η

Στο παρακάτω τραπέζιο είναι $AB=9\text{cm}$,

$$BG=10\text{cm}, \Gamma\Delta=15\text{cm}$$

Να βρεθεί η περίμετρος και το εμβαδόν του

Λύση

Φέρουμε ΓΕ κάθετη στην ΑΔ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΔΕ είναι ΓΕ=ΑΒ=9,

οπότε από πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$E\Delta^2 = \Gamma\Delta^2 - E\Gamma^2 \text{ οπότε } E\Delta^2 = 15^2 - 9^2 \text{ άρα}$$

$$E\Delta^2 = 225 - 81 = 144 \text{ επομένως } E\Delta = 12$$

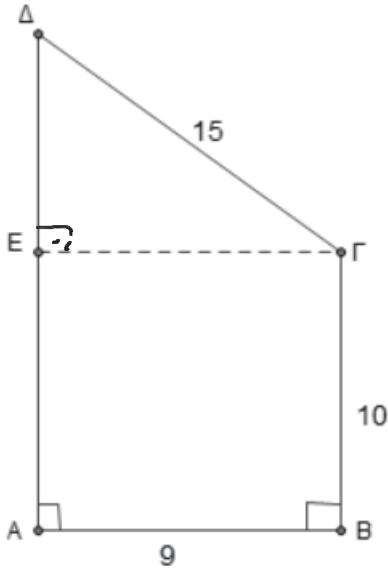
Το ΑΒΓΕ είναι ορθογώνιο και άρα

ΑΕ=ΒΓ=10 οπότε ΑΔ=22

Περίμετρος ΑΒΓΔ=9+10+15+22=56

Εμβαδόν τραπεζίου, $E = \frac{(B + \beta) \cdot \upsilon}{2}$

$$E = \frac{(22 + 10) \cdot 9}{2} \text{ οπότε } E = 16 \cdot 9 = 144$$



Άσκηση 8^η

Σε κύκλο (Ο,ρ) θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ, εγγεγραμμένο σε αυτόν. Αν ΑΒ=5cm, ΑΓ=5√3 cm και τα μέτρα των τόξων $\widehat{AB}$, $\widehat{BG}$, $\widehat{GD}$, $\widehat{DA}$ είναι διαδοχικά πολλαπλάσια των 20°. Να βρείτε α) την ακτίνα του κύκλου β) το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου γ) το λόγο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ προς το εμβαδόν του κύκλου.

Λύση

Τα τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{BG}$, $\widehat{GD}$, $\widehat{DA}$ έχουν μέτρα που είναι διαδοχικά πολλαπλάσια των 20°

Δηλαδή $\widehat{AB} = \kappa \cdot 20^\circ$, $\widehat{BG} = (\kappa + 1) \cdot 20^\circ$,

$\widehat{GD} = (\kappa + 2) \cdot 20^\circ$, $\widehat{DA} = (\kappa + 3) \cdot 20^\circ$

Όπου κ θετικός ακέραιος αριθμός.

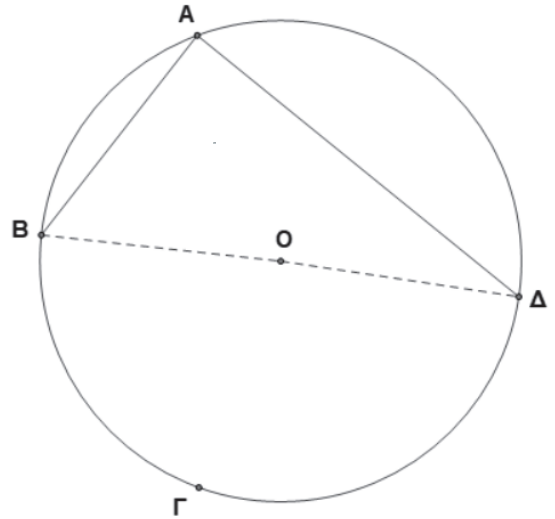
Επομένως:

$$\kappa \cdot 20^\circ + (\kappa + 1) \cdot 20^\circ + (\kappa + 2) \cdot 20^\circ + (\kappa + 3) \cdot 20^\circ = 360^\circ$$

διαιρούμε δια 20° και έχουμε

$$\kappa + \kappa + 1 + \kappa + 2 + \kappa + 3 = 18 \text{ ή } 4\kappa = 18 - 6 \text{ οπότε } \kappa = 3$$

Άρα $\widehat{AB} = 60^\circ$, $\widehat{BG} = 80^\circ$, $\widehat{GD} = 100^\circ$, $\widehat{DA} = 120^\circ$



α) παρατηρούμε ότι $\widehat{BG} + \widehat{GD} = 180^\circ$, οπότε το $\widehat{BGD}$ είναι ημικύκλιο και ΒΔ διάμετρος και επομένως $ΒΔ = 2\rho$

Η γωνία $\hat{A}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, επομένως είναι ορθή. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ με πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει $ΒΔ^2 = ΑΒ^2 + ΑΔ^2$ άρα $ΒΔ^2 = 5^2 + (5\sqrt{3})^2$ ή $ΒΔ^2 = 25 + 75 = 100$ επομένως $ΒΔ = 10\text{cm}$ και αφού $ΒΔ = 2\rho$ θα είναι $\rho = 5\text{cm}$

β) μήκος κύκλου $L = 2\pi\rho$ ή $L = 10\pi\text{ cm}$ (περίπου 31,4cm).

Εμβαδόν κύκλου $E = \pi\rho^2$ ή $E = 25\pi\text{ cm}^2$

$$\gamma) \frac{\text{εμβαδόν}_{\text{ΑΒΓ}}}{\text{εμβαδόν}_{\text{κύκλου}}} = \frac{\frac{5 \cdot 5\sqrt{3}}{2}}{25\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$

Άσκηση 9^η

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, ΓΔ ύψος και ΓΕ//ΑΒ όπως στο παρακάτω σχήμα. Αν $ΓΔ = 3\sqrt{3}\text{ cm}$, $ΒΓ = 6\text{ cm}$, $ΓΕ = 5\text{ cm}$. Να υπολογίσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ.

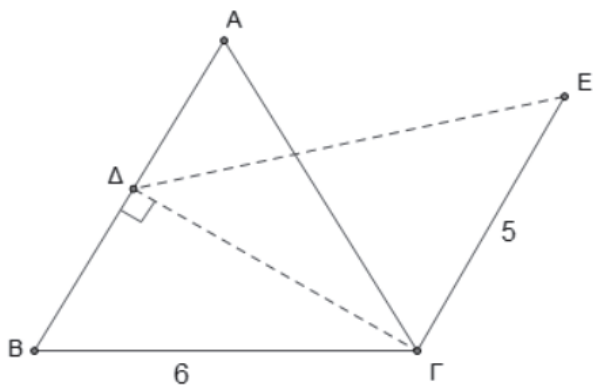
Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΓ ισχύει $ΔΒ = 6:2$ οπότε $ΔΒ = 3$ και $ΔΓ^2 = ΒΓ^2 - ΔΒ^2$ επομένως

$$\Delta\Gamma^2 = 6^2 - 3^2 \quad \text{ή} \quad \Delta\Gamma^2 = 27$$

$$\text{Η γωνία } \Delta\hat{\Gamma}E = \Delta\hat{\Gamma}A + A\hat{\Gamma}E = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$$

($\hat{A} = A\hat{\Gamma}E$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB \parallel \Gamma E$ που τέμνονται από την $A\Gamma$)



Επομένως το τρίγωνο $\Delta\Gamma E$ είναι ορθογώνιο και από πυθαγόρειο θεώρημα είναι $\Delta E^2 = \Gamma\Delta^2 + \Gamma E^2$
ή $\Delta E^2 = 27 + 25 = 52$

$$\text{Άρα } \Delta E = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

Άσκηση 10^η

Αν AD το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ και $AD = 6\text{cm}$, $BD = 3\sqrt{3}\text{cm}$, $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.

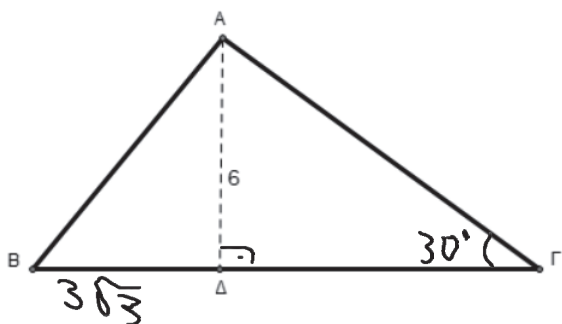
Να βρείτε

α) την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$

β) τη γωνία $\hat{A}$

γ) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση



Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AD\Gamma$ είναι

$$\eta\mu 30^\circ = \frac{6}{A\Gamma} \quad \text{οπότε} \quad A\Gamma = \frac{6}{0,5} = 12\text{cm} \quad \text{και}$$

$$\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{AD}{\Delta\Gamma} \quad \text{οπότε} \quad \Delta\Gamma = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ είναι

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \quad \text{άρα} \quad AB^2 = 6^2 + (2\sqrt{3})^2$$

$$AB^2 = 36 + 12 = 48 \quad \text{και} \quad AB = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$$

α) Περίμετρος του $AB\Gamma$: $\Pi = AB + B\Gamma + A\Gamma =$

$$4\sqrt{3} + 8\sqrt{3} + 12 = 12\sqrt{3} + 12$$

β) Παρατηρούμε ότι $B\Gamma^2 = (2\sqrt{3} + 6\sqrt{3})^2$

$$B\Gamma^2 = (8\sqrt{3})^2 = 192 \quad \text{ενώ}$$

$$AB^2 + A\Gamma^2 = 48 + 144 \quad \text{ή} \quad AB^2 + A\Gamma^2 = 192$$

Από το αντίστροφο του Πυθαγορείου προκύπτει ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με ορθή την γωνία $\hat{A}$

γ) εμβαδόν του $AB\Gamma$: $E = \frac{AB \cdot A\Gamma}{2}$ άρα

$$E = \frac{4\sqrt{3} \cdot 12}{2} = 24\sqrt{3} \text{ cm}$$

Άσκηση 11^η

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο -1 και τον άξονα $y'y$ στο 3

Λύση

Αυτό που ζητάμε είναι η εξίσωση μιας πλάγιας ευθείας που δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων, επομένως θα έχει μορφή $y = ax + \beta$.

Το σημείο -1 του άξονα $x'x$ είναι $(-1, 0)$ και το σημείο 3 του άξονα $y'y$ είναι το $(0, 3)$

Επομένως οι συντεταγμένες τους θα επαληθεύουν τη ζητούμενη εξίσωση.

Δηλαδή για $x=0, y=3$ έχουμε $3 = a \cdot 0 + \beta$ ή $\beta = 3$

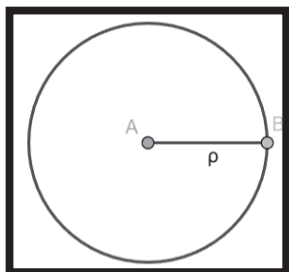
Ενώ για $x=-1, y=0$ θα είναι $0 = a(-1) + \beta$ ή $-a + 3 = 0$ και τελικά $a = 3$.

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι:
 $y = 2x + 3$.

Μήκος κύκλου & τόξου - Εμβαδόν κυκλικού δίσκου & κυκλικού τομέα

Μαρία Παππά

Μήκος κύκλου ακτίνας ρ

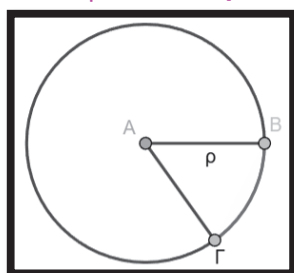


Το μήκος του τόξου (O, ρ) συμβολίζεται με L . Ο Ιπποκράτης ο Χίος απέδειξε ότι ο λόγος του μήκους προς τη διάμετρό του, είναι σταθερός για κάθε κύκλο και ίσος με π . Δηλαδή:

$$\frac{L}{2\rho} = \pi$$

Το π δεν είναι ρίζα αλγεβρικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές και στην πράξη χρησιμοποιούμε ότι $\pi \approx 3,14$.

Μήκος τόξου μ^0



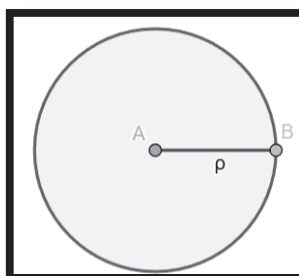
Ξέρουμε ότι ένας κύκλος είναι τόξο 360^0 και έχει μήκος $2\pi\rho$. Δηλαδή, τόξο 360^0 έχει μήκος $2\pi\rho$.

τόξο 1^0 έχει μήκος $\frac{2\pi\rho}{360^0} = \frac{\pi\rho}{180^0}$

τόξο μ^0 έχει μήκος $\frac{\pi\rho\mu^0}{180^0}$.

Οπότε, ένα τόξο μ^0 έχει μήκος : $l = \frac{\pi\rho\mu^0}{180^0}$

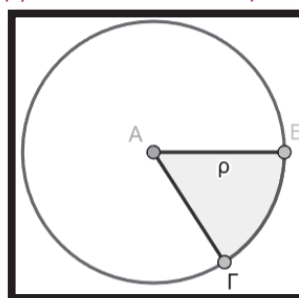
Εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας ρ



Το εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας ρ δίνεται από τον τύπο:

$$E = \pi\rho^2$$

Εμβαδόν κυκλικού τομέα μ^0



Ξέρουμε ότι ένας κύκλος είναι τόξο 360^0 και έχει εμβαδόν $\pi\rho^2$.

Δηλαδή, τόξο 360^0 έχει εμβαδόν $\pi\rho^2$.

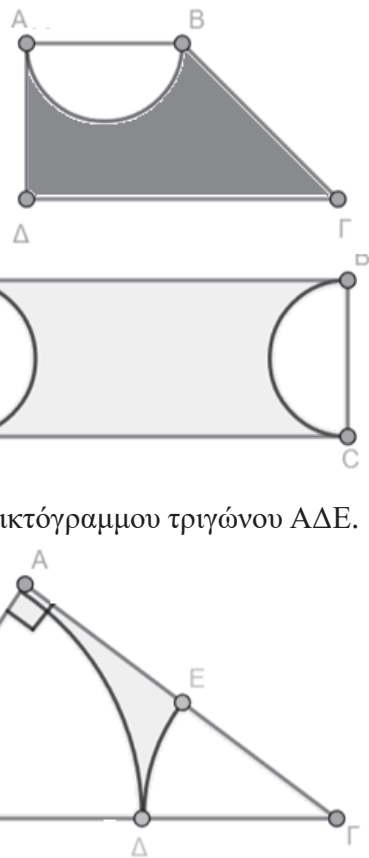
τόξο 1^0 έχει εμβαδόν $\frac{\pi\rho^2}{360^0}$

τόξο μ^0 έχει εμβαδόν $\frac{\pi\rho^2\mu^0}{360^0}$.

Οπότε, ένα τόξο μ^0 έχει εμβαδόν : $l = \frac{\pi\rho^2\mu^0}{360^0}$

Ασκήσεις

1. Να βρείτε το μήκος κύκλου ακτίνας 5 cm .
2. Να βρείτε το μήκος κύκλου με διάμετρο 12 cm .
3. Να βρείτε το μήκος τόξου 60° σε κύκλο ακτίνας 8 cm .
4. Να βρείτε το μήκος ημικυκλίου ακτίνας 10 cm .
5. Να βρείτε την περίμετρο κυκλικού τομέα 120° σε κύκλο ακτίνας 8 cm .
6. Να βρείτε το εμβαδόν κύκλου ακτίνας 10 cm .
7. Να βρείτε το εμβαδόν κυκλικού τομέα 60° σε κύκλο ακτίνας 6 cm .
8. Να βρείτε το εμβαδόν ημικυκλίου ακτίνας 10 cm .
9. Να βρείτε το εμβαδόν τεταρτοκυκλίου σε κύκλο ακτίνας 8 cm .
10. Να βρείτε την ακτίνα κύκλου που έχει μήκος $31,4\text{ cm}$.
11. Να βρείτε την ακτίνα κύκλου που έχει εμβαδόν $50,24\text{ cm}^2$.
12. Να βρείτε το εμβαδόν κύκλου που έχει μήκος $18,84\text{ cm}$.
13. Το εμβαδόν κυκλικού τομέα σε κύκλο ακτίνας 8 cm είναι $18,84\text{ cm}^2$. Να βρείτε την γωνία του κυκλικού τομέα.
14. Το μήκος τόξου 150° είναι $12,56\text{ cm}$. Να βρείτε το εμβαδόν του κύκλου.
15. Στο παραπάνω τραπέζιο είναι $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$, $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB = 12\text{ cm}$, $B\Gamma = 10\text{ cm}$, $\Gamma\Delta = 18\text{ cm}$. Να βρεθεί η περίμετρος και το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας.
16. Το $ABCD$ είναι ορθογώνιο με $AB = 15\text{ cm}$, $BC = 8\text{ cm}$. Με διάμετρο το AD έχει σχεδιαστεί ημικύκλιο όπως και με διάμετρο το BC . Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας.
17. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{A} = 90^\circ$, $AB = 2\text{ cm}$ και $A\Gamma = 2\sqrt{3}\text{ cm}$. Γράφουμε το τόξο $A\Delta$ του κύκλου (B, BA) και το τόξο ΔE του κύκλου $(\Gamma, \Gamma\Delta)$. Να βρείτε την περίμετρο του μεικτόγραμμου τριγώνου $A\Delta E$.
18. Σε κύκλο (O, R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρά $AB = 12$. Να υπολογίσετε:
 - a. Την ακτίνα R του κύκλου.
 - b. Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (O, R) .
 - c. Το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου $AB\Gamma$.
 - d. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το ισόπλευρο τρίγωνο.
19. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Με διαμέτρους τις AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ γράφουμε ημικύκλια στο ημιεπίπεδο $(B\Gamma, A)$. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των εμβαδών των σχηματιζόμενων μηνίσκων είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.



Σχόλιο: Μηνίσκος είναι το σχήμα που «περικλείεται» από δύο τόξα που έχουν κοινή χορδή και βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της

Γ' Τάξη

Γενικές Ασκήσεις

Χρήστος Π. Τσιφάκης

ΑΣΚΗΣΗ 1.

Αν η εξίσωση $(2\lambda - 5)x^2 - (\lambda + 2)x + 2\lambda = 0$ έχει λύση τον αριθμό 3, να βρείτε τον αριθμό λ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση αυτή.

Λύση

Αφού η εξίσωση έχει λύση το $x = 3$, έχουμε:
 $(2\lambda - 5) \cdot 3^2 - (\lambda + 2) \cdot 3 + 2\lambda = 0$ ή
 $9 \cdot (2\lambda - 5) - 3(\lambda + 2) + 2\lambda = 0$ ή
 $18\lambda - 45 - 3\lambda - 6 + 2\lambda = 0$ ή
 $17\lambda = 51$ ή $\lambda = \frac{51}{17}$ ή $\lambda = 3$.

Για $\lambda = 3$ η αρχική εξίσωση γίνεται:
 $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Παρατηρούμε ότι έχει
 $\alpha = 1, \beta = -5, \gamma = 6$ και

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0.$$

Άρα έχει δύο ρίζες άνισες, τις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.

α) Να λυθεί η εξίσωση: $2x + \frac{1}{x} = 5$.

β) Με τη βοήθεια της σχέσης $2x + \frac{1}{x} = 5$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 8x^3 + 4x^2 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + 1909$$

Λύση

α) Με $x \neq 0$ η εξίσωση γίνεται:

$$2x + \frac{1}{x} = 5 \text{ ή } 2x^2 + 1 = 5x \text{ ή } 2x^2 - 5x + 1 = 0$$

Παρατηρούμε ότι έχει
 $\alpha = 2, \beta = -5, \gamma = 1$ και

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 25 - 8 = 17 > 0.$$

Άρα έχει δύο ρίζες άνισες, τις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{17}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}, \text{ δηλαδή}$$

$$\text{τις } x_1 = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \text{ και } x_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{4}.$$

β) Η παράσταση γίνεται:

$$A = 8x^3 + 4x^2 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + 1909 =$$

$$\left(8x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(4x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 1909 =$$

$$\left[(2x)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3\right] + \left[(2x)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right] + 1909.$$

Γνωρίζουμε ότι $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, άρα

$$\boxed{\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta} \text{ και}$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 =$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta), \text{ δηλαδή}$$

$$\boxed{\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}.$$

Άρα

$$(2x)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \left(2x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot 2x \cdot \frac{1}{x} = 25 - 4 = 21$$

και

$$(2x)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 = \left(2x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot 2x \cdot \frac{1}{x} \cdot \left(2x + \frac{1}{x}\right) =$$

$$5^3 - 3 \cdot 2 \cdot 5 = 125 - 30 = 95.$$

Έτσι η παράσταση A είναι ίση με:

$$A = 95 + 21 + 1909 = 2025.$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 2\sqrt{2x-3} + \sqrt{y+1} = 4 \\ \sqrt{2x-3} + 2\sqrt{y+1} = 5 \end{cases}$$

Λύση

Πρέπει και αρκεί $2x - 3 \geq 0$ και $y + 1 \geq 0$ δηλαδή

$$x \geq \frac{3}{2} \text{ και } y \geq -1. \text{ Θέτουμε } \sqrt{2x-3} = \alpha \geq 0 \text{ και}$$

$\sqrt{y+1} = \beta \geq 0$ οπότε έχουμε το σύστημα:

$$\left. \begin{matrix} 2\alpha + \beta = 4 \\ \alpha + 2\beta = 5 \end{matrix} \right\} \text{ ή } \left. \begin{matrix} -4\alpha - 2\beta = -8 \\ \alpha + 2\beta = 5 \end{matrix} \right\} (+) \text{ ή } \left. \begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{matrix} \right\}.$$

Έτσι έχουμε: $\sqrt{2x-3} = 1$ και $\sqrt{y+1} = 2$ ή

$$2x-3=1 \text{ και } y+1=4 \text{ ή } x=2 \text{ και } y=3.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$A = \frac{333334 \cdot 666663 \cdot 333331 + 333327}{333333^2}$$

είναι ακέραιος και να βρεθεί ο ακέραιος αυτός.

Απόδειξη

Αν θέσουμε το $333333 = x$ τότε έχουμε:

$$333334 = x+1, \quad 666663 = 2x-3,$$

$$333331 = x-2, \quad 333327 = x-6.$$

Άρα η παράσταση A γίνεται:

$$A = \frac{(x+1) \cdot (2x-3) \cdot (x-2) + x-6}{x^2} =$$

$$\frac{(2x^2 - x - 3) \cdot (x-2) + x-6}{x^2} =$$

$$\frac{2x^3 - 4x^2 - x^2 + 2x - 3x + 6 + x - 6}{x^2} =$$

$$\frac{2x^3 - 5x^2}{x^2} = \frac{x^2(2x-5)}{x^2} = 2x-5.$$

$$\text{Άρα } A = 2 \cdot 333333 - 5 = 666661.$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.

Δίνονται οι παραστάσεις $A = x^4 + 16x^2 + 64$ και $B = 64x^2 + 128x + 64$.

α) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις A και B .

β) Να λύσετε την εξίσωση $A = B$.

Λύση

α) Οι παραστάσεις γίνονται:

$$A = x^4 + 16x^2 + 64 = (x^2)^2 + 2 \cdot 8 \cdot x^2 + 8^2 = (x^2 + 8)^2$$

$$B = 64x^2 + 128x + 64 = 64(x^2 + 2x + 1) = 64(x+1)^2.$$

$$\beta) A = B \text{ δηλαδή } (x^2 + 8)^2 = 64(x+1)^2 \text{ ή}$$

$$(x^2 + 8)^2 - 64(x+1)^2 = 0 \text{ ή}$$

$$(x^2 + 8)^2 - [8(x+1)]^2 = 0 \text{ ή}$$

$$[(x^2 + 8) - 8(x+1)] \cdot [(x^2 + 8) + 8(x+1)] = 0$$

$$\text{ή } (x^2 - 8x) \cdot (x^2 + 8x + 16) = 0 \text{ ή}$$

$$x(x-8) \cdot (x+4)^2 = 0 \text{ ή}$$

$$x=0 \text{ ή } x=8 \text{ ή } x=-4.$$

ΑΣΚΗΣΗ 6.

Να εκτελέσετε τις πράξεις:

$$a) \left(\frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y} \right) \cdot \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right)$$

$$\beta) \left(\frac{2a}{a^2 - \beta^2} + \frac{3}{a+\beta} - \frac{1}{a-\beta} \right) \cdot \left(\frac{a^2 + \beta^2}{a\beta^2} + \frac{2}{\beta} \right)$$

Λύση

$$a) \left(\frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y} \right) \cdot \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right) =$$

$$\left(\frac{(x-y)^2}{(x+y)(x-y)} - \frac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)} \right) \cdot \left(\frac{y^2}{x^2y^2} - \frac{x^2}{x^2y^2} \right) =$$

$$\left(\frac{(x-y)^2 - (x+y)^2}{x^2 - y^2} \right) \cdot \left(\frac{y^2 - x^2}{x^2y^2} \right) =$$

$$\frac{x^2 - 2xy + y^2 - x^2 - 2xy - y^2}{x^2 - y^2} \cdot \frac{y^2 - x^2}{x^2y^2} =$$

$$\frac{-4xy}{x^2 - y^2} \cdot \frac{-(x^2 - y^2)}{x^2y^2} = \frac{4}{xy}.$$

$$\begin{aligned} \beta) & \left(\frac{2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{3}{\alpha + \beta} - \frac{1}{\alpha - \beta} \right) \cdot \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta^2} + \frac{2}{\beta} \right) = \\ & \left(\frac{2\alpha + 3(\alpha - \beta) - (\alpha + \beta)}{\alpha^2 - \beta^2} \right) \cdot \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta}{\alpha\beta^2} \right) = \\ & \left(\frac{4\alpha - 4\beta}{\alpha^2 - \beta^2} \right) \cdot \left(\frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha\beta^2} \right) = \frac{4(\alpha - \beta)}{\alpha^2 - \beta^2} \cdot \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha\beta^2} = \\ & \frac{4}{\alpha + \beta} \cdot \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha\beta^2} = \frac{4(\alpha + \beta)}{\alpha\beta^2}. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7.

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = (x+2)^2 - 4(x+5) \text{ και}$$

$$B = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} : \frac{1}{6x - 6}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $A = x^2 - 16$.

β) Να αποδείξετε ότι $B = 6x$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $A = -B$.

Λύση

α) Η παράσταση A γίνεται

$$A = (x+2)^2 - 4(x+5) =$$

$$x^2 + 4x + 4 - 4x - 20 = x^2 - 16$$

β) Η παράσταση B γίνεται

$$B = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} : \frac{1}{6x - 6} = \frac{x \cancel{(x+1)}}{(x-1) \cancel{(x+1)}} : \frac{1}{6(x-1)} =$$

$$\frac{x}{\cancel{(x-1)}} \cdot \frac{6 \cancel{(x-1)}}{1} = 6x.$$

γ) $A = -B$ ή $x^2 - 16 = -6x$ ή

$$x^2 + 6x - 16 = 0.$$

Καταλήγουμε σε εξίσωση β βαθμού που έχει

$\alpha = 1, \beta = 6, \gamma = -16$ και Διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 36 + 64 = 100$$

Άρα έχει δύο ρίζες άνισες, τις

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2} = \\ &= \begin{cases} \frac{-6+10}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{-6-10}{2} = \frac{-16}{2} = -8 \end{cases}. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8.

Δίνεται το σύστημα:

$$(\Sigma_1): \begin{cases} \frac{3x+2y}{2} = \frac{x+4y}{6} + y + 2 \\ 2x - \frac{x+y}{3} = \frac{x+5}{2} \end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι αυτό μετά από πράξεις μετατρέπεται στο σύστημα:

$$(\Sigma_2): \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 7x - 2y = 15 \end{cases}.$$

β) Να λύσετε το σύστημα

γ) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα που βρήκατε.

Λύση

α) Το σύστημα (Σ_1) γίνεται

$$\begin{cases} \frac{3x+2y}{2} = \frac{x+4y}{6} + y + 2 \\ 2x - \frac{x+y}{3} = \frac{x+5}{2} \end{cases} \quad \text{ή}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot (3x+2y) = x+4y+6 \cdot (y+2) \\ 12x - 2 \cdot (x+y) = 3 \cdot (x+5) \end{cases} \quad \text{ή}$$

$$\begin{cases} 8x - 4y = 12 \\ 7x - 2y = 15 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 7x - 2y = 15 \end{cases}.$$

β) Θα λύσουμε το (Σ_2) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 7x - 2y = 15 \end{cases}$ με την

μέθοδο των αντίθετων συντελεστών

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 7x - 2y = 15 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} -4x + 2y = -6 \\ 7x - 2y = 15 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x = 9 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y = 3 \\ x = 3 \end{cases} \quad \text{ή} \quad (x, y) = (3, 3).$$

Άρα το (Σ_1) έχει λύση το $(x, y) = (3, 3)$.

γ) Το σύστημά μας παριστάνει στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων δύο ευθείες, τις $(\varepsilon_1): 2x - y = 3$ και $(\varepsilon_2): 7x - 2y = 15$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο $K(3, 3)$.

ΑΣΚΗΣΗ 9.

Δίνονται οι αριθμοί

$$\alpha = \sqrt{13 - \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}} \quad \text{και}$$

$$\beta = \sqrt{41 - \sqrt{29 - \sqrt{19 - \sqrt{9}}}}.$$

Αν $\eta\mu\omega = \frac{\alpha}{\beta}$ και η γωνία ω ανήκει στο 2°

τεταρτημόριο να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{2\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega}{\varepsilon\varphi^2\omega}.$$

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\alpha = \sqrt{13 - \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}} = \sqrt{13 - \sqrt{13 + \sqrt{9}}} =$$

$$\sqrt{13 - \sqrt{16}} = \sqrt{13 - 4} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{και}$$

$$\beta = \sqrt{41 - \sqrt{29 - \sqrt{19 - \sqrt{9}}}} =$$

$$\sqrt{41 - \sqrt{29 - \sqrt{16}}} = \sqrt{41 - \sqrt{29 - 4}} =$$

$$\sqrt{41 - 5} = \sqrt{36} = 6.$$

$$\text{Άρα } \eta\mu\omega = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \eta\mu 30^\circ.$$

Ξέρουμε ότι οι παραπληρωματικές γωνίες

έχουν το ίδιο ημίτονο, αφού η γωνία ω ανήκει στο 2° τεταρτημόριο, άρα η γωνία $\omega = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

Άρα θα έχει

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \sigma\upsilon\nu 150^\circ = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{και}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi 150^\circ = -\varepsilon\varphi 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Έτσι η παράσταση A γίνεται:

$$A = \frac{2\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega}{\varepsilon\varphi^2\omega} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} =$$

$$\frac{1 - \frac{3}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 10.

Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega} - \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1 + \eta\mu\omega} = \varepsilon\varphi\omega \quad \text{με } 0^\circ < \omega < 90^\circ.$$

Λύση

$$A \text{ μέλος} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega} - \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1 + \eta\mu\omega} =$$

$$\frac{1 + \eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega \cdot (1 + \eta\mu\omega)} - \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega \cdot (1 + \eta\mu\omega)} =$$

$$\frac{1 + \eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega \cdot (1 + \eta\mu\omega)} = \frac{1 + \eta\mu\omega - (1 - \eta\mu^2\omega)}{\sigma\upsilon\nu\omega \cdot (1 + \eta\mu\omega)} =$$

$$\frac{1 + \eta\mu\omega - (1 - \eta\mu\omega) \cdot (1 + \eta\mu\omega)}{\sigma\upsilon\nu\omega \cdot (1 + \eta\mu\omega)} =$$

$$\frac{[1 - (1 - \eta\mu\omega)] \cdot \cancel{(1 + \eta\mu\omega)}}{\sigma\upsilon\nu\omega \cdot \cancel{(1 + \eta\mu\omega)}} = \frac{1 - 1 + \eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} =$$

$$\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \varepsilon\varphi\omega.$$

Τα γραμμικά συστήματα έχουν τις ρίζες τους στην αρχαία γεωμετρία και άλγεβρα. Οι πρώτες αναφορές στα γραμμικά συστήματα χρονολογούνται από την αρχαία Ελλάδα και την Κίνα. Στην αρχαία Ελλάδα, ο Ευκλείδης (περίπου 300 π.Χ.) ασχολήθηκε με την επίλυση γραμμικών εξισώσεων. Στην Κίνα, το βιβλίο «Εννέα Κεφάλαια της Μαθηματικής Τέχνης», που γράφτηκε γύρω στο 200 π.Χ., περιέχει μια μέθοδο για την επίλυση γραμμικών συστημάτων με πίνακες, που αργότερα ονομάστηκε μέθοδος του Gauss. Η σύγχρονη θεωρία των γραμμικών συστημάτων αναπτύχθηκε πολύ αργότερα κατά τον 17ο και 18ο αιώνα με τη συμβολή πολλών μαθηματικών. Στην Ιαπωνία ο Seki Takakazu το 1683, εισήγαγε τις ορίζουσες και έδωσε μεθόδους για τον υπολογισμό τους. Την ίδια χρονολογία ο G. Leibniz ασχολήθηκε με το ίδιο θέμα. Ο Gauss, συγκεκριμένα, ανέπτυξε τη μέθοδο της απαλοιφής, γνωστή ως μέθοδος Gauss, η οποία είναι θεμελιώδης για την επίλυση γραμμικών συστημάτων. Η εξέλιξη των γραμμικών συστημάτων συνεχίστηκε με την θεμελίωση της έννοιας των πινάκων μέχρι και σήμερα, με εφαρμογές σε πολλούς τομείς όπως η φυσική, η μηχανική, η οικονομία και η πληροφορική.

Τα γραμμικά συστήματα αποτελούνται από γραμμικές εξισώσεις. Κάθε εξίσωση της μορφής $ax+by=\gamma$, με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$ ονομάζεται γραμμική εξίσωση με 2 αγνώστους και απεικονίζεται με μια ευθεία. Λύση της γραμμικής εξίσωσης είναι κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y) που την επαληθεύει. Αν τώρα το $a=0$ και το $b \neq 0$ η εξίσωση παίρνει τη μορφή: $y = \frac{\gamma}{b}$, άρα θα είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα x . Αντίστοιχα, αν το $b=0$ και το $a \neq 0$ η εξίσωση παίρνει τη μορφή: $x = \frac{\gamma}{a}$, άρα θα είναι μια ευθεία κατακόρυφη στον x , δηλαδή παράλληλη με τον y . Παρακάτω θα μελετήσουμε συστήματα 2×2 , δηλαδή συστήματα που αποτελούνται από 2 γραμμικές εξισώσεις και 2 αγνώστους. Τα συστήματα αυτά μπορεί να έχουν 1 μοναδική λύση, άπειρες λύσεις (ονομάζονται αόριστα) ή καμία λύση (ονομάζονται αδύνατα). Οι τρόποι επίλυσης ενός 2×2 γραμμικού συστήματος είναι η **γραφική επίλυση** και η **αλγεβρική επίλυση**.

Α. Γραφική επίλυση του συστήματος:
$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$$

Έχουμε τις εξισώσεις

$$2x - y = 6 \quad (1) \text{ και } 3x + 2y = -5 \quad (2).$$

Για να επιλύσουμε το σύστημα αυτών των 2 εξισώσεων πρέπει να σχεδιάσουμε τις 2 ευθείες που απεικονίζουν στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Για να τις σχεδιάσουμε χρειαζόμαστε 2 σημεία από τα οποία διέρχονται. Για την (1) βρίσκουμε:

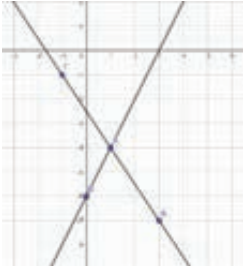
Για $x=1$ η εξίσωση με αντικατάσταση θα γίνει $2 \cdot 1 - y = 6$, $y = 2 - 6$, $y = -4$. Άρα, το πρώτο σημείο είναι το $A(x,y) = (1, -4)$. Για $x=0$ η εξίσωση με αντικατάσταση θα γίνει $2 \cdot 0 - y = 6$, $y = 0 - 6$, $y = -6$.

Άρα, το δεύτερο σημείο είναι το $B(x,y) = (0, -6)$.

Η πρώτη ευθεία λοιπόν είναι η παρακάτω :



Για την $3x + 2y = -5$ θα χρειαστούμε πάλι 2 σημεία από τα οποία διέρχεται η ευθεία που απεικονίζει. Το πρώτο σημείο είναι το $\Gamma(-1, -1)$ και το δεύτερο σημείο είναι το $\Delta(3, -7)$.



Σχεδιάζουμε την δεύτερη ευθεία στο ίδιο σύστημα αξόνων με την πρώτη ευθεία. Το σημείο $A(1, -4)$ είναι το σημείο τομής των 2 ευθειών και η μοναδική λύση του γραμμικού συστήματος

Άσκηση 1

Να λυθούν γραφικά τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 2x = 12 \\ -y = 4 \end{cases}$$

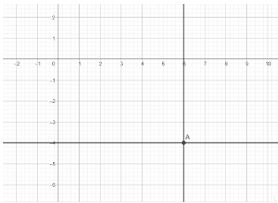
$$\beta) \begin{cases} 2x + 8y = 4 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x - 2y = -3 \\ -3x + 6y = 2 \end{cases}$$

Λύση :

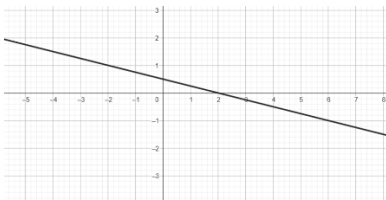
$$\alpha) \begin{cases} 2x = 12 \\ -y = 4 \end{cases}$$

Για την (1) έχω $2x=12$ άρα $x=6$, η οποία είναι μια ευθεία κατακόρυφη και για την (2) έχω $y=-4$, η οποία είναι μια ευθεία παράλληλη στον $x'x$.



Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση, το σημείο τομής $A(6, -4)$ των 2 ευθειών όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

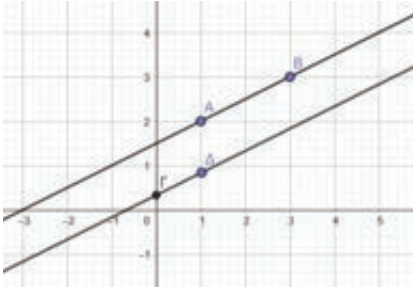
$$\beta) \begin{cases} 2x + 8y = 4 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$$



Για την (1) έχω για $x=0$: $2 \cdot 0 + 8y = 4$, $8y = 4$, $y = \frac{1}{2}$ και για $x=1$: $2 \cdot 1 + 8y = 4$, $8y = 2$, $y = \frac{1}{4}$. Σχεδιάζουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(0, \frac{1}{2})$ και $B(1, \frac{1}{4})$. Για την (2) έχω Για $x=0$: $0 + 4y = 2$, $y = \frac{1}{2}$ και για $x=1$: $1 + 4y = 2$, $y = \frac{1}{4}$.

Παρατηρούμε ότι και για τη δεύτερη ευθεία έχουν προκύψει τα ίδια σημεία, άρα οι ευθείες συμπίπτουν. Και το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

$$\gamma) \begin{cases} x - 2y = -3 \\ -3x + 6y = 2 \end{cases}$$



Για την (1) έχω την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(3, 3)$. Για την (2) έχω την ευθεία που διέρχεται από τα $\Gamma(0, \frac{1}{3})$ και $\Delta(1, \frac{5}{6})$. Παρατηρούμε ότι οι 2 ευθείες είναι παράλληλες και το σύστημα είναι αδύνατο, δηλαδή δεν έχει καμία λύση.

Άσκηση 2

Να λύσετε γραφικά τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x = 2 \\ 2x + y = 7 \end{cases},$$

$$\beta) \begin{cases} 2x - 4y = 8 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 2y = -6 \end{cases}$$

Β. Αλγεβρική επίλυση του συστήματος: $\begin{cases} 2x - y = 6 & (1) \\ 3x + 2y = -5 & (2) \end{cases}$

Για να λύσουμε αλγεβρικά το σύστημα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε 3 μεθόδους:

- Της αντικατάστασης
- Των αντίθετων συντελεστών ή απαλοιφής
- Των Οριζουσών

Θα ασχοληθούμε μόνο με τις 2 πρώτες μεθόδους στα πλαίσια της Γ' Γυμνασίου.

Με τη μέθοδο της **αντικατάστασης** μπορώ να λύσω την μια από τις 2 εξισώσεις ως προς τον ένα άγνωστο. Συνήθως, διαλέγουμε να επιλύσουμε ως προς τον άγνωστο που έχει συντελεστή 1 ή -1. Επομένως λύνω την εξίσωση (1) ως προς y και στη συνέχεια θα αντικαταστήσω στην εξίσωση (2).

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} -y = 6 - 2x \\ 3x + 2y = -5 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y = -6 + 2x \\ 3x + 2y = -5 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y = -6 + 2x \\ 3x + 2(-6 + 2x) = -5 \end{cases} \quad \text{ή}$$

$$\begin{cases} y = -6 + 2x \\ 3x - 12 + 4x = -5 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y = -6 + 2x \\ 7x = 7 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y = -6 + 2 \cdot 1 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y = -4 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Η λύση του συστήματος λοιπόν είναι η $(x, y) = (1, -4)$ πράγμα που επαληθεύει και την γραφική επίλυση που κάναμε πιο πάνω.

Πρόβλημα 1

Ένας γεωργός έχει δύο χωράφια. Το πρώτο χωράφι παράγει 2 τόνους ρυζιού ανά στρέμμα και το δεύτερο χωράφι παράγει 3 τόνους ρυζιού ανά στρέμμα. Ο γεωργός καλλιέργησε συνολικά 5 στρέμματα και παρήγαγε 12 τόνους ρυζιού. Πόσα στρέμματα καλλιέργησε σε κάθε χωράφι;

Λύση :

Έστω x στρέμματα το πρώτο χωράφι και y στρέμματα το δεύτερο χωράφι. Ο γεωργός λοιπόν, συνολικά έχει $x + y = 5$ (1) στρέμματα.

Το πρώτο χωράφι παράγει συνολικά $2x$ τόνους ρυζιού και το δεύτερο χωράφι παράγει συνολικά $3y$ τόνους ρυζιού. Επομένως, συνολικά παράγει $2x+3y=12$ (2) τόνους ρυζιού. Λύνουμε το σύστημα των 2 εξισώσεων με τους 2 αγνώστους με τη μέθοδο της αντικατάστασης. Θα λύσουμε λοιπόν την εξίσωση (1) ως προς τον άγνωστο x και θα αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (2).

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x + y = 5 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x = 5 - y \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 2(5 - y) + 3y = 12 \\ x = 5 - y \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 10 - 2y + 3y = 12 \\ x = 5 - y \end{cases} \quad \text{ή} \\ \begin{cases} y = 12 - 10 \\ x = 5 - y \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = 5 - 2 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Άρα το πρώτο χωράφι είναι 3 στρέμματα και το δεύτερο χωράφι είναι 2 στρέμματα.

Πρόβλημα 2

Ένας χημικός μηχανικός σχεδιάζει ένα μείγμα καυσίμων που περιλαμβάνει δύο τύπους καυσίμων. Το πρώτο καύσιμο περιέχει 30% αιθανόλη και 70% βενζίνη, ενώ το δεύτερο καύσιμο περιέχει 80% αιθανόλη και 20% βενζίνη. Ο στόχος είναι να δημιουργήσει 100 λίτρα μείγματος που περιέχει 50% αιθανόλη. Πόσα λίτρα από κάθε τύπο καυσίμου πρέπει να χρησιμοποιήσει;

Λύση :

Έστω x τα λίτρα από τον πρώτο τύπο καυσίμου και y τα λίτρα από το δεύτερο τύπο καυσίμου. Ο χημικός θέλει συνολικά $x+y=100$ (1) λίτρα μείγματος.

Ο πρώτος τύπος περιέχει συνολικά $0.3x$ λίτρα αιθανόλης και ο δεύτερος τύπος περιέχει $0.8y$ λίτρα αιθανόλης. Επομένως, το μείγμα θα έχει περιεκτικότητα $0.3x+0.8y=50$ (2) σε αιθανόλη. Λύνουμε το σύστημα των 2 εξισώσεων με τους 2 αγνώστους με τη μέθοδο της αντικατάστασης. Θα λύσουμε λοιπόν την εξίσωση (1) ως προς τον άγνωστο x και θα αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (2).

$$\begin{cases} 0.3x + 0.8y = 50 \\ x + y = 100 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 0.3x + 0.8y = 50 \\ x = 100 - y \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 0.3(100 - y) + 0.8y = 50 \\ x = 100 - y \end{cases} \quad \text{ή} \\ \begin{cases} 30 - 0.3y + 0.8y = 50 \\ x = 100 - y \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 0.5y = 20 \\ x = 100 - y \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y = \frac{20}{0.5} \\ x = 100 - y \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y = 40 \\ x = 100 - 40 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y = 40 \\ x = 60 \end{cases}$$

Άρα πρέπει να πάρουμε 40 λίτρα από τον πρώτο τύπο καυσίμου και 60 λίτρα από το δεύτερο είδος καυσίμου.

Με τη μέθοδο των **αντίθετων συντελεστών** πολλαπλασιάζουμε μια ή και τις 2 εξισώσεις με κάποιον κατάλληλο αριθμό με σκοπό να δημιουργήσουμε αντίθετους συντελεστές στον έναν ή στον άλλο άγνωστο. Στη συνέχεια ,προσθέτουμε κατά μέλη τις 2 εξισώσεις με στόχο να γίνει απαλοιφή του ενός αγνώστου και να καταλήξουμε σε εξίσωση με έναν άγνωστο. Στο τέλος, αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε στη μια από τις αρχικές εξισώσεις για να βρούμε και τον άλλο άγνωστο. Λύνω το ίδιο σύστημα πολλαπλασιάζοντας την (1) με 2 για να φτιάξω αντίθετους συντελεστές στο y :

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \quad (1) \\ 3x + 2y = -5 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 4x - 2y = 12 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχω: $4x+3x=12-5$ ή $7x=7$ ή $x=1$. Αντικαθιστώ στην (1) το $x=1$ και έχω:

$$2 \cdot 1 - y = 6 \text{ ή } -y = 4 \text{ ή } y = -4.$$

Επομένως και με αυτή τη μέθοδο η λύση του συστήματος είναι το ζευγάρι $(x,y)=(1,-4)$

Πρόβλημα 3

Ένας διατροφολόγος σχεδιάζει ένα πρόγραμμα διατροφής που περιλαμβάνει δύο είδη τροφίμων. Το πρώτο είδος περιέχει 6 γραμμάρια πρωτεΐνης και 1 γραμμάριο λίπους ανά μερίδα, ενώ το δεύτερο είδος περιέχει 3 γραμμάρια πρωτεΐνης και 4 γραμμάρια λίπους ανά μερίδα. Ο στόχος είναι να καταναλώσει συνολικά 30 γραμμάρια πρωτεΐνης και 25 γραμμάρια λίπους την ημέρα. Πόσες μερίδες από κάθε είδος τρόφιμου πρέπει να καταναλώσει;

Λύση :

Έστω x τα γραμμάρια από το πρώτο είδος τρόφιμου και y τα γραμμάρια από το δεύτερο είδος τρόφιμου. Ο διατροφολόγος θέλει συνολικά 30 γραμ. πρωτεΐνης και 25 γραμ. λίπους.

Άρα έχουμε:

$$\begin{cases} 6x + 3y = 30 \\ x + 4y = 25 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 6x + 3y = 30 \\ -6x - 24y = -150 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχω $-21y = -120$ ή $y = \frac{-120}{-21} = 5,74$ μερίδες και $x + 4 \cdot \frac{120}{21} = 25$ ή $x = 2,14$ μερίδες.

Πρόβλημα 4

Ένας χρηματιστής αγοράζει 200 μετοχές της εταιρείας Α και 300 μετοχές της εταιρείας Β για έναν πελάτη του και πληρώνει συνολικά 8500 ευρώ. Στη συνέχεια αγοράζει 400 μετοχές της εταιρείας Α και 100 μετοχές της εταιρείας Β για κάποιον άλλο πελάτη πληρώνοντας συνολικά 6000. Πόσο κόστιζε η μετοχή της κάθε εταιρείας αν θεωρήσουμε ότι οι τιμές κατά τη διάρκεια των δυο αγορών παρέμεινε σταθερή;

Λύση :

Έστω x η τιμή της μετοχής της Α και y η τιμή της μετοχής της Β. Ο χρηματιστής έδωσε $200x + 300y = 8500$ ευρώ για την αγορά των μετοχών του πρώτου πελάτη και αντίστοιχα $400x + 100y = 6000$ για τον δεύτερο πελάτη. Θα λύσουμε λοιπόν το παρακάτω σύστημα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με το -2 .

$$\begin{cases} 200x + 300y = 8500 \\ 400x + 100y = 6000 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} -400x - 1200y = -17000 \\ 400x + 100y = 6000 \end{cases}$$

Άρα $-1200y + 100y = -17000 + 6000$ ή $-1100y = -11000$ ή $y = 10$ ευρώ.

Για να βρούμε πόσο κοστίζει η μετοχή της εταιρείας Β κάνω αντικατάσταση στην 2^η εξίσωση και βρίσκω $400x + 100 \cdot 10 = 6000$ ή $400x = 5000$ ή $x = 12,5$ ευρώ.

Άσκηση 3

$$\text{Να λυθούν τα συστήματα : α) } \begin{cases} 2x - \frac{x-y}{3} = 9 \\ \frac{x-1}{2} - \frac{y-5}{3} = 3 \end{cases} \text{ και β) } \begin{cases} 0,6x - 2,8y = 1,5 \\ 1,2x - 5,6y = 3,5 \end{cases}$$

Απαντήσεις:

α) $(x,y)=(5,2)$. β) το σύστημα δεν έχει λύση.



Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Επιμέλεια: Επιτροπή Διαγωνισμών

42^η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»

22 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2025

Ενδεικτικές λύσεις

Θέματα τάξεων Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Δίνεται ότι οι αριθμοί m, n είναι θετικοί ακέραιοι και ότι το σύστημα

$$mx + 3y = m,$$

$$2x + ny = n,$$

με αγνώστους $x, y \in \mathbb{R}$ δεν έχει λύσεις. Να βρείτε όλα τα δυνατά ζεύγη (m, n) .

Λύση

Επειδή $m \neq 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \begin{cases} mx + 3y = m \\ 2x + ny = n \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m - 3y}{m} \\ x = \frac{n - ny}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{n - ny}{2} = \frac{m - 3y}{m} \\ x = \frac{n - ny}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} mn - mny = 2m - 6y \\ x = \frac{n - ny}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (6 - mn)y = 2m - mn \\ x = \frac{n - ny}{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

Επειδή από την υπόθεση το σύστημα δεν έχει λύσεις, έπεται ότι η εξίσωση

$$(6 - mn)y = 2m - mn \text{ είναι αδύνατη} \Leftrightarrow 6 - mn = 0 \text{ και } m(2 - n) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (m, n) = (2, 3) \text{ ή } (m, n) = (1, 6) \text{ ή } (m, n) = (6, 1),$$

αφού οι αριθμοί m, n είναι θετικοί ακέραιοι.

2ος τρόπος. Αν υποθέσουμε ότι το δοθέν σύστημα έχει λύσεις, τότε θα έχει λύσεις και το σύστημα που προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με το 2 και τη δεύτερη με το $-m$:

$$\begin{cases} 2mx + 6y = 2m \\ -2mx - mny = -mn \end{cases}$$

Τότε με πρόσθεση κατά μέλη, θα έχει λύση ως προς y και η εξίσωση

$$(6 - mn)y = m(2 - n).$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση του συστήματος με το n και τη δεύτερη με το -3 παίρνουμε:

$$\begin{cases} nm x + 3ny = mn \\ -6x - 3ny = -3n \end{cases}$$

Τότε με πρόσθεση κατά μέλη, θα έχει λύση ως προς x και η εξίσωση

$$(6 - mn)x = n(3 - m).$$

Αν $mn \neq 6$, τότε όπως είναι φανερό από τις παραπάνω εξισώσεις το σύστημα έχει λύση, άτοπο. Άρα πρέπει $mn = 6$ και $(m, n) \neq (3, 2)$, αφού αλλιώς το σύστημα θα είχε άπειρες το πλήθος λύσεις $(x, y) = (k, 1 - k)$, με k πραγματικό αριθμό. Συνεπώς, τα ζητούμενα δυνατά ζεύγη είναι τα $(m, n) = (2, 3), (6, 1)$ και $(1, 6)$.

3ος τρόπος. Με τη μέθοδο των οριζουσών έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} m & 3 \\ 2 & n \end{vmatrix} = mn - 6, D_x = \begin{vmatrix} m & 3 \\ n & n \end{vmatrix} = mn - 3n, D_y = \begin{vmatrix} m & m \\ 2 & n \end{vmatrix} = mn - 2m.$$

Το σύστημα δεν έχει λύσεις, αν, και μόνον αν,

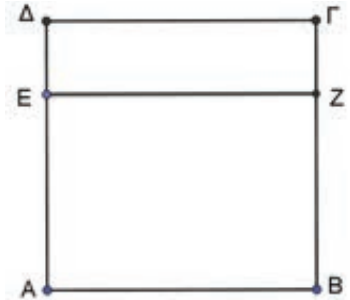
$$D = 0 \text{ και } (D_x \neq 0 \text{ ή } D_y \neq 0) \Leftrightarrow mn - 6 \text{ και } (n(m - 3) \neq 0 \text{ ή } m(n - 2) \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (m, n) = (2, 3) \text{ ή } (m, n) = (1, 6) \text{ ή } (m, n) = (6, 1),$$

αφού οι αριθμοί m, n είναι θετικοί ακέραιοι.

Πρόβλημα 2

Το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος υποδιαιρείται με το τμήμα EZ σε δύο ορθογώνια $ABZE$ και $EZ\Gamma\Delta$. Δίνεται ότι $AE > ED$. Τα μήκη όλων των πλευρών των δύο ορθογωνίων είναι θετικοί ακέραιοι. Αν η διαφορά των εμβαδών των δύο ορθογωνίων είναι 24, να προσδιορίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.



Λύση (1ος τρόπος)

Έστω x η πλευρά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ και $AE = y < x$, οπότε $ED = x - y > 0$, όπου οι αριθμοί x, y είναι θετικοί ακέραιοι. Τότε:

$$E(ABZE) = xy \text{ και } E(EZ\Gamma\Delta) = x(x - y),$$

οπότε, σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε:

$$xy - x(x - y) = 24 \Leftrightarrow 2xy - x^2 = 24 \Leftrightarrow x(2y - x) = 24.$$

Επειδή ο x είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι και $2y - x > 0 \Leftrightarrow x < 2y$, οπότε έχουμε τον περιορισμό $y < x < 2y$. Επίσης, έχουμε $y > 2y - x \Leftrightarrow x > y$, που ισχύει.

Συνοψίζοντας έχουμε τους περιορισμούς: $2y - x < y < x < 2y$.

Τότε από την εξίσωση $x(2y - x) = 24$ προκύπτουν οι λύσεις:

- $(x, 2y - x) = (6, 4) \Leftrightarrow x = 6, 2y = 10 \Leftrightarrow x = 6, y = 5$
- $(x, 2y - x) = (8, 3) \Leftrightarrow x = 8, 2y = 11$, απορρίπτεται
- $(x, 2y - x) = (12, 2) \Leftrightarrow x = 12, 2y = 14 \Leftrightarrow x = 12, y = 7$,
- $(x, 2y - x) = (24, 1) \Leftrightarrow x = 24, 2y = 25$, απορρίπτεται

Άρα οι δυνατές τιμές του εμβαδού του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ είναι 36 ή 144.

2ος τρόπος. Έστω $(AB) = x$ και $(AE) = y < x$, όπου οι x, y είναι θετικοί ακέραιοι. Τότε $(ABZE) = xy$ και $(EZ\Gamma\Delta) = x(x - y) = x^2 - xy$. Δίνεται ότι $y = AE > ED = x - y$, οπότε $(ABZE) > (EZ\Gamma\Delta)$. Έτσι, έχουμε την εξίσωση $xy - (x^2 - xy) = 24$, η οποία γράφεται ισοδύναμα

$$x^2 - 2xy + 24 = 0.$$

Για να έχει η παραπάνω εξίσωση ακέραιες λύσεις ως προς x , πρέπει η διακρίνουσα της $\Delta = 4y^2 - 96$ να είναι τέλειο τετράγωνο, δηλαδή, πρέπει να υπάρχει θετικός ακέραιος z τέτοιος ώστε $4y^2 - 96 = z^2$. Τότε παίρνουμε:

$$(2y + z)(2y - z) = 96.$$

Τα ζευγάρια (δ_1, δ_2) των διαιρετών του 96 με $\delta_1 > \delta_2 > 0$ και $\delta_1 \delta_2 = 96$ είναι τα $(96,1), (48,2), (32,3), (24,4), (16,6)$, και $(12,8)$. Από αυτά, τα ζευγάρια με άθροισμα πολλαπλάσιο του 4 είναι μόνο το $(24,4)$ και το $(12,8)$. Έτσι, είναι:

$$2y + z = 24 \text{ και } 2y - z = 4 \text{ ή } 2y + z = 12 \text{ και } 2y - z = 8.$$

Η πρώτη περίπτωση δίνει $(y, z) = (7, 10)$, και η εξίσωση γίνεται $x^2 - 14x + 24 = 0$ με λύσεις $x = 2$ και $x = 12$. Η λύση $x = 2$ απορρίπτεται, αφού πρέπει $x > y$, ενώ η δεύτερη γίνεται δεκτή, οπότε το εμβαδό του ΑΒΓΔ είναι ίσο με $12^2 = 144$ τετραγωνικές μονάδες.

Ομοίως, η δεύτερη περίπτωση δίνει $(y, z) = (5, 2)$, η εξίσωση γίνεται $x^2 - 10x + 24 = 0$ με λύσεις $x = 4$ και $x = 6$, από τις οποίες γίνεται δεκτή μόνο η δεύτερη, αφού πρέπει $x > y$. Τότε το εμβαδό του ΑΒΓΔ είναι ίσο με $6^2 = 36$ τετραγωνικές μονάδες.

Πρόβλημα 3.

Να αποδείξετε ότι, για οποιουσδήποτε θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha + \beta = 1$,

ισχύει ότι:

$$\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} + \alpha\beta \geq \frac{5}{4}.$$

Λύση. (1ος τρόπος)

Πολλαπλασιάζοντας με $\alpha\beta > 0$, βλέπουμε ότι η ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\alpha^3 + \beta^3 + \alpha^2\beta^2 \geq \frac{5}{4}\alpha\beta.$$

Είναι $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 1 - 3\alpha\beta$, οπότε η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$1 - 3\alpha\beta + \alpha^2\beta^2 \geq \frac{5}{4}\alpha\beta,$$

η οποία γράφεται

$$4\alpha^2\beta^2 - 17\alpha\beta + 4 \geq 0$$

ή, ισοδύναμα,

$$(4\alpha\beta - 1)(\alpha\beta - 4) \geq 0.$$

Η τελευταία ισχύει, αφού

$$4\alpha\beta \leq (\alpha + \beta)^2 = 1,$$

οπότε $4\alpha\beta - 1 \leq 0$ και $\alpha\beta \leq \frac{1}{4} < 4$.

Η ισότητα ισχύει, αν, και μόνο αν, $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

(2ος τρόπος) Παρατηρούμε ότι αφού $\alpha + \beta = 1$, ισχύει:

$$\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} - \frac{1}{\alpha\beta} = -3,$$

(η οποία μπορεί να αποδειχθεί με διάφορους τρόπους). Έτσι, η δοθείσα ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} \geq 3 + \frac{5}{4} = \frac{17}{4}.$$

Την τελευταία μπορούμε να την αποδείξουμε με διάφορους τρόπους:

1. Αφού $(4\alpha\beta - 1)^2 \geq 0$, είναι $16\alpha^2\beta^2 - 8\alpha\beta + 1 \geq 0$, και $\alpha^2\beta^2 + 1 \geq 8\alpha\beta - 15\alpha^2\beta^2$.

Διαιρώντας με το $\alpha\beta > 0$, παίρνουμε:

$$\alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} \geq 8 - 15\alpha\beta \geq 8 - 15 \cdot \frac{1}{4} = \frac{17}{4},$$

αφού $\alpha\beta \leq \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} = \frac{1}{4}$. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

2. Από την ανισότητα Αριθμητικού Μέσου-Γεωμετρικού Μέσου

$$\alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} = \left(\alpha\beta + \frac{1}{16\alpha\beta}\right) + \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{4\alpha\beta} \geq 2\sqrt{\alpha\beta \cdot \frac{1}{16\alpha\beta}} + \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{(\alpha + \beta)^2} = \frac{2}{4} + \frac{15}{4} = \frac{17}{4}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

3ος τρόπος. Η δοθείσα ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{\alpha^2}{\beta} + \alpha + \frac{\beta^2}{\alpha} + \beta + \alpha\beta \geq \frac{5}{4} + 1,$$

δηλαδή με την

$$\frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\beta} + \frac{\beta(\alpha+\beta)}{\alpha} + \alpha\beta \geq \frac{9}{4},$$

η οποία γράφεται

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \alpha\beta \geq \frac{9}{4}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\alpha\beta > 0$, η ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2\beta^2 \geq \frac{9}{4}\alpha\beta.$$

Επειδή $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1 - 2\alpha\beta$, η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με

$$1 - 2\alpha\beta + \alpha^2\beta^2 \geq \frac{9}{4}\alpha\beta,$$

η οποία γράφεται $4\alpha^2\beta^2 - 17\alpha\beta + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (4\alpha\beta - 1)(\alpha\beta - 4) \geq 0$.

Η τελευταία ισχύει, αφού $\alpha\beta \leq (\alpha + \beta)^2 = 1$, οπότε $4\alpha\beta - 1 \leq 0$ και $\alpha\beta \leq \frac{1}{4} < 4$.

Η ισότητα ισχύει, αν, και μόνο αν, $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

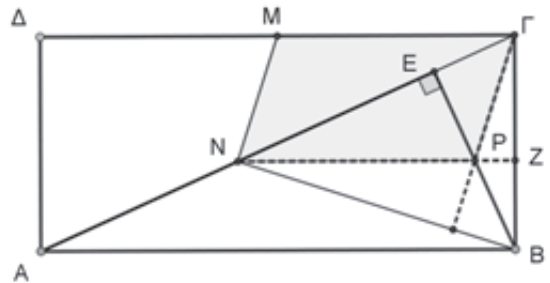
Πρόβλημα 4.

Θεωρούμε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και σημείο E στη διαγώνιο του $A\Gamma$ τέτοιο, ώστε $\widehat{B\hat{E}\Gamma} = 90^\circ$. Αν το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$ και N είναι το μέσο του τμήματος AE , να αποδείξετε ότι $\widehat{B\hat{N}M} = 90^\circ$.

Λύση (1ος τρόπος)

Από το N φέρουμε παράλληλη προς την ευθεία $\Gamma\Delta$ η οποία τέμνει το τμήμα BE στο σημείο P και την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Z . Επειδή το N είναι το μέσο της πλευράς NE του τριγώνου ABE , έπεται ότι το P είναι το μέσο της πλευράς BE και

$$NP = \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \Gamma M.$$



Επειδή $NP \parallel \Gamma M$, έπεται ότι το τετράπλευρο $NPM\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε:

$$NM \parallel P\Gamma.$$

Όμως επειδή $NP \parallel \Gamma M$ και $\Gamma M \perp B\Gamma$, έπεται ότι $NP \perp B\Gamma$.

Επομένως στο τρίγωνο $NB\Gamma$ τα BE και NZ είναι ύψη του που τέμνονται στο P το οποίο είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $NB\Gamma$. Άρα θα είναι και $\Gamma P \perp NB$ και αφού $MN \parallel P\Gamma$, έπεται ότι: $MN \perp NB$ Άρα είναι $\widehat{B\hat{N}M} = 90^\circ$.

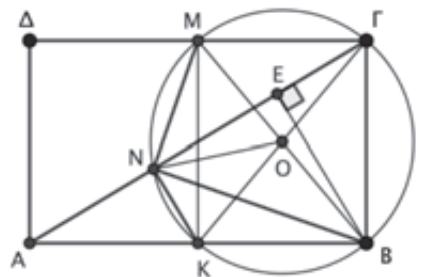
2ος τρόπος.

Έστω K το μέσο της πλευράς AB . Τότε το τετράπλευρο $KB\Gamma M$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, και άρα οι διαγώνιοι του είναι ίσες και διχοτομούνται. Αν O είναι το σημείο τομής των διαγώνιών του, τότε:

$$OK = OB = OG = OM.$$

Επίσης, αφού το τμήμα KN συνδέει τα μέσα των πλευρών AE και AB του τριγώνου AEB , είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά, δηλ. την BE . Συνεπώς, $KN \perp N\Gamma$,

οπότε το τρίγωνο $KN\Gamma$ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την $K\Gamma$. Τότε, όμως, είναι



$$ON = OK = OG.$$

Άρα το σημείο O ισαπέχει από τα σημεία K, B, Γ, M , και N , που σημαίνει ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε κύκλο ω με κέντρο το O και ακτίνα OG . Τότε, όμως, είναι $B\hat{N}M = B\hat{K}M$, αφού οι γωνίες αυτές βαίνουν στο ίδιο τόξο του ω . Συνεπώς, $B\hat{N}M = 90^\circ$.

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 135

A84. Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού k για τις οποίες το σύστημα

$$\begin{aligned} kx - y &= -\frac{1}{3}, \\ 6x + 3y &= 1. \end{aligned}$$

(α) έχει μοναδική λύση, (β) δεν έχει λύση και (γ) έχει απειρία λύσεων.

Λύση. Από την πρώτη εξίσωση λύνοντας ως προς y παίρνουμε: $y = kx + \frac{1}{3}$ και με αντικατάσταση στη δεύτερη εξίσωση λαμβάνουμε:

$$6x + 3\left(kx + \frac{1}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow (6 + 3k)x = 0. \quad (1)$$

(α) Το σύστημα έχει μοναδική λύση $\Leftrightarrow$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση $\Leftrightarrow 6 + 3k \neq 0 \Leftrightarrow k \neq -2$. Η μοναδική λύση του συστήματος είναι: $(x, y) = \left(0, \frac{1}{3}\right)$.

(β) Το σύστημα δεν έχει λύση $\Leftrightarrow$ η εξίσωση (1) δεν έχει λύση. Δεν υπάρχει $k \in \mathbb{R}$ για το οποίο η εξίσωση (1) δεν έχει λύση.

(γ) Το σύστημα έχει απειρία λύσεων $\Leftrightarrow$ η εξίσωση (1) έχει απειρία λύσεων $\Leftrightarrow 6 + 3k = 0 \Leftrightarrow k = -2$. Οι άπειρες λύσεις του συστήματος είναι: $(x, y) = \left(\alpha, -2\alpha + \frac{1}{3}\right), \alpha \in \mathbb{R}$.

A85. Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{Z}$ για τις οποίες το σύστημα με αγνώστους x, y

$$\begin{aligned} x + 2y &= a + 6, \\ 2x - y &= 25 - 2a, \end{aligned}$$

έχει μία λύση (x, y) , με x, y θετικούς ακέραιους.

Λύση. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της δεύτερης εξίσωσης επί 2 και την εξίσωση που προκύπτει την προσθέτουμε κατά μέλη με την πρώτη. Τότε λαμβάνουμε:

$$5x = -3a + 56 \Leftrightarrow x = \frac{56 - 3a}{5} \Leftrightarrow x = 11 + \frac{1 - 3a}{5}.$$

Από τη δεύτερη εξίσωση έχουμε:

$$y = 2x - 25 + 2a \Rightarrow y = 22 + \frac{2 - 6a}{5} - 25 + 2a \Rightarrow y = \frac{4a - 13}{5} = -2 + \frac{4a - 3}{5}.$$

Ζητάμε να προσδιορίσουμε τις τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{Z}$ για τις οποίες το σύστημα έχει λύση (x, y) με x, y θετικούς ακέραιους. Αυτό συμβαίνει όταν

$$56 - 3a > 0 \quad \text{και} \quad 4a - 13 > 0 \Rightarrow 4 \leq a \leq 18$$

και επιπλέον

$$5|1 - 3a \quad \text{και} \quad 5|4a - 3 \Rightarrow 5|4a - 3 + 1 - 3a = a - 2.$$

Επομένως, οι επιτρεπτές τιμές του a είναι στο σύνολο $\{7, 12, 17\}$.

Για $a = 7$ το σύστημα έχει τη λύση $(x, y) = (7, 3)$, για $a = 12$ το σύστημα έχει τη λύση $(x, y) = (4, 7)$ και για $a = 17$ το σύστημα έχει τη λύση $(x, y) = (1, 11)$.

A86. Αν οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z ικανοποιούν το σύστημα των εξισώσεων

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 0, \quad \frac{1}{x} - \frac{6}{y} - \frac{5}{z} = 0,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$P(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$$

Λύση. Με αφαίρεση κατά μέλη των δύο σχέσεων έχουμε:

$$\frac{8}{y} + \frac{8}{z} = 0 \Rightarrow \frac{y}{z} = -1. \quad (1)$$

Με πολλαπλασιασμό της πρώτης εξίσωσης επί 3 και πρόσθεσης στη δεύτερη εξίσωση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\frac{4}{x} + \frac{4}{z} = 0 \Rightarrow \frac{z}{x} = -1. \quad (2)$$

Με πολλαπλασιασμό της πρώτης εξίσωσης επί 5 και της δεύτερης επί 3 και πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\frac{8}{x} - \frac{8}{y} = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = 1. \quad (3)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) και (3) λαμβάνουμε:

$$P(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = -1.$$

A87. Να λύσετε το σύστημα των εξισώσεων

$$\left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z+x} = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{4} \right\}.$$

Λύση. Πρέπει $xyz \neq 0$ και $(x+y)(y+z)(z+x) \neq 0$. Με απαλοιφή των παρονομαστών το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} xy + xz = 2(x+y+z) & (1) \\ xy + yz = 3(x+y+z) & (2) \\ xz + yz = 4(x+y+z) & (3) \end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) και (3) λαμβάνουμε:

$$xy + yz + zx = \frac{9}{2}(x+y+z) \quad (4).$$

Με αφαίρεση από την (4) διαδοχικά των (1), (2) και (3) λαμβάνουμε

$$\left\{ yz = \frac{5}{2}(x+y+z), \quad zx = \frac{3}{2}(x+y+z), \quad xy = \frac{1}{2}(x+y+z) \right\} \quad (5)$$

Επειδή $xyz \neq 0$ έπεται ότι $x + y + z \neq 0$, οπότε με διαίρεση κατά μέλη των τριών εξισώσεων λαμβάνουμε:

$$\frac{y}{x} = \frac{5}{3}, \quad \frac{z}{y} = 3, \quad \frac{z}{x} = 5 \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{15} = \frac{x + y + z}{23}. \quad (6)$$

Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{23}(x + y + z), y = \frac{5}{23}(x + y + z), z = \frac{15}{23}(x + y + z) \Rightarrow \\ xy &= \frac{15}{529}(x + y + z)^2, yz = \frac{75}{529}(x + y + z)^2, zx = \frac{45}{529}(x + y + z)^2 \end{aligned} \quad (7)$$

Από τις εξισώσεις (5) και (7) λαμβάνουμε:

$$xy = \frac{1}{2}(x + y + z) = \frac{15}{529}(x + y + z)^2 \Rightarrow x + y + z = \frac{529}{30},$$

οπότε

$$x = \frac{23}{10}, \quad y = \frac{23}{6}, \quad z = \frac{23}{2}.$$

Ασκήσεις για λύση

Γ68. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, σημείο Δ πάνω στην πλευρά AB και σημείο E στην προέκταση του της πλευρά $A\Gamma$ προς το μέρος του Γ έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Το ευθύγραμμο τμήμα DE τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι $DZ = ZE$.

Γ69. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE . Θεωρούμε σημείο Z πάνω στο ύψος $B\Delta$ και σημείο Θ στην προέκταση του ΓE προς το μέρος του E έτσι ώστε $BZ = A\Gamma$ και $\Gamma\Theta = AB$. Να αποδείξετε ότι $AZ \perp A\Theta$.

Γ70. Στο ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα σημεία Δ και E βρίσκονται πάνω στις πλευρές $A\Gamma$ και AB , αντίστοιχα, έτσι ώστε τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE να τέμνονται στο σημείο P και το εμβαδόν του τετραπλεύρου $A\Delta P E$ να είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου $B\Gamma P$. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $B\hat{P}E$.

Γ71. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\Gamma = 2 \cdot AB$ και $\hat{A} = 2 \cdot \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι: $AB \perp B\Gamma$.

Γ72. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = A\Delta$, $B\hat{A}\Delta = 60^\circ$ και $B\hat{\Gamma}\Delta = 120^\circ$. Να αποδείξετε ότι: $B\Gamma + \Gamma\Delta = A\Gamma$.

Γ73. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B = 80^\circ$. Παίρνουμε σημείο P πάνω στην πλευρά AB έτσι ώστε $B\hat{P}\Gamma = 30^\circ$. Να αποδείξετε ότι $AP = B\Gamma$.

Γ74. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB = 2 \cdot \Gamma\Delta$. Έστω M και N τα μέσα των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$, αντίστοιχα. Έστω P_1 η περίμετρος του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ και P_2 η περίμετρος του τετραπλεύρου $\Gamma\Delta MN$. Να αποδείξετε ότι $P_1 = 2 \cdot P_2$.



Θέματα προετοιμασίας για όλες τις τάξεις

Τάκης Χρονόπουλος

Α. προτεινόμενα θέματα για Α' Γυμνασίου

Θεωρία 1

- α. Τι εκφράζουν γεωμετρικά τα κλάσματα $\frac{3}{13}$ και $\frac{13}{3}$; (λόγια και σχήματα)
- β. Υπάρχει περίπτωση το $\frac{1}{2}$ μιας πίτσας να αντιστοιχεί σε ποσότητα μικρότερη από το $\frac{1}{3}$ μιας άλλης πίτσας; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- γ. Οι παρακάτω 3 προτάσεις είναι **λανθασμένες**. Αλλάξτε μια λέξη **μόνο** σε κάθε μια πρόταση βάζοντας στην θέση της μια δική σας, ώστε η πρόταση να γίνει αληθής (**σωστή**). Στην συνέχεια, στον πίνακα που ακολουθεί, αφού τον μεταφέρετε στην κόλλα σας, γράψτε στην πρώτη στήλη την λέξη που αλλάξατε από τις προτάσεις 1,2,3 αντίστοιχα και στην δεύτερη στήλη την λέξη με την οποία την αλλάξατε.

1. Κατά την πρόσθεση ετερόνυμων κλασμάτων, στο καπελάκι κάθε κλάσματος βάζουμε το ηγλίκο του ΕΚΠ των αριθμητών με καθέναν από τους παρονομαστές τους αντίστοιχα.
2. Το ηγλίκο δυο κλασμάτων είναι ένα νέο κλάσμα με αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών.
3. Το αποτέλεσμα ενός απλού κλάσματος είναι ένα νέο κλάσμα με αριθμητή το γινόμενο των άκρων όρων και παρονομαστή το γινόμενο των μέσων όρων.

	λάθος λέξη	σωστή λέξη
1		
2		
3		

Θεωρία 2

- α. Ποιο τρίγωνο λέγεται ισόπλευρο; Τι είδους τρίγωνο είναι ως προς τις γωνίες του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β. Να κατασκευάσετε σ' ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο τα 3 ύψη του.
- γ. Να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει τρίγωνο με δυο γωνίες ορθές.

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{4 + \frac{2}{3} : 5 - \frac{1}{3}}{5 - 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{2}} \quad B = 2 + \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{8} \right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{8} - 1 \right) \quad \Gamma = 2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{6} \right) \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{5} + 2025 \right) - \left(1 - \frac{2}{3} \right)^2$$

α) Να αποδείξετε ότι $A = \frac{114}{155}$, $B = \frac{25}{12}$, $\Gamma = \frac{17}{9}$.

β) Να υπολογίσετε και να διατάξετε τις τιμές των παραστάσεων $\frac{A}{114}$, $\frac{12}{17}B\Gamma$ και $\frac{17}{\Gamma}$

Άσκηση 2

Ο παππούς μοίρασε τα $\frac{3}{4}$ της σύνταξης του στις 3 εγγονές του, την Αγάπη, την Ελπίδα και την Χαρά. Αρχικά έδωσε στην Αγάπη το 30 % του συνολικού ποσού. Μετά έδωσε στην Ελπίδα το $\frac{1}{3}$ των υπόλοιπων χρημάτων. Τέλος έδωσε στην Χαρά 420 €.

- α) 1. Να υπολογίσετε πόσα χρήματα έδωσε ο παππούς στην Ελπίδα.
2. Να υπολογίσετε πόσα χρήματα μοίρασε ο παππούς στις 3 εγγονές του.
3. Να αποδείξετε ότι ο παππούς παίρνει σύνταξη 1200€.

Ένα χρόνο πριν, η κυβέρνηση είχε μειώσει την σύνταξη του παππού κατά 4%. Και δυο χρόνια πριν την είχε αυξήσει κατά 25%.

- β) 1. Τι σύνταξη έπαιρνε ο παππούς πριν ένα χρόνο;
2. Τι σύνταξη έπαιρνε ο παππούς πριν δύο χρόνια;

Άσκηση 3

- α) 1. Να σχεδιάσετε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα 2 cm. Να σχεδιάσετε την χορδή ΑΒ του κύκλου με $AB=2$ cm.
2. Να εξηγήσετε γιατί το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο. Να υπολογίσετε την περίμετρό του.
- β) 1. Να σχεδιάσετε την μεσοκάθετο της χορδής ΑΒ και να ονομάσετε Γ, Δ τα σημεία που τέμνει αυτή η μεσοκάθετος τον κύκλο (ώστε το σημείο Γ να είναι πιο κοντά στην ευθεία ΑΒ από το σημείο Δ). Να εξηγήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι ισοσκελή με βάση την πλευρά ΑΒ.
2. Να εξηγήσετε γιατί το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ είναι διάμετρος του κύκλου. Να υπολογίσετε το μήκος του ΓΔ.
3. Να σχεδιάσετε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία του Γ και Δ. Να εξηγήσετε γιατί οι εφαπτόμενες αυτές είναι παράλληλες (μεταξύ τους).

Β. προτεινόμενα θέματα Β΄ Γυμνασίου

Θεωρία 1

- α.1. Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α;
α.2. Γιατί δεν ορίζουμε τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού;
β. Ποιοι αριθμοί λέγονται άρρητοι;
γ. Να κατασκευάσετε γεωμετρικά τον άρρητο αριθμό $\sqrt{2}$.

Θεωρία 2

- α.1. Να σχεδιάσετε οξεία γωνία ω με $\epsilon\phi\omega=2/3$.
α.2. Να σχεδιάσετε οξεία γωνία θ με $\eta\mu\theta=1/4$.
α.3. Να σχεδιάσετε οξεία γωνία φ με $\sigma\upsilon\nu\phi=3/4$.
β. Να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει οξεία γωνία α με $\epsilon\phi\alpha=-2$.
γ. Να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει οξεία γωνία β με $\eta\mu\beta=2$.

Ασκήσεις

Άσκηση 1

- α.1. Στον αγώνα μπάσκετ των ομάδων Ξωτικά – Νεράιδες μπήκαν συνολικά 60 πόντοι. Η ομάδα Ξωτικά είχε τα $\frac{2}{3}$ των πόντων της άλλης ομάδας. Ποια ομάδα κέρδισε και πόσο έληξε ο αγώνας;
α.2 Στον αγώνα αυτό έγιναν 30 εύστοχα σουτ συνολικά και μπήκαν τόσες βολές όσα και δίποντα. Να βρείτε πόσες εύστοχες βολές έγιναν, πόσα εύστοχα δίποντα έγιναν και πόσα εύστοχα τρίποντα έγιναν.
α 3. Αν η συνολική ευστοχία στον αγώνα αυτό ήταν 50% στις βολές, 25% στα δίποντα και 20% στα τρίποντα, πόσα σουτ συνολικά έγιναν στον αγώνα (εύστοχα και άστοχα);
β.1. Στην ρεβάνς του αγώνα (επαναληπτικός αγώνας), μπήκαν 45% περισσότεροι πόντοι. Αν

γνωρίζουμε ότι τα πλήθη των εύστοχων βολών, δίποντων και τριπόντων είναι ανάλογα των αριθμών 2, 3 και 7, να βρείτε τα παραπάνω πλήθη.

β.2. Σε έναν τρίτο αγώνα μεταξύ τους, η ομάδα Ξωτικά, έβαλε 5 πόντους περισσότερους από τους τριπλάσιους που έβαλε στον πρώτο αγώνα. Στον αγώνα αυτό, η ομάδα Νεράιδες, έβαλε διπλάσιους πόντους από το άθροισμα των πόντων που έβαλε στον πρώτο γύρο και 7 ακόμη πόντων. Πόσο έληξε ο αγώνας αυτός; Ποια ομάδα κέρδισε;

Σημείωση: Για εύστοχα σουτ: βολή = 1 πόντος, δίποντο = 2 πόντους, τρίποντο = 3 πόντους.

Άσκηση 2

α. Δίνεται η εξίσωση $\frac{x-1}{3} - \frac{2x+7}{6} = x + \frac{1-3x}{2}$. Να αποδείξετε ότι έχει λύση το 4.

β. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $(\varepsilon_1): y = \left(\frac{\lambda-1}{3} - \frac{2\lambda+7}{6} \right)x + 2\lambda - 2$ και

$(\varepsilon_2): y = \left(\lambda + \frac{1-3\lambda}{2} \right)x + 2025$, όπου λ πραγματικός αριθμός.

β.1. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες είναι οι: $(\varepsilon_1): y = -\frac{3}{2}x + 6$ και $(\varepsilon_2): y = -\frac{3}{2}x + 2025$

β.2. Να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία (ε_1) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα

β.3. Να βρείτε την απόσταση της αρχής των αξόνων από την ευθεία (ε_1)

β.4. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που είναι παράλληλη στην (ε_1) και διέρχεται από το $K(2, 2022)$.

Άσκηση 3

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με περίμετρο 28 cm. Δίνεται επίσης ότι το μήκος του είναι ελαττωμένο κατά 4 από το διπλάσιο του πλάτους του.

α. Να αποδείξετε ότι το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει πλάτος 6 cm.

Θεωρούμε σημεία Ε, Ζ των πλευρών του ΑΔ, ΔΓ αντίστοιχα με (ΔΖ)=2 (ΕΔ) ώστε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΕΒΖΔ να ισούται με το μισό του εμβαδού του ορθογώνιου ΑΒΓΔ.

β.1. Να αποδείξετε ότι (ΕΔ) = 2,4 cm.

β.2. Οι προεκτάσεις των ευθύγραμμων τμημάτων ΒΕ και ΓΔ τέμνονται στο σημείο Θ. Να υπολογίσετε το μήκος του ΘΔ.

γ. Θεωρούμε τον κύκλο που διέρχεται από τις κορυφές Α, Β, Γ του ορθογώνιου. Αποδείξετε ότι ο κύκλος αυτός διέρχεται και από την κορυφή Δ.

Γ. προτεινόμενα θέματα για Γ' Γυμνασίου

Θεωρία 1

α. 1. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

2. Να αντιγράψετε και να συμπληρώσετε τα αναπτύγματα στις ταυτότητες :

$$(\alpha - \beta)^3 = \dots \qquad \alpha^2 - \beta^2 = \dots$$

β. Τι ονομάζεται παραγοντοποίηση;

γ. Οι παρακάτω 3 προτάσεις είναι **λανθασμένες**. Αλλάξτε μια λέξη **μόνο** σε κάθε μια πρόταση βάζοντας στην θέση της μια δική σας, ώστε η πρόταση να γίνει αληθής (**σωστή**). Στην συνέχεια, στον πίνακα που ακολουθεί, αφού τον μεταφέρετε στην κόλλα σας, γράψτε στην πρώτη στήλη την λέξη που αλλάξατε από τις προτάσεις 1,2,3 αντίστοιχα και στην δεύτερη στήλη την λέξη με την οποία την αλλάξατε.

1. Αναγωγή ομοίων όρων λέγεται η εργασία των όμοιων μονωνύμων σε ένα πολυώνυμο, ή όπως λέμε των όμοιων όρων, με το άθροισμά τους.

2. Οι κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις, στις οποίες μεταξύ των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού, λέγονται μονώνυμα.

3. Δύο πολυώνυμα είναι ίσα, όταν έχουν όρους σταθερά μονώνυμα.

	λάθος λέξη	σωστή λέξη
1		
2		
3		

Θεωρία 2

α. Να διατυπώσετε τα τρία Κριτήρια Ισότητας Τριγώνων. Σε κάθε περίπτωση, να κάνετε τα δυο αντίστοιχα σχήματα, επισημαίνοντας ποια στοιχεία είναι ίσα πάνω στο σχήμα.

β. Να σχεδιάσετε δυο τρίγωνα που έχουν μεταξύ τους τρία κύρια στοιχεία τριγώνου ίσα ένα προς ένα, αλλά δεν ίσα τρίγωνα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο που να είναι ίσο με ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ασκήσεις

Άσκηση 1

α. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2x - 5y = 9 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$ (1)

β. Να λύσετε την εξίσωση $-2x^2 - 3x + 5 = 0$ (2)

γ1. Να λύσετε την ανίσωση $3 - \frac{x-2}{2} - \frac{2x+1}{3} < 2x-5$ (3)

γ2. Να εξετάσετε ποιες από τις λύσεις x, y του συστήματος (1) και x_1, x_2 της εξίσωσης (2) είναι λύσεις της ανίσωσης (3), σχεδιάζοντας τις λύσεις των (1), (2), (3) στον άξονα των πραγματικών αριθμών ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε.

Άσκηση 2

α1. Να αποδείξετε ότι $(3x+2)(2x^2 - x - 2) = 6x^3 + x^2 - 8x - 4$

α2. Να λύσετε την εξίσωση $6x^3 + x^2 - 8x - 4 = 0$

β1. Να αποδείξετε ότι $(2x+1)^3 - (3x-2)^2 = 8x^3 + 3x^2 + 18x - 3$

β2. Να λύσετε την εξίσωση $(2x+1)^3 - (3x-2)^2 = 26x$

Άσκηση 3

Στις ίσες πλευρές OA, OB της γωνίας $\widehat{AOB}$ θεωρούμε τα σημεία Γ, Δ αντίστοιχα με $OG=OD$. Τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Delta$ και $B\Gamma$ τέμνονται στο σημείο M . Να αποδείξετε ότι:

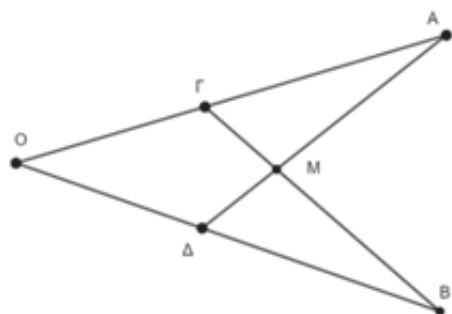
α.1. $\widehat{ODA} = \widehat{OGB}$

2. $\widehat{BDA} = \widehat{AGB}$

β. 1. $\widehat{B\Delta M} = \widehat{A\Gamma M}$

2. το τρίγωνο $\widehat{\Gamma M \Delta}$ είναι ισοσκελές με βάση την $\Gamma\Delta$.

γ. η OM διχοτομεί την γωνία $\widehat{AOB}$.



ΣΧΟΛΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ και Μαθηματικά

Επιμέλεια: Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Εκτός από την διδασκαλία των μαθημάτων στα σχολεία όλης της χώρας γίνονται και πολλές δραστηριότητες. Καθηγητές και καθηγήτριες με όρεξη και μεράκι, αλλά και τις γνώσεις που έχει η νέα γενιά των καθηγητών, προσπαθούν να δώσουν στα παιδιά γνώσεις και σε άλλα θέματα για να αναδείξουν τα ταλέντα τους.

Τα σχολεία μας πλέον συνεργάζονται και με σχολεία άλλων χωρών, έτσι προετοιμάζονται τα παιδιά για μια ανοικτή κοινωνία που οι άνθρωποι δουλεύουν μαζί, σκέφτονται μαζί, δημιουργούν μαζί το μέλλον της ανθρωπότητας. Οι νέες τεχνολογίες, η τεχνητή νοημοσύνη, δεν επιτρέπουν πλέον σύνορα. Οι μελλοντικοί άνθρωποι μαζί θα ταξιδεύουν στο διάστημα, οι γλώσσες τείνουν να γίνουν μια παγκόσμια ηλεκτρονική γλώσσα. Οι νέοι άνθρωποι δεν χρειάζονται να μαθαίνουν πληροφορίες για όλα τα θέματα, αυτές τις βρίσκουν πλέον εύκολα, αλλά το σύγχρονο σχολείο πρέπει να επιμένει στην καλλιέργεια της κρίσης και της λογικής. Αυτό ακριβώς που έγινε με τους αρχαίους Έλληνες που μας έδωσαν τη λογική σκέψη και τις επιστήμες. Τα βιβλία πρέπει να αλλάζουν μορφή, να οδηγούν το μαθητή σε ένα δρόμο αναζήτησης, ανακάλυψης και λογικής.



Σε αυτή την παγκόσμια κοινωνία όμως πρέπει να επικρατήσουν κάποιες αρχές σαν αυτές που βοήθησαν τον σημερινό δυτικό πολιτισμό να μεγαλουργήσει. Δηλαδή οι αρχές των «τριών βράχων» όπως λέγεται συμβολικά: Ο δυτικός πολιτισμός στηρίχτηκε Στη **Δημοκρατία** (Ακρόπολη των Αθηνών), στο **Ρωμαϊκό δίκαιο** (βράχος του Καπιτωλίου, Καπιτωλίνος λόφος στη Ρώμη) και στην **ηθική του Χριστιανισμού** (βράχος του Γολγοθά). Έτσι οι άνθρωποι θα σέβονται τις αξίες ο ένας του άλλου και θα προοδεύουν.

Εορτή στις 14 Μαρτίου. Ποιος εορτάζει; Ένας αριθμός.

Δεν τον γνωρίζουμε ακριβώς αλλά τον συναντάμε καθημερινά, στο σχολείο, στις επιστήμες, στη δουλειά. Είναι ο αριθμός $\pi=3,14...$.

Είναι αριθμός πραγματικός, άρρητος, υπερβατικός και λέγεται **π ή $\rho\iota$ ή σταθερά του Αρχιμήδη**. Είναι ο **λόγος του μήκους ενός κύκλου προς την διάμετρό του**, για οποιονδήποτε κύκλο προκύπτει πάντα αυτός ο αριθμός, ο οποίος δεν είναι ακέραιος, δεν είναι κλάσμα, είναι ένας άρρητος αριθμός, δηλαδή αριθμός με άπειρα δεκαδικά ψηφία που τελειωμό δεν έχουν και δεν υπάρχει περιοδικότητα. Έτσι αφού είναι άρρητος, σημαίνει δεν λέγεται άρα είναι απαραίτητο να δίνεται με ένα σύμβολο. Ο Euler το 1736 τον έγραφε συμβολικά με το μικρό **γράμμα π** , από το αρχικό γράμμα της λέξης **περιφέρεια**.

Ο Euler έγραψε: «για λόγους συντομίας θα γράφουμε τον αριθμό με « π », ο π είναι ίσος με το μισό της περιφέρειας ενός κύκλου ακτίνας 1» (κάτι που κάνουμε στην Τριγωνομετρία, με τον τριγωνομετρικό κύκλο). Ο συμβολισμός αυτός με το μικρό Ελληνικό γράμμα **π** έκτοτε

καθιερώθηκε σε όλο τον κόσμο. Πρώτος ο Αρχιμήδης τον 3^ο αιώνα π.Χ. κατάφερε να υπολογίσει τα 4 πρώτα δεκαδικά ψηφία του π με εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα πολύγωνα σε κύκλο. Χρησιμοποίησε πολύγωνο με 96 πλευρές και υπολογίζει το π μεταξύ των ρητών αριθμών $223/71 < \pi < 22/7$. Κάποια χρόνια οι μαθηματικοί με υπολογιστές αναζητούσαν ψηφία του π κάτι που τώρα δεν έχει ενδιαφέρον για τους μαθηματικούς αλλά μόνο για τους πληροφορικούς που δοκιμάζουν προγράμματα και αλγορίθμους. Οι μαθηματικοί πλέον έχουν ρίξει το ενδιαφέρον τους στους πρώτους αριθμούς.

Είναι σημαντικός ο π ; Ναι όπως και οι: 0, 1, e, i, googole 10^{100} , κλπ. .

Οι άνθρωποι γνωρίζουν τον αριθμό π εδώ και χιλιάδες χρόνια, οι Βαβυλώνιοι, οι αρχαίοι Έλληνες, οι Κινέζοι, έκαναν προσπάθειες για τον υπολογισμό του. Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποιούσαν για το π το $22/7$, οι Αιγύπτιοι και οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούν τον π ως $25/8$. Στον Πάπυρο Rhind 1650 π.Χ., έχει ένα τύπο που αντιμετωπίζει το π ως $(16/9)^2$. Οι Κινέζοι χρησιμοποιούσαν το $\pi=3,15$, οι Ινδοί έχουν το $\pi=(9785/5568)^2 \approx 3.088$.



Αγαλμα του Αρχιμήδη
στις Συρακούσες

Η ημέρα εορτασμού του π δεν είναι μια απλή γιορτή του π , αντιπροσωπεύει την πρόοδο που έχει πετύχει οι ανθρωπότητα μέσω των αριθμών. Ο άνθρωπος, με την Παγκόσμια γλώσσα των Μαθηματικών, με την ενιαία γραφή των αριθμών, κατάφερε στον 21^ο αιώνα να έχει επιλύσει προβλήματα που για χιλιάδες χρόνια μας προβληματίζαν. Η έννοια αριθμός έπαιξε σημαντικό ρόλο στη ζωή και την εξέλιξη του ανθρώπου. Το μεγαλύτερο κατόρθωμα του ανθρώπου είναι ότι απέκτησε την ικανότητα της μέτρησης και να εκφράζεται με αριθμούς. Έτσι με τους αριθμούς μετρήσαμε και ερμηνεύσαμε τη δομή της ζωής και του Σύμπαντος. Με τους αριθμούς κάναμε Υπολογιστές, Διαστημικά ταξίδια και τόσα άλλα.

Κατά το παρελθόν κάθε λαός είχε τη δική του γραφή των αριθμών, άλλη γραφή οι Αιγύπτιοι, άλλη οι Φοίνικες, άλλη οι Ινδοί, άλλη οι Μάγια, άλλη οι Κινέζοι, άλλη οι Ρωμαίοι, άλλη οι Έλληνες. Χρειάστηκαν πολλά χρόνια για να γράψει ο άνθρωπος έναν αριθμό και ακόμα περισσότερα να φτάσει στην σημερινή Αραβική γραφή των αριθμών, με τις πράξεις και τα αριθμητικά συστήματα. Το πιο δύσκολο ήταν να συμπεριλάβει στα ψηφία και σύμβολο για το μηδέν.

Ο Πυθαγόρας όμως χιλιάδες χρόνια πριν, κατάλαβε ότι τα πάντα είναι αριθμοί και ότι με τους αριθμούς θα κατανοήσουμε το σύμπαν. Οι Αρχαίοι Έλληνες Φιλόσοφοι και Μαθηματικοί δημιούργησαν πρώτοι τις επιστήμες, ο Θαλής έδωσε την έννοια της απόδειξης, ο Ευκλείδης τη Γεωμετρία, ο Πυθαγόρας ερμήνευε τα πάντα με αριθμούς. Τα καλύτερα και αρχαιότερα Πανεπιστήμια ήταν η Ακαδημία του Πλάτωνα και η Σχολή του Αριστοτέλη. Ο δυτικός πολιτισμός έχει τις βάσεις του στον τρόπο σκέψης των Αρχαίων Ελλήνων.

Οι δραστηριότητες που θα παρουσιάσουμε δεν είναι επιλογή μας, είναι από τα σχολεία που μας ενημέρωσαν ή ενημερωθήκαμε γι' αυτό. Πολλά σχολεία είχαν εκδηλώσεις και δραστηριότητες με θέμα τα Μαθηματικά.

Στο επόμενο τεύχος θα συμπεριλάβουμε και τις δραστηριότητες άλλων σχολείων που δεν μπορέσαμε να παρουσιάσουμε σε αυτό το τεύχος.

Εμείς, οι Γεώργιος Μενδωνίδης, Παναγιώτης Χριστόπουλος και Βαγγέλης Ζώτος, προσκεκλημένοι στη γιορτή για το π (pi) που οργάνωσε το **Γυμνάσιο Άνοιξης** πήγαμε και



μιλήσαμε στα παιδιά, για το π και για τους **Θαλή, Ευκλείδη, Αρχιμήδη και Πυθαγόρα**, κάναμε Μαθηματικά παιχνίδια και Γρίφους από το βιβλίο «**Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν**» έκδοση της ΕΜΕ. Οι μαθητές είχαν οργανώσει εκδήλωση με δρώμενα, με **3D** κατασκευές και γλυκίσματα με την καθοδήγηση της μαθηματικού Χ. Πούλιου, του Φυσικού Η. Κυριαζή και της Διευθύντριας Σ. Στρίγκου.

Επίσης στα Τρίκαλα η πρόεδρος του παραρτήματος της ΕΜΕ Αθ. Ζαραμπούκα οργάνωσε το 2^ο Συμπόσιο «**Μαθηματικά και Τέχνη**». Γιορτή για το π επίσης οργάνωσαν και τα σχολεία στη **Ρόδο**. Το παράρτημα της ΕΜΕ στην Κόρινθο, οργάνωσε ημερίδα για τους **Μαθηματικούς Διαγωνισμούς**, με καλεσμένο ομιλητή τον Ντίνο Κορδόση. Στην **Ολυμπία** μαθητές έκαναν μετρήσεις για το μέγεθος της Γης, «**Ερατοσθένης**». Το **ΓΕΛ Πεντέλης** επισκέφτηκε την **έκθεση Θετικών Επιστημών του ΕΚΠΑ** και οι μαθητές ενημερώθηκαν από την κα Λεώνη Δάλλα σε θέματα επιστήμης των Μαθηματικών. Το 1^ο **ΓΕΛ Αμαλιάδας** ο πρόεδρος Γ. Τσόπελας του παραρτήματος της ΕΜΕ με τον Δντή Θ. Λαμπρόπουλο και ομιλητή τον Ηλ. Καλογήρου δίδαξαν επιστημονικά φαινόμενα με κριτική σκέψη.



Πολλά άλλα σχολεία πήγαν σε χώρες του εξωτερικού με Ευρωπαϊκά προγράμματα ενώ έγιναν και αδελφοποιήσεις με σχολεία του εξωτερικού. Έγινε αδελφοποίηση των Γυμνασίων Δροσιάς και Άνοιξης με το σχολείο στο Γαλλικό χωριό Rougemont-le-Chateau.

Τα σχολεία της Ξάνθης και το Γυμνάσιο Σουφλίου τα επισκέφτηκε το «**ΓΡΙΦΟΠΟΥΛΙ**» από το Καστελλόριζο. Στο Καστελλόριζο δημιούργησε μουσείο Γρίφων ένας Έλληνας μαθηματικός του εξωτερικού που επέστρεψε στον τόπο του, ο Πανταζής Χούλης. Στην Ξάνθη έγιναν ομιλίες, πειράματα και οι μαθητές ασχολήθηκαν λύνοντας Γρίφους. Οι Γρίφοι δίνουν χαρά σε μικρούς και μεγάλους, οι δύσκολες μαθηματικές έννοιες γίνονται παιχνίδι, ενώ ταυτόχρονα μας ωθούν στη στρατηγική σκέψη και λογική. Στόχοι του φεστιβάλ Ξάνθης ήταν: α) Να ενισχυθεί το ενδιαφέρον των μαθητών και ενηλίκων για την επιστήμη και την τεχνολογία, δίνοντάς τους τη δυνατότητα να δουν, να ακούσουν, να πειραματιστούν, να δημιουργήσουν, και εν τέλει να βιώσουν την επιστήμη ως μια συναρπαστική εμπειρία, και β) Να αναδειχθεί η αξία των γρίφων που ενδυναμώνουν δεξιότητες όπως η οξυδέρκεια, η παρατηρητικότητα, η υπομονή και η επιμονή, ενώ παράλληλα ενισχύουν τη συνεργασία και επινοητικότητα, εμπνέουν, και κάνουν τη μάθηση πιο διασκεδαστική. Το Γυμνάσιο Σουφλίου είχε και δραστηριότητες για το περιβάλλον με στόχο την αποκατάσταση των δασών που κατεστράφησαν με τη μεγάλη πυρκαγιά.





Το ηλεκτρικό ποδήλατο

Ευσταθία Γαρίνη , Χρήστος Μπατέλης

Σε μια εφημερίδα, μεγάλης κυκλοφορίας, υπήρχε μια διαφήμιση από μια εταιρεία.

Έγραφε: Προσφέρουμε ένα ηλεκτρικό ποδήλατο αξίας 1000 € μόνο με 200 €.

Πολλοί αναγνώστες της εφημερίδας έδειξαν ενδιαφέρον και επικοινωνήσαν με την εταιρεία για να ζητήσουν πληροφορίες. Έπαιρναν ως απάντηση ότι με τα 200 € που θα έδινε ο ενδιαφερόμενος, δεν αποκτούσε αμέσως το ποδήλατο, αποκτούσε μόνο τέσσερα κουπόνια τα οποία, σύμφωνα με τις οδηγίες, έπρεπε να πουλήσει στους φίλους του προς 200 € το ένα. Όταν λοιπόν θα τα πουλούσε, θα εισέπραττε άλλα 800 € τα οποία θα τα πήγαινε στην Εταιρεία και τότε μόνο θα μπορούσε να κάνει δικό του το ηλεκτρικό ποδήλατο.

«Με άλλα λόγια κάποιος που θα ολοκλήρωνε την συγκεκριμένη διαδικασία θα πλήρωνε πραγματικά 200 €, τα υπόλοιπα όμως 800 € θα τα είχε πάρει από τους φίλους. Ο κάθε φίλος τώρα με το κουπόνι των 200€ έπρεπε να επικοινωνήσει με την εταιρεία για να ανταλλάξει το κουπόνι των 200 € με πέντε νέα κουπόνια, αξίας 200 € το καθένα, και θα έπρεπε να βρει πέντε νέους παίχτες για τα πουλήσει. Την είσπραξη των $5 \times 200 = 1000$ € που θα εισέπραττε, θα την έστελνε στην εταιρεία και θα αποκτούσε αμέσως το ηλεκτρικό ποδήλατο. Δηλαδή θα είχε ουσιαστικά πληρώσει 200 € αντί για 1000 € για την αγορά του ηλεκτρικού ποδηλάτου.

Οι νέοι κάτοχοι των κουπονιών τα αντάλλαζαν, με τη σειρά τους, με πέντε κουπόνια ο καθένας για περαιτέρω διανομή, κ.ο.κ. Με μια πρώτη ματιά, δεν φαινόταν να υπάρχει κάποια απάτη στη δοσοληψία. Ο διαφημιζόμενος τηρούσε την υπόσχεσή του: το ποδήλατο πραγματικά στοίχιζε στον αγοραστή του μόνο 200 €. Βέβαια ούτε η εταιρεία έχανε χρήματα αφού εισέπραττε την πλήρη αξία του ηλεκτρικού ποδηλάτου.

Κι όμως, η υπόθεση ήταν μια μεγάλη απάτη.

Ας δούμε βήμα - βήμα την όλη διαδικασία. Ας ξεκινήσουμε με τον πρώτο αγοραστή (παίχτη). Αυτός έπρεπε να βρει άλλους τέσσερις παίχτες, που μάλλον δεν ήταν και ιδιαίτερα δύσκολο. Οι τέσσερις νέοι παίχτες θα έπρεπε ο καθένας τους να βρει τέσσερις νέους παίχτες και γενικά κάθε νέο μέλος της ομάδας έφερνε στην «πυραμίδα» τέσσερις νέους μετόχους.

Δηλαδή ξεκινήσαμε με

Πρώτος γύρος	1	παίχτη και συνεχίσαμε με
Δεύτερος γύρος	4	και με άλλους νέους παίχτες
Τρίτος γύρος	20	(4x5) και συνεχίζουμε με νέους παίχτες
Τέταρτος γύρος	100	(20x5) και συνεχίζουμε με νέους παίχτες
Πέμπτος γύρος	500	(100x5) και συνεχίζουμε με νέους παίχτες
Έκτος γύρος	2.500	(500x5) και συνεχίζουμε με νέους παίχτες.

Όπως φαίνεται, η ορμή της χιονοστιβάδας αυξανόταν ραγδαία. Μέχρι στιγμής, ο καθένας από τους αρχικούς αγοραστές είχε παρασύρει στο παιχνίδι $1+4+20+100+500+2.500=3.125$ άλλους, από τους οποίους μόνο οι 500 είχαν αποκτήσει τα ηλεκτρικά ποδήλατα, ενώ στους υπόλοιπους 2.500 δινόταν η ελπίδα ότι θα αποκτήσουν - μια ελπίδα που την είχαν πληρώσει με 200 €. Η κατάσταση φαίνεται να ξεφεύγει πλέον από το κύκλο των γνωστών και των φίλων και να απλώνεται σε ολόκληρη την πόλη και, μην ξεχνάτε, ξεκινήσαμε με ένα άτομο που πήγε στην εταιρεία, προφανώς δεν ήταν και το μοναδικό, θα υπήρχα και άλλα άτομα που θα είχαν την ίδια ιδέα, οπότε η χιονοστιβάδα απλώνεται σε όλη τη χώρα. Από ένα σημείο και μετά για τους νέους παίχτες (αγοραστές κουπονιών) θα ήταν εξαιρετικά δύσκολο να βρεθεί κάποιος που να επιθυμεί να αγοράσει κουπόνια. Ας συνεχίσουμε για λίγο ακόμη την παραπάνω πυραμίδα για μια μεγάλη

πόλη με πληθυσμό 312.500 κατοίκων και ας υποθέσουμε ότι όλοι θέλουν να αγοράσουν ηλεκτρικό ποδήλατο.

Πρώτος γύρος	1	
Δεύτερος γύρος	4	
Τρίτος γύρος	20	4×5
Τέταρτος γύρος	100	$(4 \times 5) \times 5 = 4 \times 5 \times 5 = 4 \times 5^2$
Πέμπτος γύρος	500	$(4 \times 5^2) \times 5 = 4 \times 5^2 \times 5 = 4 \times 5^3$
Έκτος γύρος	2.500	$(4 \times 5^3) \times 5 = 4 \times 5^3 \times 5 = 4 \times 5^4$
Έβδομος γύρος	12.500	$(4 \times 5^4) \times 5 = 4 \times 5^4 \times 5 = 4 \times 5^5$
Όγδοος γύρος	62.500	$(4 \times 5^5) \times 5 = 4 \times 5^5 \times 5 = 4 \times 5^6$
Ένατος γύρος	312.500	$(4 \times 5^6) \times 5 = 4 \times 5^6 \times 5 = 4 \times 5^7$

Όπως βλέπεται ο ένατος γύρος έχει εξαντλήσει όλη την πόλη και από αυτούς μόνο οι 62.500 έχουν αποκτήσει το ηλεκτρικό ποδήλατο. Δηλαδή από τους 312.500 πολίτες μόνο το $\frac{1}{5}$ έχει αποκτήσει το ηλεκτρικό ποδήλατο τα υπόλοιπα $\frac{4}{5}$ απλά είχαν παρασυρθεί στην καλοστημένη απάτη. Είχαν στην κατοχή τους κουπόνια για τα οποία δεν υπήρχε η ελάχιστη ελπίδα να διαθέσουν σε οποιονδήποτε άλλο στην πόλη. Αν ήθελαν να τα πουλήσουν θα έπρεπε να απευθυνθούν σε φίλους και γνωστούς από όλη την χώρα και αυτό να το κάνουν όσο γίνεται άμεσα για να έχουν κάποια ελπίδα να προλάβουν να τα ξεφορτωθούν. Ας δούμε όμως τι γίνεται με όλη την χώρα. Είχαμε μείνει στον 9ο γύρο στον οποίο υπήρχαν 312.500 που έπρεπε ο καθένας τους να βρει πέντε νέους αγοραστές (παίχτες), Ας δούμε πώς μεταβάλλεται η πυραμίδα.



1	
4	
20	
100	
500	
2.500	
12.500	(4×5^5)
62.500	(4×5^6)
312.500	(4×5^7)
1.562.500	(4×5^8)
7.812.500	(4×5^9)
39.062.500.	(4×5^{10})

Όπως φαίνεται στον 11ο γύρο, η πλεκτάνη θα έχει εμπλέξει σχεδόν ολόκληρο τον πληθυσμό της χώρας, και τα τέσσερα πέμπτα περίπου θα έχουν εξαπατηθεί από τους εμπνευστές της χάνοντας τα χρήματά τους. Τι ακριβώς έγινε;

Απλά τα $\frac{4}{5}$ του πληθυσμού πληρώνουν τα ποδήλατα που αγόρασε το υπόλοιπο $\frac{1}{5}$.

Πρόκειται για μια καλοστημένη απάτη, διότι πολλοί άνθρωποι έχαναν τα χρήματά τους καθώς δεν κατάφερναν να πουλήσουν τα κουπόνια που είχαν αγοράσει. Ότι και να έκαναν οι παίχτες (αγοραστές), μετά τους πρώτους γύρους, αργά ή γρήγορα διαπίστωναν ότι τους ήταν αδύνατο να διαθέσουν τα κουπόνια που είχαν στην κατοχή τους. Από την άλλη η εταιρεία σ' αυτούς στηριζόταν για να καλύψει τη διαφορά της τιμής και όχι μόνο. Με αυτήν της ενέργεια η εταιρεία αποκτούσε μια ολόκληρη στρατιά εθελοντών και πολύ δραστήριων πωλητών, χωρίς να πληρώσει σεντς. Το μόνο που μπορούμε να πούμε, λοιπόν, είναι πως θύματα σε τέτοιες καλοστημένες απάτες πέφτουν συνήθως όσοι δεν ξέρουν να κάνουν τους πιο πάνω υπολογισμούς ώστε να διακρίνουν το δόλο που κρύβεται πίσω τους.



Τα μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Λεονάρντο της Πίζας (1175 – 1240) ή **Φιμπονάτσι** (*Fibonacci*) Ιταλός μαθηματικός, που έφερε στην Ευρώπη το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης (αραβικούς αριθμούς) και άλλες μαθηματικές καινοτομίες. Ο **Λεονάρντο** γεννήθηκε στην Πίζα και πήγε στην Αλγερία μαζί με τον πατέρα του ο οποίος ήταν εκπρόσωπος των εμπόρων στη Βόρεια Αφρική. Εκεί διδάχτηκε λογιστικά και Μαθηματικά αλλά έκανε και ταξίδια όπου απέκτησε πολύτιμες γνώσεις από τα μαθηματικά των Αράβων. Όταν το 1200 επέστρεψε στην Πίζα, έγραψε και δημοσίευσε το βιβλίο *liber abaci* (βιβλίο υπολογισμών) γεμάτο με τις μαθηματικές γνώσεις που είχε συλλέξει στα ταξίδια του από τους Άραβες. Το βιβλίο είχε θερμή υποδοχή από τους Ευρωπαίους γιατί έδειχνε την πρακτικότητα του αραβικού αριθμητικού συστήματος στο εμπόριο, στις συναλλαγές, τις μετατροπές των μέτρων και σταθμών, στους υπολογισμούς των τόκων. Βέβαια πιο γνωστό έγινε μετά την εφεύρεση της τυπογραφίας. Οι Ρωμαίοι είχαν άλλα σύμβολα αρίθμησης και οι Αρχαίοι Έλληνες για ψηφία είχαν τα γράμματα της αλφαβήτου. Μάλιστα ως πρακτική στην αρχαία Ελλάδα γινόταν και πρόσθεση των γραμμάτων των λέξεων ως αριθμών (με τις αριθμητικές τιμές τους) και όταν τα αθροίσματα σε δυο γραμμές ή στοίχους ήταν ίσα είχαν «ισοψηφισμό». Ενίοτε για την εκμάθηση Αριθμητικής και Γεωμετρίας χρησιμοποιούσαν βότσαλα και μικρές πέτρες (ψηφίδες), [*digī*=ψηφίδα, και *digiti*=δάκτυλα, και τα ψηφία 10 όσα τα δάκτυλά μας].



Γ ρ ί φ ο ι

Μάντεψε τον αριθμό

Ζητάμε από ένα φίλο μας ή φίλη μας να γράψει έναν 3ψήφιο αριθμό με ίδια ψηφία, ύστερα να τον διαιρέσει με το άθροισμα των ψηφίων του και στο αποτέλεσμα να προσθέσει την ηλικία του. Μας λέει το αποτέλεσμα και εμείς βρίσκουμε την ηλικία του. Ξέρετε πώς;



Ο Ανθοπώλης

Ο ανθοπώλης έχει 21 λευκά, 28 κόκκινα και 35 ροζ τριαντάφυλλα, όλα τα άνθη, από κάθε χρώμα τα έχει δεμένα σε ίσες ομάδες. Αν πάρουμε ένα μπουκέτο που να έχει μια ομάδα από κάθε χρώμα, πόσα θα είναι όλα τα τριαντάφυλλα στο μπουκέτο;

Τα παιδιά

Τα παιδιά παρακολουθούν την παρέλαση και στέκονται ένα, δύο, τρία, τέσσερα μαζί.

Μπορεί να μετακινηθεί ένα μόνο παιδί και η σειρά που στέκονται να αντιστραφεί και να είναι 4, 3, 2, 1;

Ο Οδυσσέας

Ο Οδυσσέας βρέθηκε σε ένα παράξενο σταυροδρόμι που ο ένας δρόμος οδηγεί σε μια πλατεία και ο άλλος στο γκρεμό. Στο σταυροδρόμι είναι ένα σπίτι που κατοικούν δυο αδελφές αλλά η μια λέει πάντα ψέματα και η άλλη πάντα την αλήθεια. Στο σταυροδρόμι ο Οδυσσέας βλέπει μια από τις κοπέλες, τι ερώτηση θα της κάνει για να πάει σίγουρα στην πλατεία και όχι στο γκρεμό;

Το Μπουκάλι και ο Φελλός

Ένα μπουκάλι και ένας φελλός κοστίζουν μαζί 1,10€. Το μπουκάλι κοστίζει 1€ παραπάνω από τον φελλό. Πόσο κοστίζει ο φελλός;

Ο Αριθμός

Ένας αριθμός είναι διψήφιος. Το ψηφίο των δεκάδων είναι διπλάσιο από το ψηφίο των μονάδων. Αν αντιστρέψεις τα ψηφία του, ο νέος αριθμός πόσο μικρότερος μπορεί να είναι από τον αρχικό;



Η μαμά του Λευτέρη: Η μαμά του Λευτέρη έχει ηλικία ίση με τα $5/7$ της ηλικίας της γιαγιάς του και ο Λευτέρης έχει ηλικία το $1/3$ της ηλικίας της γιαγιάς του. Αν ο Λευτέρης είναι 32 χρόνια μικρότερος από την μάνα του, πόσων χρονών είναι η γιαγιά του;
(Ο Γρίφος «Η μαμά του Λευτέρη» είναι από διαγωνισμό στην Α Γυμνασίου του παρατήματος της ΕΜΕ στην Αχαΐα)



Απαντήσεις των Γρίφων τ.135

Ο δάσκαλος: Όταν από έναν αριθμό αφαιρέσουμε το άθροισμα που δίνουν τα ψηφία του τότε προκύπτει αριθμός που είναι πολλαπλάσιο του εννέα. Με τα κριτήρια διαιρετότητας δια 9 βρήκε αμέσως τα λάθη ο δάσκαλος.

Η Θεανώ: Αφού η Θεανώ έπαιρνε 1000€ το μήνα σε 3 μήνες πήρε 3.000 και αυτά που έμειναν τα αύξησε ο πατέρας της κατά το $\frac{1}{4}$. Αλλά συνολικά της έδωσε όλα όσα ξόδεψε δηλαδή $3 \times 1000 + 3 \times 1000 + 6 \times 2000 = 18000$ €. Α) Άρα στην αρχή κατέθεσε 15.000 και Β) στους 3 μήνες τα $15.000 - 3000 = 12.000$ τα αύξησε κατά το $1/4 \times 12.000 = 3.000$.

Ο πολλαπλασιασμός

$$\begin{array}{r} 10502 \\ \times 705 \\ \hline 52510 \\ 73514 \\ \hline 7403910 \end{array}$$

Τα τετράγωνα έτη: Το πρώτο τετράγωνο έτος της χιλιετίας είναι το $2025 = 45^2$ και το τελευταίο είναι το $2916 = 54^2$, σύνολο 10 έτη. Την προηγούμενη χιλιετία είχαμε!! 53 έτη και την επόμενη θα έχουμε!! 9 έτη.

Τα ψηφία: Στο υπουργείο τα 11 νέα γραφεία πήραν την αρίθμηση 100, 101, ..., 110. Χρειάστηκαν 12 «0» $\times 0,5\text{€} = 6\text{€}$, 13 «1» $\times 1\text{€} = 13\text{€}$, και τα ψηφία 2,3,4,5,6,7,8 με 41€. Το ένα «6» το έβαλε για «9».

Απαντήσεις των Γρίφων τ.136

Μάντεψε τον αριθμό: Όταν μας πουν το αποτέλεσμα αφαιρούμε 37 και έχουμε την ηλικία του/της. Αυτό γιατί όταν διαιρούμε 3ψήφιο με ίδια ψηφία με το άθροισμά τους, το αποτέλεσμα είναι 37.

Ο Ανθοπώλης: Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί για τα άνθη κάθε χρώματος έχουν ΜΚΔ το 7, άρα οι ομάδες είναι από 7 άνθη και το μπουκέτο 21 τριαντάφυλλα.

Ο Αριθμός: Οι 2ψήφιοι είναι 21, 42, 63 και 84. Έτσι $84 - 48 = 36$, $63 - 36 = 27$, $42 - 24 = 18$, $21 - 12 = 9$.

Άρα θα είναι μικρότερος 9 ή 18 ή 27 ή 36.



Τα παιδιά: Όπως βλέπουμε τα παιδιά, μετακινούμε τον προ τελευταίο δεξιά και τον θέτουμε μεταξύ του ενός και των δύο παιδιών για να δημιουργήσουμε καινούργια 4άδα, έτσι τώρα θα έχουμε 4,3,2,1.

Το Μπουκάλι και ο Φελλός: Αφού το μπουκάλι κοστίζει ένα Ευρώ περισσότερο από την αξία του φελλού άρα $\phi + \mu\pi = 1,10$ και $\mu\pi - \phi = 1$ προσθέστε τις ισότητες κατά μέλη: $\phi + \mu\pi + \mu\pi - \phi = 1,10 + 1$ ή $2\mu\pi = 2,10\text{€}$ ή $\mu\pi = 1,05\text{€}$. Άρα ο φελλός κοστίζει 0.05€.

Ο Οδυσσέας: Για να πάει ο Οδυσσέας στην πλατεία, όποια και να συναντήσει θα ρωτήσει:

Αν ρωτούσα την αδελφή σου ποιος δρόμος οδηγεί στην πλατεία τι θα μου έλεγε;

Αυτός τώρα δεν θα πάρει το δρόμο που θα του δείξει η κοπέλα αλλά το άλλο.

Εξήγηση: α) Αν η κοπέλα είναι αυτή που λέει πάντα αλήθεια θα του πει το λάθος δρόμο της ψεύτρας αδελφής της. Β) Αν η κοπέλα είναι αυτή που λέει πάντα ψέματα δεν θα του πει τον σωστό δρόμο που θα έλεγε η αδελφή της.

Δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις θα του υποδείξουν το λάθος δρόμο.

Η μαμά του Λευτέρη: Τα $5/7$ της ηλικίας της γιαγιάς του Λευτέρη και το $1/3$ της ηλικίας της, τα εκφράζουμε με ομώνυμα κλάσματα: $5/7 \times 3/3 = 15/21$ και $1/3 \times 7/7 = 7/21$. Συνεπώς, η μαμά του Λευτέρη έχει ηλικία ίση με τα $15/21$ της ηλικίας της γιαγιάς του και ο Λευτέρης έχει ηλικία ίση με τα $7/21$ της ηλικίας της γιαγιάς του. Επειδή ο Λευτέρης είναι 32 χρόνια μικρότερος από την μάνα του, συνεπάγεται ότι $15/21 - 7/21 = 8/21$ της ηλικίας της γιαγιάς του είναι 32 χρόνια. Άρα η γιαγιά του είναι $32 \times 21/8 = 84$ ετών.

Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ολυμπιάδες



Νέα τιμή βιβλίου: 15€



Νέα τιμή βιβλίου: 10€



Τιμή βιβλίου: 25€

Προσφορές

Διαγωνισμοί



Τιμή βιβλίου: 18€

Νέο Βιβλίο

2η έκδοση



Τιμή βιβλίου: 18€

Νέο Βιβλίο

2η έκδοση



Τιμή βιβλίου: 18€

Νέο Βιβλίο

2η έκδοση

Βιβλία της ΕΜΕ



Τιμή βιβλίου: 25€



Τιμή βιβλίου: 25€

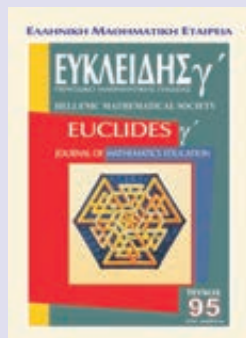


Τιμή βιβλίου: 20€

Περιοδικά



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα

τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025

www.hms.gr e-mail: info@hms.gr