135

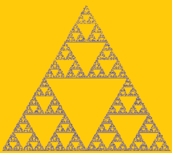
Μαθηματικό περιοδικό για το

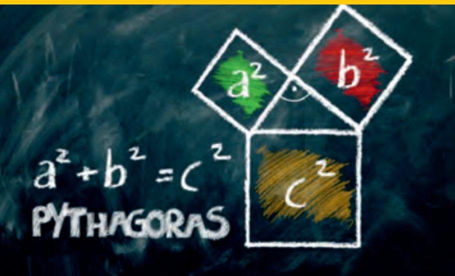
ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

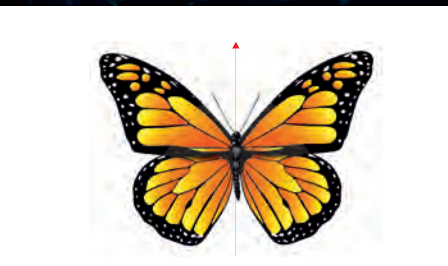
Ευκλείδης Α΄
Γυμνάσιο

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ - ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ - ΜΑΡΤΙΟΣ 2025 ευρώ 3

ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.
ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ
Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ.
Αριθμός Άδειας 4156
ΕΛΤΑ Hellenic Post







Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
για το γυμνάσιο
Ευκλείδης α΄

Τεύχος 135
Ιανουάριος - Φεβρουάριος - Μάρτιος 2025
Τιμή Τεύχους 3,00 Ευρω
e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025
Εκδότης: Ανάργυρος Φελλούρης
Διευθυντής: Ιωάννης Τυρλής

Επιμέλεια Έκδοσης:
Μαραγκάκης Στυλιανός

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί μαθητές και μαθήτριες
και συνάδελφοι καθηγητές και καθηγήτριες,

Σήμερα, αρχές του 21ου αιώνα, ο άνθρωπος έχει καταφέρει πολλά χάρις τα Μαθηματικά. Έχει καταφέρει να κινείται στο διάστημα και στα βάθη των ωκεανών.
Έχει καταφέρει την τεχνητή Νοημοσύνη. Χωρίς τα Μαθηματικά και τις θετικές επιστήμες στο μέλλον θα είμαστε «αναλφάβητοι».
Τετράγωνο έτος για τετράγωνη λογική

$$(2+0+2+5)^2 \times 25=2025$$
$$(20+25)^2=2025$$

Από τους Συντονιστές της συντακτικής ομάδας του περιοδικού

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:
printfair
Τηλ.: 2102469799 -2102401695
Υπεύθυνος Τυπογραφείου:
Α. Κρέτσης

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ενδειξη «Για τον Ευκλείδη Α΄. Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση με σύστημα κριτών.**

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)
Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
1. **ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα** λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. **ALPHA**, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. **EUROBANK**, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Πληρώνεται στα **γραφεία** της Ε.Μ.Ε

Blaise Pascal (Μπλεζ Πασκάλ) (1623 -1662)

Γάλλος μαθηματικός, φυσικός, συγγραφέας, φιλόσοφος και θεολόγος.

Γεννήθηκε στο Κλερμόν-Φεράν το 1623. Ο Μπλεζ Πασκάλ ήταν ένα παιδί θαύμα. Μέχρι τα 15 του έτη μελετούσε στα «κρυφά» μαθηματικά διότι του το είχε απαγορεύσει ο πατέρας του. Παρά το «απαγορευτικό» ο Pascal, ανακάλυψε μόνος του ότι: το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με δύο ορθές γωνίες. Όταν ο πατέρας του, Étienne Pascal, είδε τα επιτεύγματα του γιου του, εντυπωσιάστηκε και επίτρεψε στο γιο του τη μελέτη μαθηματικών κειμένων, αρχίζοντας με το κλασσικό έργο **«Στοιχεία» του Ευκλείδη.** Λίγο πριν κλείσει τα 20 του χρόνια, είχε δημιουργήσει μια μηχανή υπολογισμών, την «Πασκαλίνα». Στα 20 του, ο Pascal αρρώστησε και επί της ουσίας ποτέ δεν ανέκτησε τις δυνάμεις του, όμως συνέχισε να μελετά και να ανακαλύπτει νέα πράγματα. Το 1647 ανακάλυψε την **Αρχή του Πασκάλ** και τη **χρήση τού βαρομέτρου για τη μέτρηση του υψομέτρου**. Το 1654 δημοσίευσε μια εργασία του με τον τίτλο «Traité du triangle arithmétique», με την συγγραφή της οποίας έθεσε τις βάσεις για τη Συνδυαστική (κλάδος των μαθηματικών) και το Λογισμό των Πιθανοτήτων. προς τιμήν του δόθηκε το όνομά του στη μονάδα μέτρησης της πίεσης στο SI (Διεθνές Σύστημα Μετρήσεων). Επίσης μια από τις πιο γνωστές μαθηματικές μελέτες του, είναι το επονομαζόμενο **«τρίγωνο του Πασκάλ».**

Το τρίγωνο του Pascal

Κουστέρης Χρήστος

Το τρίγωνο του Pascal είναι μια τριγωνική διάταξη την κατασκευή της οποίας θα περιγράψουμε παρακάτω:

- Στην πρώτη γραμμή τοποθετούμε τον αριθμό 1

1

- Στην δεύτερη γραμμή αφήνουμε κενή θέση κάτω από το 1 και αριστερά και δεξιά της βάζουμε το ένα.

1
1 1

- Στην τρίτη γραμμή αφήνουμε κενό κάτω από τους αριθμούς της προηγούμενης γραμμής και δεξιά και αριστερά τους βάζουμε το 1
- Στο κενό που υπάρχει ανάμεσα στους 2 αριθμούς της προηγούμενης σειράς τοποθετούμε το άθροισμα τους δηλαδή $1+1=2$.

1
1 1
1 2 1

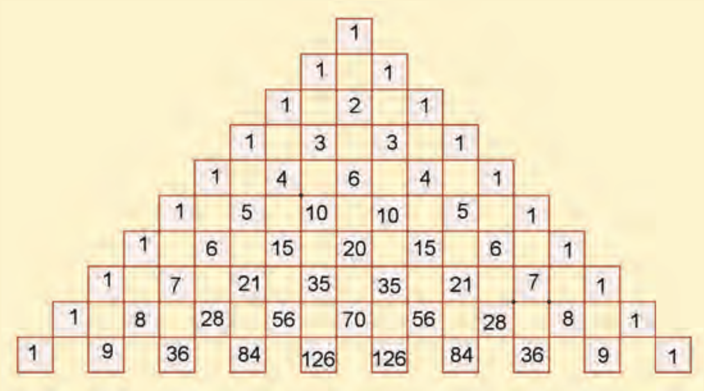
- Στην τέταρτη γραμμή αφήνουμε κενό κάτω από τους αριθμούς της προηγούμενης γραμμής και αριστερά και δεξιά από τις μονάδες βάζουμε επίσης 2 μονάδες
- Στα κενά που υπάρχουν ανάμεσα στους δύο αριθμούς τοποθετούμε το άθροισμά τους $1+2=3$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

- Στην πέμπτη γραμμή αφήνουμε κενό κάτω από τους αριθμούς της προηγούμενης σειράς και αριστερά και δεξιά από τις μονάδες βάζουμε επίσης 2 μονάδες
- Στα κενά που υπάρχουν ανάμεσα στους αριθμούς τοποθετούμε το άθροισμά τους $1+3=4$, $3+3=6$ και $3+1=4$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

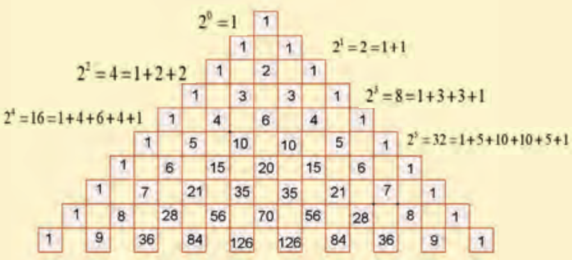
Συνεχίζοντας την παραπάνω διαδικασία και κατασκευάζοντας τις πρώτες 10 γραμμές του τριγώνου του Pascal προκύπτει.



Ας δούμε μερικές από τις ιδιότητες που έχει το παραπάνω τρίγωνο του οποίου οι γραμμές δεν τελειώνουν ποτέ !

Ιδιότητα 1

Σε κάθε γραμμή το άθροισμα των αριθμών είναι το αποτέλεσμα των δυνάμεων του 2 με εκθέτη: 0 για την 1η γραμμή , 1 για την δεύτερη γραμμή, 2 για την τρίτη γραμμή κ.ο.κ



Άρα το άθροισμα των αριθμών στην νιοστή σειρά είναι $2^{\nu-1}$

Ιδιότητα 2

Οι αριθμοί της κάθε γραμμής είναι οι συντελεστές της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^\nu$ όπου ν φυσικός αριθμός .

$$(\alpha+\beta)^0=1$$

$$(\alpha+\beta)^1=1\cdot\alpha+1\cdot\beta$$

$$(\alpha+\beta)^2=1\cdot\alpha^2+2\cdot\alpha\cdot\beta+1\cdot\beta^2$$

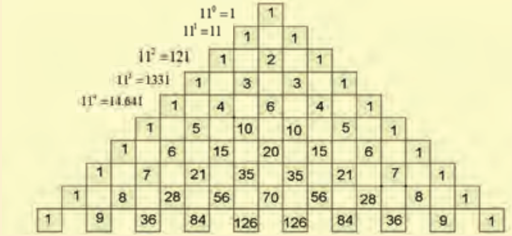
$$(\alpha+\beta)^3=1\cdot\alpha^3+3\cdot\alpha^2\beta+3\cdot\alpha\beta^2+1\cdot\beta^3$$

$$(\alpha+\beta)^4=1\cdot\alpha^4+4\cdot\alpha^3\cdot\beta+6\cdot\alpha^2\cdot\beta^2+4\cdot\alpha\cdot\beta^3+1\cdot\beta^4$$

$$(\alpha+\beta)^5=1\cdot\alpha^5+5\cdot\alpha^4\cdot\beta+10\cdot\alpha^3\cdot\beta^2+10\cdot\alpha^2\cdot\beta^3+5\cdot\alpha\cdot\beta^4+1\cdot\beta^5$$

Ιδιότητα 3

Στις πρώτες 5 γραμμές ο αριθμός που σχηματίζεται σε κάθε γραμμή είναι οι δυνάμεις του αριθμού 11



Για τις επόμενες γραμμές υπάρχει ένας κανόνας απλοποίησης και τελικά της εύρεσης των δυνάμεων του 11 που για λόγους οικονομίας χώρου θα ασχοληθούμε σε επόμενο άρθρο.

Ιδιότητα 4

Στο τρίγωνο του Pascal εμφανίζονται **όλοι** οι φυσικοί αριθμοί (αν βέβαια συνεχίσουμε να φτιάχνουμε γραμμές για πάντα)

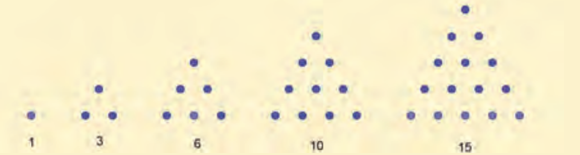
Ιδιότητα 5

Στο τρίγωνο του Pascal εμφανίζονται οι τρίγωνοι αριθμοί.

Τρίγωνοι ονομάζονται οι αριθμοί που αν παρασταθούν με σημεία ίσα με το πλήθος του αριθμού τότε σχηματίζουν ισόπλευρα τρίγωνα. Για να βρούμε ένα τρίγωνο αριθμό απλά προσθέτουμε κάθε φορά από την αρχή τους φυσικούς

Άρα $1,(1+2),(1+2+3),(1+2+3+4),(1+2+3+4+5),(1+2+3+4+5+6),\ldots$

Δηλαδή $1,3,6,10,15,21,\ldots$ Σχηματικά προκύπτει το παρακάτω για τους πρώτους 5 τρίγωνους αριθμούς.



$1=0+1 \quad 3=1+2 \quad 6=1+2+3 \quad 10=1+2+3+4 \quad 15=1+2+3+4+5$

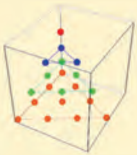
Το άθροισμα δυο διαδοχικών τρίγωνων αριθμών είναι τετράγωνο ακεραίου

$$1+3=4=2^2,\ 3+6=9=3^2,\ 6+10=16=4^2,\ 10+15=25=5^2,\ 15+21=36=6^2$$

Ιδιότητα 5

Στο τρίγωνο του Pascal εμφανίζονται οι τετραεδρικοί αριθμοί.

Τετραεδρικοί ονομάζονται οι αριθμοί που ο αριθμός μας δείχνει το πλήθος των σημείων για να φτιάξουμε στο χώρο μία πυραμίδα τριγωνική.



Ιδιότητα 6

Στο τρίγωνο του Pascal υπάρχουν τα αθροίσματα των όρων της ακολουθίας του Fibonacci 1,1,2,3,5,8,13, 21,.... (κάθε όρος της από τον τρίτο και μετά προκύπτει από το άθροισμα των δύο προηγούμενων

Η διαγώνιος του τριγώνου αν αθροίσουμε τα στοιχεία της προκύπτουν οι αριθμοί Fibonacci

Δηλαδή ο τρίτος όρος είναι ο αριθμός 2 (1+1)

Ο τέταρτος όρος είναι ο αριθμός 5 (1+3+1)

Ο πέμπτος όρος είναι ο αριθμός 8 (3+4+1)

Ο έκτος όρος είναι ο αριθμός 13 (1+6+5+1)

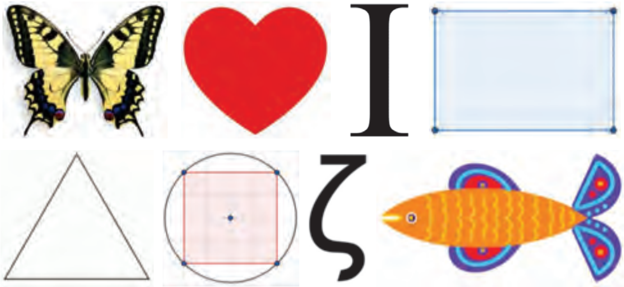
Α΄ Τάξη

Συμμετρία

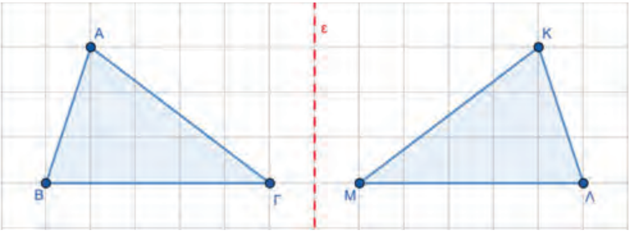
Ιωάννης Ρίζος

Α. Συμμετρία ως προς άξονα

Παρατηρήστε τα ακόλουθα σχήματα. Μπορείτε να σχεδιάσετε, για το κάθε σχήμα ξεχωριστά, μια ευθεία που να χωρίζει το σχήμα με τέτοιο τρόπο, ώστε όταν το διπλώσουμε κατά μήκος της ευθείας το ένα μέρος να εφαρμόζει επάνω στο άλλο; Πόσες τέτοιες ευθείες μπορείτε να βρείτε για το κάθε σχήμα;

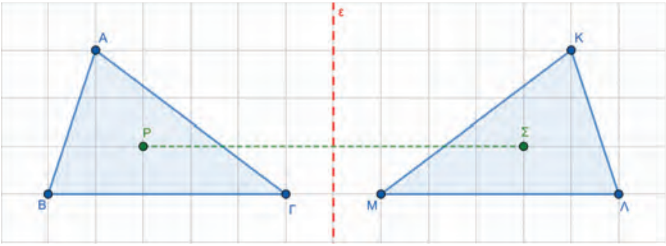


Κάθε ευθεία όπως οι παραπάνω λέγεται άξονας συμμετρίας του σχήματος. Επομένως, **άξονας συμμετρίας** ενός σχήματος ονομάζεται η ευθεία που χωρίζει το σχήμα σε δύο μέρη, τα οποία συμπίπτουν όταν το σχήμα διπλωθεί κατά μήκος της ευθείας. Λέμε τότε ότι το σχήμα έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία αυτή. Τα σημεία του σχήματος που συμπίπτουν με την παραπάνω δίπλωση λέγονται **συμμετρικά σημεία** ως προς τον άξονα συμμετρίας. Όπως διαπιστώσατε, ορισμένα σχήματα δεν έχουν άξονα συμμετρίας, κάποια έχουν μόνο έναν, ενώ κάποια άλλα έχουν περισσότερους.



Αν διπλώσουμε κατά μήκος την ευθεία ε, κάθε σημείο του τριγώνου ΑΒΓ θα συμπέσει με ένα σημείο του τριγώνου ΚΛΜ και αντίστροφα. Αυτό σημαίνει ότι καθένα από τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ αποτελείται από τα συμμετρικά *όλων* των σημείων του άλλου τριγώνου ως προς την ευθεία ε. Γενικότερα, **δύο σχήματα λέγονται συμμετρικά ως προς μια ευθεία ε**, όταν καθένα αποτελείται από τα συμμετρικά σημεία του άλλου ως προς την ε.

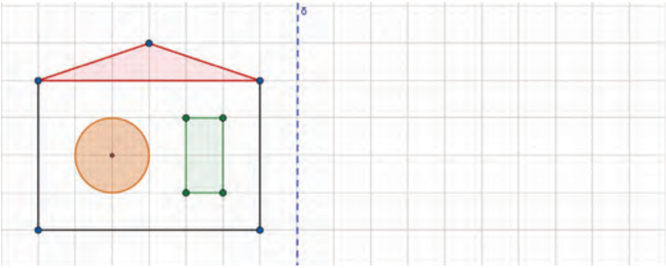
Ας δούμε ξανά τα δύο προηγούμενα τρίγωνα. Θεωρείστε ένα σημείο Ρ στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ και εξετάστε τι σχέση έχει με το συμμετρικό του ως προς την ευθεία ε, δηλαδή το σημείο Σ στο εσωτερικό του τριγώνου ΚΛΜ.



Κάνοντας προσεκτικά τις μετρήσεις, θα διαπιστώσετε ότι i) η ευθεία ε τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΡΣ στο μέσον, και ii) η ευθεία ε τέμνει κάθετα, δηλαδή υπό γωνία 90°, το ευθύγραμμο τμήμα ΡΣ. Στα ίδια ακριβώς συμπεράσματα καταλήγουμε, όποια συμμετρικά σημεία κι αν θεωρήσουμε· δοκιμάστε το! Δοκιμάστε ακόμα να κάνετε το ίδιο και με άλλα συμμετρικά σχήματα. Γενικεύοντας τα συμπεράσματά μας, έχουμε:

1. Ο άξονας συμμετρίας διέρχεται από το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος, το οποίο ενώνει δύο συμμετρικά σημεία του σχήματος.
2. Ο άξονας συμμετρίας είναι κάθετος στο ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο ενώνει δύο συμμετρικά σημεία του σχήματος.
3. Τα συμμετρικά ως προς ευθεία σχήματα είναι ίσα.

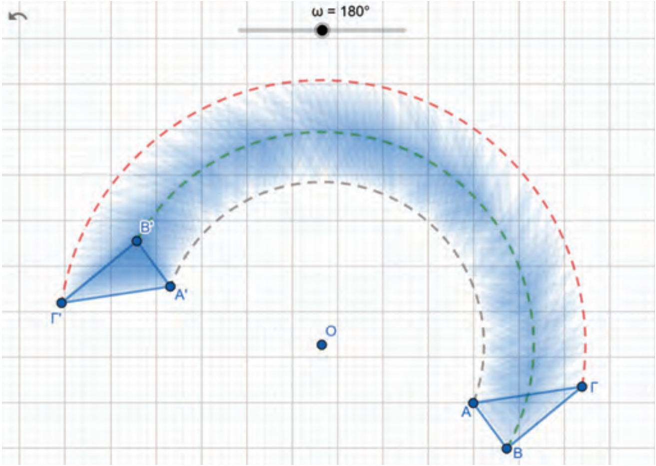
Με βάση τα συμπεράσματα 1-3, προσπαθήστε να κατασκευάσετε το συμμετρικό του ακόλουθου σχήματος ως προς την ευθεία δ (αξιοποιώντας το μιλιμετρέ χαρτί):



Τι θα συνέβαινε αν δεν σας δινόταν μιλιμετρέ χαρτί; Θα είχατε τη δυνατότητα να κατασκευάσετε το ζητούμενο σχήμα; Μπορείτε να γράψετε ορισμένες οδηγίες προς τους/τις συμμαθητές/τριές σας για την κατασκευή συμμετρικού σχήματος ως προς ευθεία, στην περίπτωση που δεν διαθέτετε μιλιμετρέ χαρτί; Ξεκινήστε με απλές περιπτώσεις· π.χ. περιγράψτε πώς μπορεί να κατασκευαστεί το συμμετρικό σημείο ενός δοσμένου σημείου, ως προς δοσμένη ευθεία.

Β. Συμμετρία ως προς σημείο

Με τη βοήθεια του λογισμικού *GeoGebra* (ή σε διαφανές χαρτί, αν δεν υπάρχει η δυνατότητα), σχεδιάστε τρίγωνο ΑΒΓ και θεωρείστε σημείο Ο του επιπέδου. Με κέντρο το Ο περιστρέψτε το τρίγωνο ΑΒΓ, αντίστροφα από τους δείκτες του ρολογιού, κατά γωνία 180°. Έστω Α΄Β΄Γ΄ η νέα θέση του τριγώνου (βλ. το ακόλουθο σχήμα). Παρατηρήστε ότι με την κίνησή τους οι κορυφές Α, Β, Γ διαγράφουν τα ημικύκλια ΑΑ΄, ΒΒ΄ και ΓΓ΄ αντίστοιχα. Συμφωνείτε με το ότι το τρίγωνο κατά την περιστροφή του διατηρεί αμετάβλητες τις διαστάσεις του; Εδώ εμφανίζεται ένα νέο είδος συμμετρίας, διαφορετικό από αυτό που μάθαμε προηγουμένως. Λέμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι συμμετρικά ως προς κέντρο συμμετρίας Ο.



Τα **σημεία** Α και Α΄ λέγονται **συμμετρικά** ως προς κέντρο Ο. Δηλαδή το συμμετρικό του σημείου Α ως προς κέντρο Ο είναι το σημείο Α΄, με το οποίο συμπίπτει το Α αν περιστραφεί γύρω από το Ο κατά 180°. Γενικεύοντας, έχουμε:

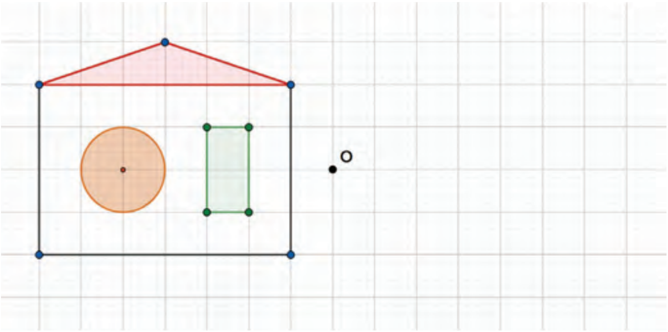
1. Δύο σημεία Μ και Μ΄ είναι συμμετρικά ως προς σημείο Ο, όταν το Ο είναι το μέσον του τμήματος ΜΜ΄.

2. Δύο σχήματα λέγονται συμμετρικά ως προς σημείο Ο, όταν κάθε σημείο του ενός είναι συμμετρικό ενός σημείου του άλλου ως προς το Ο και αντίστροφα.

3. Τα συμμετρικά ως προς σημείο σχήματα είναι ίσα.

Για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό Μ΄ ενός σημείου Μ ως προς σημείο Ο, φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΜΟ και στην προέκτασή του (προς το Ο) παίρνουμε με τον διαβήτη ίσο τμήμα ΟΜ΄. Ομοίως, για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ ως προς σημείο Ο, αρκεί να βρούμε τα σημεία Α΄ και Β΄ που είναι τα συμμετρικά των Α και Β ως προς το Ο, και να τα ενώσουμε.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, μπορείτε να κατασκευάστε το συμμετρικό του επόμενου σχήματος ως προς το σημείο Ο;



Παρατηρήστε τα ακόλουθα σχήματα. Προσπαθήστε να βρείτε (αν υπάρχει) ένα σημείο για το καθένα, γύρω από το οποίο αν περιστραφεί το σχήμα κατά 180° συμπίπτει με τον εαυτό του.




Το ζητούμενο σημείο λέγεται κέντρο συμμετρίας του σχήματος. Επομένως, **κέντρο συμμετρίας** ενός σχήματος ονομάζεται ένα σημείο Ο, γύρω από το οποίο αν περιστραφεί το σχήμα κατά 180°, συμπίπτει με το αρχικό. Στην περίπτωση που υπάρχει τέτοιο σημείο, λέμε ότι το σχήμα έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο Ο.

Για εξάσκηση

1. Να βρείτε ποια από τα κεφαλαία γράμματα της αλφαβήτου έχουν άξονα συμμετρίας και ποια κέντρο συμμετρίας. Υπάρχουν κάποια που έχουν και τα δύο;
2. Ποιο είναι το συμμετρικό ενός κύκλου ως προς το κέντρο του;
3. Ποιο είναι το συμμετρικό ενός ευθυγράμμου τμήματος ως προς το μέσον του;
4. Ποιο είναι το συμμετρικό μιας ημιευθείας ως προς την αρχή της;
5. Να σχεδιάσετε μια ευθεία ε και να κατασκευάσετε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, με ΒΑ = ΒΓ = 4cm και Β = 80°, ώστε η ευθεία ε να είναι άξονας συμμετρίας του τριγώνου ΑΒΓ.
6. Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 3cm, ΑΓ = 4cm και ΒΓ = 5cm. Να συμπληρώσετε το σχήμα, ώστε το νέο σχήμα που θα προκύψει να έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο Α.

Μεταβλητές και παράμετροι

Ζαφειρόπουλος Χρήστος - Γυμνασίου Ανδρίτσαινας

Ας προσπαθήσουμε σε τμήματα όμοιων προβλημάτων να διακρίνουμε τις μεταβλητές και τις παραμέτρους που πιθανώς χρειαζόμαστε για την επεξεργασία τους.

Άσκηση 1:

1η Εκφώνηση: «Ο Στάθης έχει διπλάσια μολύβια από τον Νίκο…»

Επεξεργασία της παραπάνω εκφώνησης:

Στην παραπάνω εκφώνηση δεν μας γνωστοποιείται το πόσα μολύβια έχει ο Νίκος. Ξέρουμε μόνο ότι τα μολύβια του Στάθη είναι διπλάσια από αυτά του Νίκου. Αν για παράδειγμα ο Νίκος έχει 5 μολύβια, τότε ο Στάθης θα έχει τα διπλάσια, δηλαδή 2 επί 5 ίσον 10 μολύβια.

Εφόσον στην παραπάνω εκφώνηση δεν γνωρίζουμε πόσα μολύβια έχει ο Νίκος, χρειαζόμαστε μια μεταβλητή, την οποία θα συμβολίσουμε όπως εμείς επιθυμούμε, έστω x. Επιπλέον, δεν υπάρχει κανένας περιορισμός ως προς τα πόσα μολύβια έχει ο Νίκος, επομένως η μεταβλητή αυτή x είναι «ανεξάρτητη», δηλαδή εν δυνάμει μπορεί να λάβει την οποιαδήποτε τιμή.

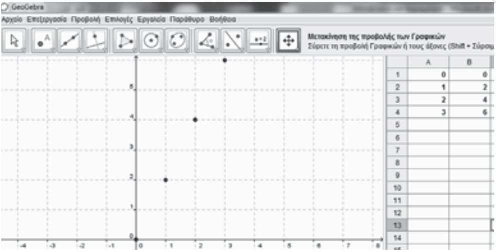
Δεν γνωρίζουμε ούτε το πόσα μολύβια έχει ο Στάθης. Άρα και εδώ θα χρειαστούμε μια μεταβλητή την οποία επίσης θα συμβολίσουμε όπως εμείς επιθυμούμε, έστω y. Δεν της δώσαμε το ίδιο όνομα με την μεταβλητή του Νίκου, διότι ο Νίκος και ο Στάθης δεν έχουν τον ίδιο αριθμό από μολύβια (εκτός και αν δεν έχουν καθόλου μολύβια, κάτι που εμείς δεν γνωρίζουμε αν συμβαίνει). Αυτό που γνωρίζουμε ότι ο αριθμός των μολυβιών του Στάθη που εκφράζεται με την μεταβλητή y δεν είναι «ανεξάρτητη», δηλαδή εν δυνάμει δεν μπορεί να λάβει την οποιαδήποτε τιμή, αλλά είναι «εξαρτημένη» από την μεταβλητή x, δηλαδή από τον αριθμό των μολυβιών που έχει ο Νίκος.

Έχουμε λοιπόν μια σχέση ανάμεσα στα μολύβια που έχει ο Στάθης με αυτά του Νίκου, η οποία στην εκφώνηση εκφράζεται με τον **διπλασιασμό**. Άρα, αφού όλες οι τιμές της μεταβλητής y είναι διπλάσιες από τις τιμές της x έχουμε την σχέση ισότητας των δύο μεταβλητών x και y, την: $\mathbf{y = 2\cdot x}$.

Πράγματι, αν στην σχέση (ισότητα ή συνάρτηση) αυτή αντικαταστήσουμε όπως πριν την μεταβλητή x με την τιμή 5, τότε σωστά, η τιμή y θα λάβει την τιμή 10 (2 επί 5 ίσον 10) που εκφράζει τον αριθμό των μολυβιών που θα έχει ο Στάθης στην τυχαία περίπτωση που ο Νίκος είχε 5 μολύβια.

Μπορούμε μάλιστα, αν επιθυμούμε να έχουμε οπτική απεικόνιση της σχέσης, να φτιάξουμε έναν πίνακα τιμών, δίνοντας πολλές τυχαίες τιμές στην μεταβλητή x και υπολογίζοντας κάθε φορά την αντίστοιχη τιμή y.

Για παράδειγμα, στην παρακάτω εικόνα, στην Στήλη Α του Geogebra δώσαμε τις τυχαίες τιμές από μηδέν έως τρία που εκφράζουν τον αριθμό των μολυβιών του Νίκου (δηλαδή της μεταβλητής x), ενώ στην στήλη Β υπολογίστηκε ο αντίστοιχος αριθμός μολυβιών του Στάθη (δηλαδή της μεταβλητής y). Επιπλέον στην γραφική παράσταση παρουσιάζονται τα σημεία με τετμημένη την τιμή που εκφράζει τον αριθμό των μολυβιών του Νίκου (δηλαδή της μεταβλητής x) και τεταγμένη την τιμή που εκφράζει τον αντίστοιχο αριθμό των μολυβιών του Στάθη (δηλαδή της μεταβλητής y).



2^{η} Εκφώνηση: «Ο Στάθης έχει τριπλάσια μολύβια από τον Νίκο…»

Επεξεργασία της παραπάνω εκφώνησης:

Αντίστοιχα με τη 1^{η} Εκφώνηση έχουμε μια σχέση ανάμεσα στα μολύβια που έχει ο Στάθης σε σχέση με αυτά του Νίκου, η οποία στην εκφώνηση εκφράζεται με τον **τριπλασιασμό**. Άρα, αφού όλες οι τιμές της μεταβλητής y είναι τριπλάσιες από τις τιμές της x έχουμε την σχέση ισότητας των δύο μεταβλητών x και y, την: **y = 3·x**.

Σύνδεση με βάση την γενικότητα – κανονικότητα ομοιότητας των δύο εκφωνήσεων:

Στις δύο παραπάνω εκφωνήσεις έχουμε την σύνδεση της ανεξάρτητης μεταβλητής με την εξαρτημένη με βάση το **πολλαπλάσιο** της μιας σε σχέση με την άλλη (στην πρώτη εκφώνηση το διπλάσιο, ενώ στην δεύτερη το τριπλάσιο). Με βάση την γενικότητα – κανονικότητα ομοιότητας των δύο εκφωνήσεων που εκφράζει το πολλαπλάσιο της εξαρτημένης μεταβλητής y σε σχέση με την ανεξάρτητη x μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια παράμετρο την οποία συμβολίζουμε έστω με α. Παρατηρούμε ότι σε αντίθεση με τις μεταβλητές, οι παραπάνω εκφωνήσεις μας έδιναν συγκεκριμένη τιμή για την παράμετρο, θεωρείται δηλαδή «σταθερή» και «γνωστή» για κάθε εκφώνηση. Η ισότητα σύνδεσης των δύο εκφωνήσεων παίρνει την μορφή **y = α·x** όπου η παράμετρος α παίρνει τις τιμές 2, 3,… ανάλογα με το αν το πολλαπλάσιο σε κάθε εκφώνηση είναι το διπλάσιο, το τριπλάσιο,… Ας σημειώσουμε ότι δεν είναι ανάγκη η παράμετρος να είναι φυσικός αριθμός όπως έχουμε στις προηγούμενες εκφωνήσεις.

Άσκηση 2:

Βρες την ισότητα που εκφράζει την γενικότητα – κανονικότητα ομοιότητας των δύο παρακάτω εκφωνήσεων:

1^{η} Εκφώνηση: «Ο Στάθης έχει διπλάσια μολύβια από τον Νίκο αυξημένα κατά 4».

2^{η} Εκφώνηση: «Ο Στάθης έχει τριπλάσια μολύβια από τον Νίκο αυξημένα κατά 5».

Εδώ θα χρειαστούμε και μια δεύτερη παράμετρο την οποία θα συμβολίσουμε έστω με β, η οποία εκφράζει το κατά πόσο είναι αυξημένη είναι η εξαρτημένη μεταβλητή y από το α·x.

Επομένως, η ισότητα σύνδεσης των δύο εκφωνήσεων παίρνει την μορφή **y = α·x+β.**

Άσκηση 3: Φτιάξε μόνος σου δύο αντίστοιχες όμοιες εκφωνήσεις και βρες την γενική μορφή ισότητας σύνδεσης των μεταβλητών που εσύ θα χρησιμοποιήσεις.

Α΄ Τάξη

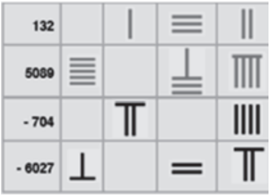
Ρητοί Αριθμοί

Επιμέλεια : Κοτσακιλάφη Ειρήνη

Οι αριθμοί αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της ανθρώπινης εξέλιξης, δεδομένου ότι χρησιμοποιήθηκαν από την αρχή της ανθρώπινης ύπαρξης για να κατανοήσουμε τον κόσμο γύρω μας και να δώσουμε λύσεις στα προβλήματα που προέκυπταν.

Ένα από τα πιο παλιά αντικείμενα που έχουν βρεθεί και χρονολογείται από το 20.000 π.Χ. είναι το κόκκαλο του Ισάνγκο που βρέθηκε στην Αφρική και στο οποίο εμφανίζονται χαρακιές με κάποιο συγκεκριμένο ίσως μοτίβο. Αποτελεί ένα πειστήριο της ύπαρξης της αρίθμησης σε αυτά τα πρώιμα χρόνια. Πολλοί λαοί της αρχαιότητας ,όπως οι Βαβυλώνιοι, οι Αιγύπτιοι, οι Κινέζοι και φυσικά οι Έλληνες γνώριζαν και ανέπτυσσαν τις έννοιες των φυσικών αριθμών, του δεκαδικού συστήματος.

Οι πρώτοι όμως που ανέφεραν την ύπαρξη των αρνητικών αριθμών είναι οι Κινέζοι οι οποίοι μάλιστα συμβόλιζαν τους αρνητικούς αριθμούς με μαύρο χρώμα και τους θετικούς με κόκκινο. Στη συνέχεια ο Διόφαντος ξεχώρισε τους θετικούς και τους αρνητικούς αριθμούς, προσπαθώντας να εξηγήσει τη λύση της εξίσωσης 4χ+20=0. Τον 7ο αιώνα μ.Χ. ένας Ινδός μαθηματικός περιέγραψε τους θετικούς αριθμούς σαν «περιουσίες» και τους αρνητικούς σαν «χρέη», θεμελιώνοντας και τις πράξεις μεταξύ αυτών.



Οι ανάγκες του εμπορίου ,αλλά και της εξέλιξης σε όλες τις επιστήμες έκαναν τους ρητούς ένα θέμα των μαθηματικών που ανακαλύφθηκε σχετικά νωρίς και από τους Πυθαγόρειους ,οι οποίοι πίστευαν ότι όλο το σύμπαν ,άρα και όλοι οι αριθμοί εκφράζονται με κλασματική μορφή $\frac{\mu}{\nu}$ με ν≠0.

Έτσι, αρκετά χρόνια αργότερα άρχισαν να χρησιμοποιούνται τα πρόσημα + και – για να ξεχωρίσουμε τους θετικούς από τους αρνητικούς ρητούς αριθμούς. Για παράδειγμα $\frac{3}{5}$, $-\frac{9}{10}$, $-4=-\frac{4}{1}$,$0.666\ldots=\frac{2}{3}$. Η ενασχόληση και η κατανόηση του αριθμητικού συστήματος αποτελεί την βάση για την εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης, την ενίσχυση της κριτικής ικανότητας αλλά και την ανάδειξη της χρήσης των αριθμών σε διάφορες άλλες επιστήμες. Ας αναφέρουμε μερικά απαραίτητα στοιχεία για τους ρητούς αριθμούς και τις πράξεις τους.

Θετικοί αριθμοί: Είναι οι αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από το μηδέν, δηλαδή αυτοί που βρίσκονται δεξιά από το μηδέν στη αριθμογραμμή, για παράδειγμα 1, 0.7, $\frac{13}{2}$ κλπ.

Αρνητικοί αριθμοί: Είναι οι αριθμοί που είναι μικρότεροι από το μηδέν, δηλαδή αυτοί που βρίσκονται αριστερά από το μηδέν στην αριθμογραμμή, για παράδειγμα –3, -3.4, $-\frac{41}{2}$ κλπ.

Μηδέν: Το μηδέν δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός.

Ομόσημοι αριθμοί: Οι αριθμοί αυτοί έχουν το ίδιο πρόσημο, δηλαδή είναι είτε και οι δύο θετικοί είτε και οι δύο αρνητικοί. Για παράδειγμα:

- +3 και +5 είναι ομόσημοι αριθμοί (και οι δύο θετικοί).
- −2 και −9 είναι ομόσημοι αριθμοί (και οι δύο αρνητικοί).

Ετερόσημοι αριθμοί: Οι αριθμοί αυτοί έχουν διαφορετικά πρόσημα, δηλαδή ο ένας είναι θετικός και ο άλλος αρνητικός. Για παράδειγμα:

- +3 και −5–είναι ετερόσημοι αριθμοί (ο ένας θετικός και ο άλλος αρνητικός).
- −2 και +9 είναι ετερόσημοι αριθμοί (ο ένας αρνητικός και ο άλλος θετικός).

Απόλυτη τιμή: Η απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού α είναι η απόσταση του αριθμού από το μηδέν και συμβολίζεται με |α|. Συνέπεια αυτού του ορισμού είναι ότι η απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού είναι πάντα θετικός αριθμός, δεδομένου ότι συμβολίζει την απόσταση από το 0.

Αντίθετοι αριθμοί: Δύο ρητοί αριθμοί λέγονται αντίθετοι αν έχουν την ίδια απόλυτη τιμή και αντίθετο πρόσημο πχ το +9 και το –9.Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν άθροισμα μηδέν

Πράξεις Ρητών

Πρόσθεση ομόσημων αριθμών: Για να προσθέσουμε δύο ή περισσότερους ομόσημους ρητούς αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το κοινό τους πρόσημο. Για παράδειγμα:

$(+5) + (+4) = +9$

$(+5) + (+6) = +11$

$(-4) + (-3) + (-5) = -12$

Πρόσθεση ετερόσημων αριθμών: Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς αφαιρούμε από την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή την μικρότερη και βάζουμε το πρόσημο, αυτού που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. Για παράδειγμα: $(+7) + (-12) = -5$

$(+5) + (-6) = -1$

$(-7) + (+13) =+ 6$

Αφαίρεση ρητών αριθμών: Για να αφαιρέσουμε από το ρητό αριθμό α το ρητό αριθμό β, προσθέτουμε στον α τον αντίθετο του β. Δηλαδή αν οι α, β είναι ρητοί αριθμοί τότε

$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$. Για παράδειγμα: $(+9) -(-7) = (+9) +(+7) =+16$

$(-11) -(+8)= (-11)+(-8)= -19$

Πολλαπλασιασμός ομόσημων αριθμών: Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «+». Για παράδειγμα: $(-1) \cdot (-2{,}2) =+2{,}2$

$(+3) \cdot (+4) =+12$

Πολλαπλασιασμός ετερόσημων αριθμών: Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «–». Για παράδειγμα: $(-2) \cdot (+3) = -6$

$(+5) \cdot (-1{,}1) = -5{,}5$

Αντίστροφοι αριθμοί: Οι ρητοί αριθμοί α και β λέγονται αντίστροφοι, όταν είναι διάφοροι του μηδενός και το γινόμενό τους είναι ίσο με τη μονάδα, δηλαδή $\alpha \cdot \beta = 1$. Για παράδειγμα:

$(+2) \cdot (+\frac{1}{2})= 1$

$(-5) \cdot (-0{,}2)=1$

Διαίρεση ομόσημων αριθμών: Για να διαιρέσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε το πρόσημο «+». Για παράδειγμα:

$(+2{,}5) : (+5)= +0{,}5$

$(-49) : (-7)= +7$

Διαίρεση ετερόσημων αριθμών: Για να διαιρέσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε το πρόσημο «–».Για παράδειγμα:

$(+3{,}5) : (-5)= -0{,}7$

$(-56) : (+8)= -7$

Πρόβλημα 1

Εκφράστε τις παρακάτω προτάσεις με τη βοήθεια των αρνητικών και των θετικών αριθμών.

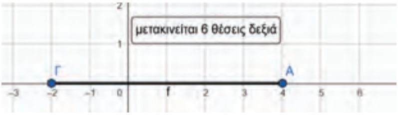
Α) Η θερμοκρασία σε μια πόλη το πρωί ήταν –2 βαθμοί Κελσίου. Το απόγευμα ανέβηκε κατά 6 βαθμούς. Ποια είναι η τελική θερμοκρασία;

Β) Σε ένα κτήριο με υπόγεια και πολλούς ορόφους ο ανελκυστήρας ήταν στον 4ο όροφο και κατέβηκε 7 ορόφους. Σε ποιον όροφο βρίσκεται τώρα;

Γ) Ένας επενδυτής είχε 1500 ευρώ. Είχε ζημία 350 ευρώ. Πόσα χρήματα έχει τώρα;

Λύση:

Α) Αφού το πρωί η θερμοκρασία ήταν –2 και ανέβηκε κατά 6 βαθμούς έχουμε με βάση τον άξονα των πραγματικών αριθμών ότι η τελική θερμοκρασία είναι 4 βαθμοί.



Β) Αφού ο ανελκυστήρας ήταν στον 4$^{\text{ο}}$ όροφο και κατέβηκε 7 ορόφους με βάση τον άξονα των πραγματικών αριθμών βρίσκεται στο –3,δηλαδή στο 3$^{\text{ο}}$ υπόγειο.

Γ) Αφού ο επενδυτής είχε 1500 ευρώ και ζημιώθηκε ,δηλαδή έχασε 350ευρώ,κάνοντας αφαίρεση βρίσκουμε ότι τώρα έχει 1500–350=1150 ευρώ

Πρόβλημα 2

Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

$$\mathbf{A}=|-6|+|13|-|-5|-2,\quad \mathbf{B}=-|-2,1|+|-4|-7,4,\quad \mathbf{\Gamma}=\left|-\frac{1}{3}\right|-\frac{3}{12}-\left|-\frac{3}{9}\right|$$

Λύση:

- Αρχικά πρέπει να υπολογίσουμε τις απόλυτες τιμές. Θυμόμαστε ότι η απόλυτη τιμή κάθε ρητού αριθμού είναι πάντα θετικός αριθμός. Δηλαδή |–6|=6 και |13|=13 |–5|=5 και |–2|=2. Επομένως έχουμε: $A=6+13-5-2$.Στη συνέχεια προσθέτω τους ομόσημους αριθμούς μεταξύ τους και έχω: $\boldsymbol{A=19-7}$.Και τέλος κάνω την αφαίρεση και το αποτέλεσμα είναι:
$$\boldsymbol{A=12}$$
- Αντίστοιχα για τη Β=$-|-2{,}1|+|-4|-7{,}4$
  Β= –2,1+4 –7,4 (βγάζω τις απόλυτες τιμές)
  Β= –2,1–7,4 +4 (προσθέτω τους ομόσημους αριθμούς και θυμάμαι ότι για να προσθέσω τους 2 αρνητικούς ομόσημους ,προσθέτω τις απόλυτες τιμές τους και βάζω στο αποτέλεσμα το μείον) Β =–9,5+4 (προσθέτω δυο ετερόσημους αριθμούς, άρα κάνω αφαίρεση του μικρότερου κατά απόλυτη τιμή από τον μεγαλύτερο και βάζω σαν πρόσημο το πρόσημο του μεγαλύτερου)
  Β=–5,5
- $\Gamma=\left|-\frac{1}{3}\right|-\frac{3}{12}-\left|-\frac{3}{9}\right|$
  $\Gamma=\frac{1}{3}-\frac{3}{12}-\frac{3}{9}$
  $\Gamma=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}$

$$\mathbf{\Gamma}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

Πρόβλημα 3

Αν x=(–7)+(+1)+(+7)+(–4) και y=(+4,5)+(–3)+(+11,5)+(–19) και z=(–2)–($-\frac{1}{2}$**)** $+(+\mathbf{0,3})-(-\mathbf{5})$ **να βρείτε τα αθροίσματα :**

Α) x+y **Β) y+z** **Γ) x +y +z**

Λύση:

Βρίσκω πρώτα τα x, y, z και στη συνέχεια βρίσκω τα αθροίσματα που ζητούνται .Όταν σε μια παράσταση έχουμε παρενθέσεις για να τις απαλείψουμε κοιτάζουμε το πρόσημο που έχει πριν την παρένθεση .Αν το πρόσημο είναι (+) , απαλείφουμε την παρένθεση και οι αριθμοί διατηρούν τα πρόσημά τους, ενώ αν το πρόσημο είναι (–) , απαλείφουμε την παρένθεση και αλλάζουμε τα

πρόσημα των αριθμών.
Επομένως έχουμε:

x=(–7)+(+1)+(+7)–(+4)
x= –7+1+7–4 (τα –7 και +7 είναι αντίθετοι αριθμοί)
x=–3

y= (+4,5)+(–3)+(+11,5)–(+19)
y=4,5+11,5–3–19
y=16–22
y= –6

$z= (-2)-(-\frac{1}{2}) + (+0{,}3) - (-5)$
$z= -2+\frac{1}{2}+0{,}3+5$
z=–2+0,5+0,3+5
z=–2+5,8
z=3,8

Α) x+y=–3+(–6)
x+y= –3 –6
x+y= –9
Β) y +z= –6+(+3,8)
y +z= –6+3,8
y +z= –2,2
Γ) x+y +z= –3+(–6)+(+3,8)
x+y+z=–3–6+3,8
x+y+z= –9+3,8
x+y+z= –5,2

Πρόβλημα 4:

Α) Μπορούν δυο ομόσημοι αριθμοί να έχουν άθροισμα μηδέν;
Β) Μπορούν δυο ετερόσημοι αριθμοί να είναι αντίστροφοι;
Γ) Μπορούν δυο αρνητικοί αριθμοί να έχουν θετικό άθροισμα;
Δ) Μπορούν 101 αρνητικοί αριθμοί να βγάλουν θετικό γινόμενο;
Ε) Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός;
ΣΤ) Οι αριθμοί α, β είναι ετερόσημοι και ο 10 είναι ομόσημος του β. Ο αριθμός α μπορεί να είναι θετικός;

Λύση:

Α) Για να έχουν 2 αριθμοί άθροισμα μηδέν πρέπει να έχουν αντίθετα πρόσημα και ίδια απόλυτη τιμή. Οι ομόσημοι αριθμοί έχουν το ίδιο πρόσημο άρα δεν μπορούν να έχουν άθροισμα μηδέν.
Β) Για να είναι δυο αριθμοί αντίστροφοι πρέπει να έχουν γινόμενο 1.Το 1 είναι θετικός αριθμός αλλά το γινόμενο ετερόσημων είναι πάντα αρνητικός αριθμός.
Γ) Όταν προσθέτω δυο αρνητικούς αριθμούς ,προσθέτω τις απόλυτες τιμές τους και κρατάω το «– »,το κοινό τους πρόσημο στο αποτέλεσμα. Άρα δεν μπορεί το άθροισμα να γίνει θετικό.
Δ) Το 101 είναι περιττός αριθμός ,άρα το πλήθος των αρνητικών όρων είναι περιττό. Επομένως, το γινόμενο περιττού πλήθους αρνητικών όρων είναι πάντα αρνητικός αριθμός.
Ε) Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι η απόστασή του από το μηδέν ,άρα είναι πάντα θετικός αριθμός. Συνεπώς, η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του και όχι ο ίδιος ο αριθμός. π.χ. |–9|=9
ΣΤ) Αφού ο 10 είναι ομόσημος του β άρα και ο β είναι θετικός. Δεδομένου ότι ο α και ο β είναι ετερόσημοι , ο α πρέπει να είναι αρνητικός και όχι θετικός.

Πρόβλημα 5:

Να συμπληρώσετε τα κενά με το κατάλληλο σύμβολο: < ,=, >

α) –4….. –9 **δ) –13 ……. 0**

β) 5 ….. –5 **ε) +|–98| …... –|100|**

γ) –2025….. –|–2025| **στ) –(–2–12) ……3^2**

Λύση:

α) –4 > –9 **δ)** –13 < 0

β) 5 > –5 **ε)** +|–98| > –|100|

γ) –2025 = –|–2025| **στ)** –(–2–12) > 3^2

Πρόβλημα 6:

Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων:

$$\boldsymbol{A=\frac{-3+\frac{3}{4}-\frac{5}{2}}{-3\cdot\left(5-\frac{1}{2}\right)}}$$

$$\boldsymbol{B=\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{12}{11}\right)-\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{5}-\frac{9}{10}\right)}$$

$$\boldsymbol{\Gamma=\frac{[(-10)-(-3)]:(-1)+(-3)-(-4)}{(-6):(-2)-(-7)(-1)}}$$

$$\boldsymbol{\Delta=(-28:14-2)-[-7-(-6):(-2)]+39:3\cdot(-13)}$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα που βρήκατε να υπολογίσετε την τιμή της παρακάτω παράστασης: $\mathbf{K=2\cdot A-\Delta+\left[\frac{A}{\Delta}-(3\cdot\Gamma-\Delta)\right]^{B}}$

Λύση:

$$A=\frac{-3+\frac{3}{4}-\frac{5}{2}}{-3\cdot\left(5-\frac{1}{2}\right)}$$

$$A=\frac{-\frac{12}{4}+\frac{3}{4}-\frac{10}{4}}{-3\cdot\left(\frac{10}{2}-\frac{1}{2}\right)}$$ Κάνω ομώνυμα τα κλάσματα για να κάνω τις πράξεις

$$A=\frac{-\frac{19}{4}}{-3\cdot\frac{9}{2}}$$ Στον αριθμητή κάνω πρόσθεση ρητών αριθμών και στον παρονομαστή την πρόσθεση μέσα στην παρένθεση

$$A=\frac{-\frac{19}{4}}{-\frac{27}{2}}$$ Κάνω τον πολλαπλασιασμό στον παρονομαστή

$$A=\frac{19\cdot 2}{27\cdot 4}$$ Κάνω το σύνθετο κλάσμα απλό

$$A=\frac{38}{27\cdot 4}$$ Κάνω απλοποιήσεις

$$A=\frac{19}{27\cdot 2}$$

$$A=\frac{19}{54}$$

$$B=\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{12}{11}\right)-\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{5}-\frac{9}{10}\right)$$

$$B=\left(-\frac{9}{12}+\frac{2}{12}-\frac{4}{12}\right)\cdot\left(-\frac{12}{11}\right)-\left(\frac{25}{10}-\frac{6}{10}-\frac{9}{10}\right)$$ Κάνω ομώνυμα τα κλάσματα στις 2 παρενθέσεις

$$B=\left(-\frac{13}{12}+\frac{2}{12}\right)\cdot\left(-\frac{12}{11}\right)-\left(\frac{25}{10}-\frac{15}{10}\right)$$ Κάνω προσθέσεις ομόσημων ρητών και στις δυο παρενθέσεις

$$B=\left(-\frac{11}{12}\right)\cdot\left(-\frac{12}{11}\right)-\frac{10}{10}$$ Κάνω τις προσθέσεις ετερόσημων ρητών στις 2 παρενθέσεις

$$B=1-\frac{10}{10}$$ Κάνω τον πολλαπλασιασμό, οι αριθμοί είναι αντίστροφοι

$$B=1-1$$

$$B=0$$

$$\Gamma=\frac{[(-10)-(-3)]:(-1)+(-3)-(-4)}{(-6):(-2)-(-7)(-1)}$$

$\Gamma = \frac{(-10+3):(-1)+(-3)-(-4)}{3-7}$ Κάνω τις πράξεις μέσα στην παρένθεση στον αριθμητή και την διαίρεση και τον πολλαπλασιασμό στον παρονομαστή

$\Gamma = \frac{(-7):(-1)+(-3)-(-4)}{-4}$

$\Gamma = \frac{7+(-3)-(-4)}{-4}$ Κάνω τη διαίρεση στον αριθμητή

$\Gamma = \frac{7-3+4}{-4}$ Βγάζω τις παρενθέσεις

$\Gamma = \frac{11-3}{-4}$ Κάνω πρόσθεση ομόσημων

$\Gamma = \frac{8}{-4}$ Κάνω τη διαίρεση των ετερόσημων

$\Gamma = -2$

$\Delta = (-28:14-2) - [-7-(-6):(-2)] + 39:3\cdot(-13)$

$\Delta = (-2-2) - [-7-3] + 13\cdot(-13)$ Κάνω πρώτα τις διαιρέσεις

$\Delta = (-4) - (-10) - 13{,}13$ Κάνω τον πολλαπλασιασμό και τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις

$\Delta = -4 + 10 - 169$ Βγάζω τις παρενθέσεις

$\Delta = 10 - 173$

$\Delta = -163$

$K = 2\cdot A - \Delta + \left[\frac{A}{\Delta} - (3\cdot\Gamma - \Delta)\right]^{B}$

$K = 2\cdot\frac{19}{54} - 5 + \left[\frac{\frac{19}{54}}{5} - (3\cdot(-2) - 5)\right]^{0}$ Θυμάμαι ότι $\alpha^0=1$

$K = \frac{19}{27} - 5 + 1$

$K = \frac{19}{27} - 4$

$K = \frac{19}{27} - \frac{4.27}{27}$

$K = -\frac{89}{27}$

Πρόβλημα 7:

Δοκιμάστε να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	β	γ	α–β	γ·α–β·α	γ·β–α
–4	**–2**	**3**			
–5	**3**	**–1**			
–7,2	**–4**	**–10**			
$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{8}{5}$			

Μπορείτε να εξασκηθείτε με τα επόμενα παιχνίδια, είτε σκανάροντας τα qrcode, είτε πατώντας το link.

Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί
https://wordwall.net/resource/84805353

Πράξεις ρητών Αριθμών
https://wordwall.net/resource/84805979

Β΄ Τάξη Εμβαδά Κανονικών Πολυγώνων και Κυκλικού δίσκου

Αρδαβάνη Καλλιόπη - Μάλλιαρης Χρήστος

Οι μαθητές της Β΄ τάξης ενός σχολείου βρήκαν ένα κορδόνι μήκους **180cm**, κατά τη διάρκεια ενός σχολικού περιπάτου και αποφάσισαν να ¨παίξουν¨ με αυτό. Κάθε ένας μαθητής/ μαθήτρια σχημάτισε με αυτό ένα γεωμετρικό σχήμα, το αποτύπωσαν γεωμετρικά σε κόλλα χαρτιού, δημιούργησαν ερωτήσεις και μετά αντάλλαξαν τα σχήματα για να βρουν οι συμμαθητές τους τις απαντήσεις.

Αν σας αρέσει η ιδέα που είχανε δοκιμάστε να φτιάξετε εσείς τα δικά σας σχήματα με ερωτήσεις και τις απαντήσεις τους. Μπορεί να έχετε την ίδια ιδέα με κάποιον από τους μαθητές … μπορεί να έχετε μία διαφορετική ίσως και πρωτότυπη!

Το κορδόνι λοιπόν που βρήκαν οι μαθητές είναι **180cm = 18dm**

- Ο Δημήτρης τύλιξε με αυτό έναν κορμό δέντρου που ήταν στην αυλή του σχολείου του ακριβώς 3 φορές και ρωτούσε πόση είναι η περίμετρος του κορμού του δέντρου, η ακτίνα και το εμβαδόν μίας οριζόντιας τομής του κορμού του.***(Απ: L=6dm, $r=\frac{3}{\pi}$ dm, $E=\frac{9}{\pi}$ dm^2)***
- Η Στεφανία σχημάτισε με αυτό έναν μεγάλο κύκλο και ρωτούσε την ακτίνα και το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.***(Απ: $R=\frac{9}{\pi}$ dm, $E_1=\frac{81}{\pi}$ dm^2)***
- Η Καλλιόπη σχημάτισε ένα τετράγωνο και ρωτούσε την πλευρά, το εμβαδόν του και την ακτίνα του περιγγεγραμμένου σε αυτό κύκλου. ***(Απ: $\lambda_4=\frac{9}{2}$dm, $E_4=\frac{81}{4}$ dm2 $R_4=\frac{9\sqrt{2}}{4}$ dm)***
- Η Αριάδνη σχημάτισε ένα ισόπλευρο τρίγωνο και ρωτούσε την πλευρά, το εμβαδόν του και την ακτίνα του περιγγεγραμμένου σε αυτό κύκλου.

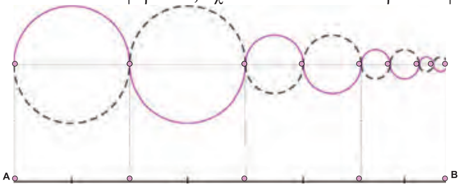
  (Απ: λ_3=6dm $E_3=9\sqrt{3}$ dm^2, $R_3=2\sqrt{3}$ dm)
- Ο Σάββας σχημάτισε ένα κανονικό εξάγωνο και ρωτούσε την πλευρά, το εμβαδόν του καθώς και την ακτίνα του περιγγεγραμμένου σε αυτό κύκλου.

  (Απ: λ_6 =3 dm, $E_6=\frac{27\sqrt{3}}{2}$ dm2, R_6=3 dm)

Ας δούμε κάποιες από τις παραπάνω κατασκευές των μαθητών:



- Η Ελισάβετ έκανε κάτι διαφορετικό, σχεδίασε ένα «διπλό» πράσινο φίδι κάπως έτσι



και ρωτούσε πόσο είναι το μήκος του τμήματος ΑΒ; ***(Απ: ΑΒ= $\frac{18}{\pi}$ dm)***

Όταν απαντήθηκαν τα παραπάνω ερωτήματα οι μαθητές έθεσαν νέους προβληματισμούς – ερωτήματα για εσάς τους αναγνώστες:

➢ Τα γεωμετρικά σχήματα που σχεδιάστηκαν είχαν ίσες περιμέτρους, όμως τα Εμβαδά τους δεν ήταν ίσα. Ποιο από αυτά είχε το μεγαλύτερο εμβαδό;

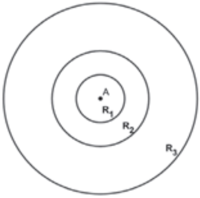
- Άραγε υπάρχει γεωμετρικό σχήμα με περίμετρο 18dm και εμβαδό μεγαλύτερο από τα εμβαδά των σχημάτων που δημιούργησαν και αν ναι ποιο είναι αυτό;
- Υπάρχει κάποια τιμή εμβαδού που δεν μπορεί να υπερβεί οποιοδήποτε κανονικό ν-γωνο με περίμετρο α και αν ναι ποια είναι αυτή;

Βοηθητικά *εργαστείτε με το αρχείο Geogebra:* https://www.geogebra.org/m/z3b5zgb8

Οι μαθητές διασκέδασαν με τις δημιουργίες τους εσείς;

Άσκηση 1:

Μετρήσαμε τις ακτίνες μερικών κύκλων σε μια οριζόντια τομή κορμού ενός δέντρου και βρήκαμε τα εξής: R_1=1cm, R_2=2cm, R_3=4cm

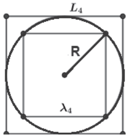


- Να βρείτε την περίμετρο και την επιφάνεια των αντίστοιχων κυκλικών δίσκων και να τα συγκρίνετε.
  (Απ: $L_1=2\pi$, $L_2=4\pi$, $L_3=8\pi$, $E_1=\pi$, $E_2=4\pi$, $E_3=16\pi$)
- Μπορείτε να διατυπώσετε έναν κανόνα που να περιγράφει τη σχέση των περιμέτρων των δύο κύκλων και τη σχέση των εμβαδών των δύο κυκλικών δίσκων, όταν R_1=α και R_2=να;
  (Απ: $L_1=2\pi\alpha$, $E_1=\pi\alpha^2$, $L_2=2\pi\nu\alpha$, $E_2=\pi\nu^2\alpha^2$)

Άσκηση 2:

Το τετράγωνο πλευράς λ_4 είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R=10cm και ο κύκλος αυτός είναι εγγεγραμμένος σε τετράγωνο πλευράς L_4. Να υπολογίσετε την πλευρά λ_4 και L_4 του μικρού και του μεγάλου τετραγώνου αντίστοιχα.

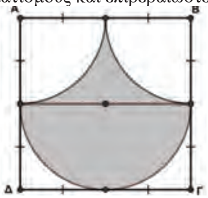
(Απ: $\boldsymbol{\lambda_4 = R\sqrt{2} = 10\sqrt{2}}$ ***και*** $\boldsymbol{L_4 = 2R = 20cm}$ ***)***



Άσκηση 3:

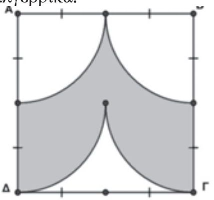
Τα παρακάτω τετράγωνα έχουν πλευρά α.

→ Δοκιμάστε να βρείτε τα εμβαδά των γραμμοσκιασμένων χωρίων με κατάλληλους μετασχηματισμούς και επιβεβαιώστε τις απαντήσεις σας αλγεβρικά.



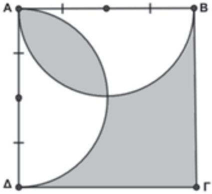
Σχήμα 1

(Απ: $\frac{\alpha^2}{2}$***)***



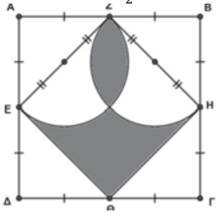
Σχήμα 2

(Απ: $\frac{\alpha^2}{2}$***)***



Σχήμα 3

(Απ: $\frac{\alpha^2}{2}$***)***



Σχήμα 4

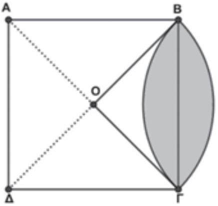
(Απ: $\frac{\alpha^2}{4}$***)***

Ο Χρήστος διαπίστωσε ότι τα 3 πρώτα γραμμοσκιασμένα σχήματα έχουν ίσα εμβαδά, ενώ το 4ο γραμμοσκιασμένο έχει το μισό καθενός από τα τρία προηγούμενα.
→Συμφωνείτε με τους υπολογισμούς του Χρήστου; ***Βοηθητικά*** μπορείτε να *χρησιμοποιήσετε το αρχείο Geogebra:* *https://www.geogebra.org/m/wt3ek77y*

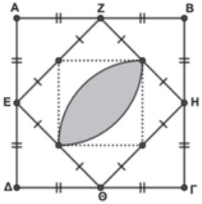
Άσκηση 4:

Το τετράγωνο ΑΒΓΔ στο σχήμα 5 έχει πλευρά α, ενώ το τετράγωνο ΑΒΓΔ στο σχήμα 6 έχει πλευρά $\alpha\sqrt{2}$. Η Έφη ισχυρίζεται ότι τα γραμμοσκιασμένα χωρία έχουν άνισα εμβαδά, με αυτό στο σχήμα 5 να είναι μεγαλύτερο από αυτό στο σχήμα 6.

→ Συμφωνείτε με τους υπολογισμούς της Έφης;



Σχήμα 5



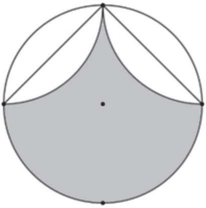
Σχήμα 6

(Απ: Είναι ίσα με $\frac{\alpha^2}{4}(\pi-2)$ ***)***

Άσκηση 5:

Ο κύκλος έχει ακτίνα α. Τα κυκλικά τμήματα του σχήματος είναι συμμετρικά ως προς την αντίστοιχη χορδή τους.
→Να βρείτε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

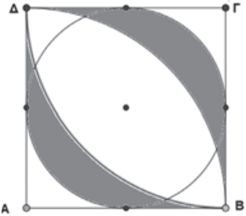
(Απ: $2\alpha^2$ ***)***



Άσκηση 6:

Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά α.
→Να περιγράψετε την κατασκευή του σχήματος.
→Να βρείτε το συνολικό εμβαδόν των γραμμοσκιασμένων χωρίων.

(Απ: $\frac{12\alpha^2-3\pi\alpha^2}{8}$***)***



*****Προσοχή: Τα παραπάνω σχήματα είναι σχεδιασμένα χωρίς κλίμακα.***

Β΄ Τάξη

Η Στατιστική μέσα από παραδείγματα γραφικών παραστάσεων.

Δημήτρης Διαμαντίδης

Η Στατιστική

Η Στατιστική έχει ως αντικείμενο την συλλογή και επεξεργασία δεδομένων, σε σχέση με κάποιο ερώτημα, που σκοπεύουμε να απαντήσουμε, το λεγόμενο «ερευνητικό ερώτημα». Στόχος είναι να μπορούμε να αξιοποιήσουμε τα δεδομένα, να τα παρουσιάσουμε αποτελεσματικά και να μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα από αυτά, προσπαθώντας να απαντήσουμε κατά το δυνατόν το ερώτημα αυτό.

Η αποτελεσματική παρουσίαση των δεδομένων συχνά συμπεριλαμβάνει συνοπτικούς τρόπους, όπως γραφικές παραστάσεις, που ταυτόχρονα να δίνουν σε όποιον ή όποια τα παρατηρήσει την ευκαιρία να αντλήσει σημαντικές, σχετικές πληροφορίες, με την απάντηση του ερωτήματος, ακόμα και με μια ματιά.

Επομένως, οι γραφικές παραστάσεις όχι μόνο μας βοηθούν να απαντήσουμε το ερευνητικό ερώτημα, αλλά και να παρουσιάσουμε με μεγαλύτερη πληρότητα την απάντησή μας.

Ραβδόγραμμα

Θέλουμε να απαντήσουμε στο ερώτημα: «Ποιο άθλημα προτιμούν οι μαθητές και οι μαθήτριες του σχολείου μας;». Η απάντησή μας θέλουμε να είναι πλήρης, εύληπτη και κατανοητή, για κάποιον που θα τη διαβάσει, τον οποίο ας ονομάσουμε «αναγνώστη».

Συλλέγοντας τις απαντήσεις όλων των παιδιών του σχολείου σίγουρα μπορούμε να βρούμε ποιο είναι το δημοφιλέστερο άθλημα και να απαντήσουμε στο παραπάνω ερώτημα μονολεκτικά. Ωστόσο, μια πιο αναλυτική παρουσίαση των απαντήσεων μπορεί να δώσει στον αναγνώστη πληρέστερη εικόνα για την κατάσταση.

Για παράδειγμα, είναι τελείως διαφορετική η κατάσταση στο σχολείο για το δημοφιλέστερο άθλημα:

- αν αυτό συγκεντρώνει τη συντριπτική πλειοψηφία των απαντήσεων και
- αν ένα άθλημα πλειοψηφεί, ωστόσο υπάρχουν και άλλα αθλήματα με υψηλή δημοφιλία, μεταξύ των παιδιών.

Ποια θα ήταν η διαφορά μεταξύ των δύο καταστάσεων;

Λόγου χάρη, η παραπάνω διαφορά θα μπορούσε να επηρεάσει τις αποφάσεις για τον προγραμματισμό των αθλητικών δραστηριοτήτων του σχολείου, την ημέρα σχολικού αθλητισμού.

Στις επόμενες γραμμές θα παρουσιάσουμε τις απαντήσεις που δόθηκαν στο σχολείο Α, με την παρακάτω γραφική παράσταση, η οποία ονομάζεται **ραβδόγραμμα**:

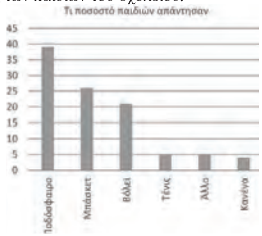
Αν παρουσιάσουμε στον αναγνώστη το παραπάνω ραβδόγραμμα, μερικές πληροφορίες που εκείνος μπορεί να αντλήσει από αυτό είναι ότι:

- Το ποδόσφαιρο είναι το πιο δημοφιλές άθλημα, στο σχολείο και ακολουθούν μπάσκετ και βόλεϊ.
- Τα παιδιά που προτιμούν το ποδόσφαιρο είναι λίγο λιγότερα από 80, όσα προτιμούν μπάσκετ είναι λίγο περισσότερα από 50, εκείνα που απάντησαν «βόλεϊ» είναι λίγο περισσότερα από 40, ενώ τένις είπαν ακριβώς 10. Επίσης, 10 παιδιά απάντησαν άλλα αθλήματα, ενώ λίγο λιγότερα από 10 παιδιά δεν προτιμούν κανένα άθλημα.

Στις ίδιες απαντήσεις, του ίδιου σχολείου αντιστοιχεί και το επόμενο ραβδόγραμμα. Η διαφορά του με το προηγούμενο είναι ότι παρουσιάζεται το ποσοστό των παιδιών που έδωσαν κάθε απάντηση.

Ο αναγνώστης, ανάμεσα σε άλλα μπορεί να παρατηρήσει ότι την απάντηση «ποδόσφαιρο» έδωσαν λίγο λιγότερα από το 40% των παιδιών, την απάντηση «μπάσκετ» έδωσαν λίγο περισσότερα από το 25%, βόλεϊ είπαν λίγο περισσότερα παιδιά από το 20% των παιδιών του σχολείου. Τένις απάντησαν 5% των παιδιών, όπως και «άλλο άθλημα». Λιγότερα παιδιά από το 4% απάντησαν «κανένα».

Επίσης, συνδυάζοντας τα δύο ραβδογράμματα μπορεί κανείς να υπολογίσει το πλήθος των παιδιών του σχολείου: Εφόσον τένις απάντησε το 5% των παιδιών και αυτό αντιστοιχεί σε 10 παιδιά, το 100% των παιδιών αντιστοιχεί σε $20 \cdot 10 = 200$ παιδιά, που είναι και το πλήθος των παιδιών του σχολείου.



Ας σημειώσουμε ότι, αν η βαθμονόμηση του κατακόρυφου άξονα, στα παραπάνω ραβδογράμματα, γινόταν ανά 1 και όχι ανά 5, τότε θα είχαμε τη δυνατότητα να διαβάσουμε το ακριβές πλήθος των μαθητών και μαθητριών που έδωσαν την κάθε απάντηση. Ωστόσο, η πληροφορία που παίρνουμε «με μια ματιά» είναι επαρκής, για να απαντήσουμε στο ερευνητικό ερώτημα και με αυτή τη μορφή των ραβδογραμμάτων.

Κυκλικό διάγραμμα

Ένας άλλος τρόπος να παρουσιάσουμε τα δεδομένα που συλλέξαμε, από τις απαντήσεις των παιδιών είναι με το παρακάτω **κυκλικό διάγραμμα**, ή αλλιώς **διάγραμμα-πίτα**.

Ας υποθέσουμε ότι κάποιος βλέπει το κυκλικό διάγραμμα, χωρίς να έχει δει τα προηγούμενα ραβδογράμματα και χωρίς να γνωρίζει κάτι άλλο για τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί.

Στο σχολείο Α

Παρατηρώντας αυτή τη γραφική παράσταση μπορεί να συγκρίνει τις «φέτες» μεταξύ τους, οπτικά και να συμπεράνει ότι:

- Υπάρχουν δύο κατηγορίες απαντήσεων, όσο αφορά το μέγεθός τους. Το ποδόσφαιρο, το μπάσκετ και το βόλεϊ αντιστοιχούν σε σχετικά μεγαλύτερες φέτες, από τις απαντήσεις «τένις», «άλλο» και «κανένα».
- Όσο αφορά την πρώτη κατηγορία, δηλαδή αυτή με τις μεγάλες φέτες, το μπάσκετ είναι δεύτερο σε προτιμήσεις με αρκετά μεγάλη διαφορά από το ποδόσφαιρο, ενώ το βόλεϊ είναι τρίτο με μικρή διαφορά από το μπάσκετ.

- Στη δεύτερη κατηγορία απαντήσεων, υπάρχουν τρεις φέτες που μοιάζουν περίπου ίσες, ενώ φαίνεται λίγο μικρότερη η φέτα που αντιστοιχεί στην απάντηση «κανένα».

Παρακάτω ακολουθούν δύο κυκλικά διαγράμματα για το ίδιο ερώτημα, το οποίο έγινε και σε δύο άλλα σχολεία, το Β και το Γ.

Και στο Β, αλλά και στο Γ δόθηκαν από τα παιδιά οι ίδιες απαντήσεις, δηλαδή «ποδόσφαιρο», «μπάσκετ», «βόλεϊ», «τένις», «άλλο άθλημα» και «κανένα άθλημα». Ωστόσο, το πλήθος των παιδιών για κάθε απάντηση είναι διαφορετικό σε κάθε σχολείο.

Στο σχολείο Β

Στο σχολείο Γ

Συγκρίνοντας τα κυκλικά διαγράμματα, για τα τρία σχολεία, ο αναγνώστης μπορεί να παρατηρήσει ότι:

- Και στα τρία σχολεία η δημοφιλέστερη απάντηση μεταξύ των παιδιών είναι «ποδόσφαιρο».
- Στο σχολείο Β η απάντηση έχει μεγάλη διαφορά από τις υπόλοιπες. Αντιστοιχεί **σχεδόν** στα $\frac{3}{4}$ των απαντήσεων, δηλαδή στο 75%.
- Στο σχολείο Α, το ποδόσφαιρο έχει μικρότερη, αλλά διακριτή διαφορά από τις υπόλοιπες απαντήσεις. Ωστόσο και οι απαντήσεις «μπάσκετ» και «βόλεϊ» έχουν συγκεντρώσει αξιοσημείωτο πλήθος προτιμήσεων.
- Στο σχολείο Γ, αν και το ποδόσφαιρο πλειοψηφεί υπάρχουν πέντε απαντήσεις με κοντινό πλήθος προτιμήσεων, όπως φαίνεται από τις φέτες. Ανάμεσα σε αυτές είναι και η δημοφιλέστερη απάντηση «ποδόσφαιρο»: οι υπόλοιπες απαντήσεις είναι «μπάσκετ», «βόλεϊ», «τένις» και «άλλο άθλημα».

Στη δεύτερη παρατήρηση, από τις παραπάνω χρησιμοποιήσαμε τη λέξη «σχεδόν», αν και η φέτα φαίνεται να αντιστοιχεί στα $\frac{3}{4}$ του κύκλου. Στην πραγματικότητα η φέτα μπορεί να διαφοροποιείται ελάχιστα από τα $\frac{3}{4}$. Π.χ. αν το πλήθος των παιδιών του σχολείου είναι 200, ενδέχεται την απάντηση να έχουν δώσει 151 από 200 παιδιά. Αυτό αντιστοιχεί σε $\frac{151}{200} > \frac{3}{4}$ ή σε μορφή ποσοστού σε 75,5% του πλήθους των παιδιών του σχολείου. Αυτή η μικρή απόκλιση από τα $\frac{3}{4}$ ή από το 75% μπορεί να μην είναι ορατή από τον αναγνώστη, στο κυκλικό διάγραμμα. Ταυτόχρονα δεν επηρεάζει την ουσία, ως προς την προσπάθειά μας να απαντήσουμε το ερευνητικό ερώτημα.

Ο αναγνώστης μπορεί να φτάσει σε περαιτέρω συμπεράσματα, αν δει τα ραβδογράμματα για τα σχολεία Β και Γ.

Επιστρέφοντας, λοιπόν, στο ερώτημα, μπορεί κανείς να απαντήσει ότι και στα τρία σχολεία το άθλημα που προτιμούν οι μαθητές και οι μαθήτριες είναι το ποδόσφαιρο. Όμως μια τέτοια μονολεκτική απάντηση, «κρύβει» από τον αναγνώστη αρκετές πληροφορίες και διαφορές μεταξύ των σχολείων, που είναι ορατές στις παραπάνω γραφικές παραστάσεις και που αναφέραμε προηγουμένως. Συνεπώς, η απάντηση είναι πληρέστερη αν συνοδευτεί από την παρουσίαση κάποιων από αυτές τις παραστάσεις, π.χ. από τα κυκλικά διαγράμματα και για τα τρία σχολεία. Έτσι, μπορεί κανείς να απαντήσει στο ερευνητικό ερώτημα και για τα τρία σχολεία με έναν τρόπο πλήρη και εύληπτο, καθώς ο αναγνώστης δεν βλέπει μόνο ποια είναι η δημοφιλέστερη απάντηση σε κάθε σχολείο, αλλά και «πόσο δημοφιλέστερη» είναι, έχοντας τη δυνατότητα να συγκρίνει τη δημοφιλία μεταξύ όλων των απαντήσεων κάθε σχολείου.

Επίσης, ο αναγνώστης μπορεί να κάνει εύκολα, μόνο με τις πληροφορίες που παίρνει από τις γραφικές παραστάσεις, χωρίς περαιτέρω υπολογισμούς, συγκρίσεις μεταξύ των τριών σχολείων όσο αφορά τις απαντήσεις των παιδιών. Αυτό είναι κάτι που τίθεται ευθέως από το ερευνητικό ερώτημα, ωστόσο ο σχετικός προβληματισμός και η ιδέα προκύπτει από τις απαντήσεις.

Παρακάτω παρουσιάζουμε τα δεδομένα, για κάθε σχολείο, από τα οποία προέκυψαν οι παραπάνω γραφικές παραστάσεις. Ωστόσο, στην απάντηση προς τον αναγνώστη αρκεί η παρουσίαση των γραφικών παραστάσεων, ώστε να είναι συνοπτική και τα συμπεράσματα να βγαίνουν με μια ματιά.

Σχολείο Α

Άθλημα	Πόσα παιδιά απάντησαν	Τι ποσοστό παιδιών απάντησαν
Ποδόσφαιρο	78	39
Μπάσκετ	52	26
Βόλεϊ	42	21
Τένις	10	5
Άλλο	10	5
Κανένα	8	4

Σχολείο Β

Άθλημα	Πόσα παιδιά απάντησαν	Τι ποσοστό παιδιών απάντησαν
Ποδόσφαιρο	150	75
Μπάσκετ	20	10
Βόλεϊ	12	6
Τένις	4	2
Άλλο	6	3
Κανένα	8	4

Σχολείο Γ

Άθλημα	Πόσα παιδιά απάντησαν	Τι ποσοστό παιδιών απάντησαν
Ποδόσφαιρο	50	25
Μπάσκετ	34	17
Βόλεϊ	36	18
Τένις	32	16
Άλλο	40	20
Κανένα	8	4

Είναι τα συμπεράσματα που βγαίνουν από τις γραφικές παραστάσεις συνεπή με τα συμπεράσματα που βγαίνουν από τα αριθμητικά δεδομένα που παρουσιάζονται στους πίνακες;

Ιστόγραμμα

Με βάση την απάντηση στο παραπάνω ερευνητικό ερώτημα, όσο αφορά τα σχολεία Α, Β και Γ, γεννήθηκε ένα νέο ερώτημα: «Πόσες ώρες έπαιξαν ποδόσφαιρο τα παιδιά από κάθε σχολείο, τις τελευταίες τρεις εβδομάδες;»

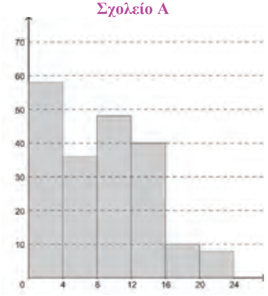
Για να το απαντήσουμε συλλέξαμε εκ νέου δεδομένα από όλα τα παιδιά κάθε σχολείου. Οι απαντήσεις παρουσιάζονται παρακάτω με τη μορφή **ιστογραμμάτων**, ένα ιστόγραμμα για κάθε σχολείο.

Για κάθε ιστόγραμμα, οι απαντήσεις των παιδιών χωρίζονται σε **κλάσεις**, που παριστάνονται στον οριζόντιο άξονα. Η πρώτη κλάση $0-4$ περιέχει τις απαντήσεις από 0 έως λιγότερες από 4 ώρες (π.χ. 3 ώρες και 55 λεπτά). Η δεύτερη κλάση $4-8$ περιέχει τις απαντήσεις από 4 έως λιγότερες από 8 ώρες και ομοίως οι υπόλοιπες κλάσεις. Για παράδειγμα, αν ένας μαθητής απάντησε «20 ώρες», τότε αυτή η απάντηση ανήκει στην κλάση $20-24$ και όχι στην $16-20$.

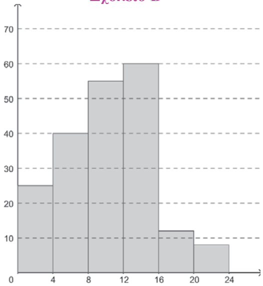
Σε κάθε κλάση αντιστοιχεί ένα από τα ορθογώνια του ιστογράμματος. Όλα τα ορθογώνια έχουν ίσες βάσεις (πλάτους 4), ενώ το ύψος κάθε ορθογωνίου αντιστοιχεί στον πλήθος των απαντήσεων αυτής της κλάσης.

Για παράδειγμα, στο σχολείο Α η κλάση $16-20$ έχει ύψος 10. Αυτό σημαίνει ότι 10 παιδιά του σχολείου Α έδωσαν απαντήσεις από 16 ώρες έως λιγότερες από 20 ώρες.

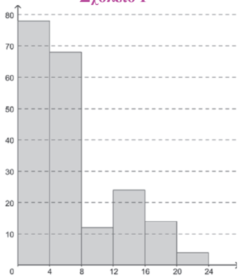
Σχολείο Α



Σχολείο Β



Σχολείο Γ



Για να δώσουμε στον αναγνώστη μια ολοκληρωμένη απάντηση στο ερώτημα αξιοποιώντας τα ιστογράμματα, ας σκεφτούμε τα εξής:

- Οι δύο κλάσεις που αντιστοιχούν σε λίγες ώρες ποδοσφαίρου είναι οι $0-4$ και $4-8$.
- Οι δύο κλάσεις με ενδιάμεσες ώρες ποδοσφαίρου είναι οι $8-12$ και $12-16$.
- Οι δύο κλάσεις με πολλές ώρες ποδοσφαίρου είναι οι $16-20$ και $20-24$.

Όπως βλέπουμε:

- Στο σχολείο Α, οι κλάσεις $0-4$ και $8-12$ αντιστοιχούν στα πιο ψηλά ορθογώνια. Ακολουθούν με σχετικά ψηλά ορθογώνια οι κλάσεις $12-16$ και $4-8$.
- Στο σχολείο Β, οι κλάσεις $8-12$ και $12-16$, δηλαδή οι δύο κλάσεις με ενδιάμεσες ώρες ποδοσφαίρου είναι οι πιο ψηλές και ακολουθεί η κλάση $4-8$.
- Στο σχολείο Γ, οι κλάσεις $0-4$ και $4-8$, δηλαδή οι δύο κλάσεις με λίγες ώρες ποδοσφαίρου είναι αρκετά ψηλότερες από τις υπόλοιπες.

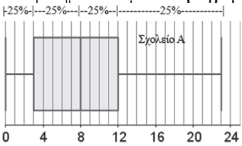
Αυτό που θα μπορούσαμε να πούμε είναι ότι στο σχολείο Α, οι απαντήσεις των περισσότερων παιδιών συγκεντρώνονται στις κλάσεις με λίγες και ενδιάμεσες ώρες ποδοσφαίρου. Στο σχολείο Β οι περισσότερες απαντήσεις είναι συγκεντρωμένες κυρίως στις ενδιάμεσες ώρες και στην κλάση $4-8$. Στο σχολείο Γ οι περισσότερες απαντήσεις συγκεντρώνονται στις λίγες ώρες ποδοσφαίρου, με αρκετή διαφορά από τις απαντήσεις που αντιστοιχούν σε ενδιάμεσες ή σε πολλές ώρες ποδοσφαίρου. Επίσης, σε όλα τα σχολεία, οι απαντήσεις που αντιστοιχούν σε πολλές ώρες (κλάσεις $16-20$ και $20-24$) είναι σχετικά λίγες.

Εσείς πώς θα απαντούσατε στο ερευνητικό ερώτημα, με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις;

Επίσης, παρατηρώντας συνδυαστικά τα κυκλικά διαγράμματα του πρώτου ερωτήματος και τα ιστογράμματα του δεύτερου ερωτήματος, υπάρχει κάτι που επισημαίνετε; Υπάρχει κάποιο νέο ερευνητικό ερώτημα που σας γεννιέται;

Θηκογράμματα

Ένας άλλος τρόπος να παρουσιάσουμε τις απαντήσεις στο τελευταίο ερευνητικό ερώτημα είναι με τα **θηκογράμματα** που ακολουθούν. Στα θηκογράμματα φαίνεται κατά πόσο διασπαρμένες είναι οι απαντήσεις των μαθητών και

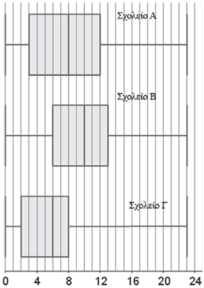


μαθητριών κάθε σχολείου, χωρισμένες σε τέσσερα μέρη, από τις μικρότερες στις μεγαλύτερες. Το κάθε μέρος αντιστοιχεί περίπου στο 25% των απαντήσεων.

Όπως βλέπουμε παραπάνω, στο σχολείο Α:

- Περίπου το 25% των μικρότερων απαντήσεων είναι από 0 έως 3 ώρες,
- το επόμενο περίπου 25% είναι από 3 έως 8 ώρες, άρα περίπου το 50% των μικρότερων απαντήσεων είναι από 0 έως 8 ώρες.
- Ακολουθούν οι απαντήσεις από 8 έως 12 ώρες, που είναι το επόμενο περίπου 25% των απαντήσεων,
- ενώ το μεγαλύτερο περίπου 25% των απαντήσεων είναι από 12 έως 24, άρα οι μεγαλύτερες απαντήσεις είναι αρκετά διεσπαρμένες.

Στην παρακάτω εικόνα βλέπουμε μαζί τα θηκογράμματα και για τα τρία σχολεία.



Από αυτά, ανάμεσα σε άλλα παρατηρούμε ότι το εύρος των απαντήσεων σε όλα τα σχολεία είναι από 0 έως 24 ώρες. Οι απαντήσεις στο σχολείο Β είναι περισσότερο συγκεντρωμένες «στη μέση»: η βάση του ορθογωνίου που αντιπροσωπεύει στο κεντρικό 25%+25%=50% των απαντήσεων εκτείνεται από τις 6 έως τις 13 ώρες. Αυτό το συγκρίνουμε, για παράδειγμα, με το σχολείο Γ που το αντίστοιχο ορθογώνιο είναι από τις 2 έως τις 8 ώρες, δηλαδή πιο κοντά στο 0. Παρατηρώντας εσείς τα τρία θηκογράμματα τι άλλο θα σχολιάζατε;

Γ΄ Τάξη

Τριγωνομετρία

Θανάσης Π. Χριστόπουλος

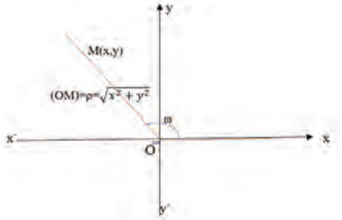
Στην τριγωνομετρία της Β΄ Γυμνασίου μάθαμε για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών που είναι οξείες γωνίες σε ορθογώνιο τρίγωνο, δηλαδή για γωνίες από 0 έως 90 μοίρες.

Στη **Γ΄ Γυμνασίου** θα ορίσουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς για γωνίες από 0 έως 360 μοίρες.

Αλήθεια πως θα ορίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας αμβλείας γωνίας;

Έστω μια αμβλεία γωνία ω. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy, τοποθετούμε την κορυφή της γωνίας στην αρχή των αξόνων, O και μια πλευρά της στον ημιάξονα Ox και η δεύτερη πλευρά να κινηθεί αντίθετα από τη φορά δεικτών του ρολογιού (θετική φορά) οπότε θα έχουμε το παρακάτω σχήμα.

Σχήμα_1



Επιλέγουμε πάνω στην δεύτερη πλευρά τυχαίο σημείο M(x,y) οπότε η απόσταση του από το O είναι ρ=$\sqrt{x^2+y^2}$. Στη συνέχεια ορίζουμε: συνω $=\frac{x}{\rho}$, ημω $=\frac{y}{\rho}$ και εφω $=\frac{y}{x}$

Άμεσα προκύπτουν τα εξής:

1. Αν $0^0 < \omega < 90^0$, τότε η τελική πλευρά της γωνίας βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του ορθοκανονικού συστήματος, οπότε x,y θετικά και άρα συνω>0, ημω>0, εφω>0

   Αν $90^0 < \omega < 180^0$, τότε η τελική πλευρά της γωνίας βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του ορθοκανονικού συστήματος, οπότε x<0, y>0 και άρα συνω<0, **ημω>0**, εφω<0.

2. Αν $180^0 < \omega < 270^0$, τότε η τελική πλευρά της γωνίας βρίσκεται στο τρίτο τεταρτημόριο του ορθοκανονικού συστήματος, οπότε x<0, y<0 και άρα συνω<0, ημω<0, **εφω>0.**

3. Αν $270^0 < \omega < 360^0$, τότε η τελική πλευρά της γωνίας βρίσκεται στο τέταρτο τεταρτημόριο του ορθοκανονικού συστήματος, οπότε x>0, y<0 και άρα ημω<0, **συνω>0**, εφω<0.

4. **Γενικά, −1≤ημω≤1, −1≤συνω≤1** ενώ η **εφω** μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

   Επίσης προκύπτουν οι τύποι:

   - εφω=$\frac{\text{ημω}}{\text{συνω}}$
   - ημ^{2}ω+συν^{2}ω=1 ή [(ημω)^2+(συνω)^2 = 1]

Για τις παραπληρωματικές γωνίες , ω και 180^0-ω , ισχύουν:

ημ(180^0-ω)=ημω

συν(180^0-ω)= − συνω

εφ(180^0-ω)= − εφω

αυτές τις ιδιότητες τις χρησιμοποιούμε για να υπολογίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς για αμβλείες γωνίες.

Παράδειγμα:

ημ150^0= ημ(180^0-30^0)= ημ30^0= 0,5

$συν120^0 = συν(180^0-60^0) = -συν60^0 = -0,5$

$εφ135^0 = εφ(180^0 - 45^0) = -εφ45^0$ $= -1$

Στη Β΄ Γυμνασίου, μάθαμε ότι για τις συμπληρωματικές γωνίες, **ω** και **90^0-ω**, ισχύουν:

$ημ(90^0-ω) = συνω$ και $συν(90^0-ω) = ημω$, παράδειγμα, $ημ70^0 = συν20^0$, $συν80^0 = ημ10^0$

Επίσης σε κάθε τρίγωνο, μαθαίνουμε δύο προτάσεις που συνδέουν τα κύρια στοιχεία τους, γνωστές ως:

α) **Νόμος ημιτόνων** και β) **Νόμος συνημιτόνων**

Νόμος ημιτόνων (τον εφαρμόζουμε όταν σε ένα τρίγωνο γνωρίζουμε μια πλευρά και την απέναντι της γωνία και οποιοδήποτε άλλο κύριο στοιχείο)

$\frac{α}{ημA} = \frac{β}{ημB} = \frac{γ}{ημΓ}$ (με χρήση 2 από τους 3 λόγους έχουμε αναλογία)

Νόμος συνημιτόνων (τον εφαρμόζουμε όταν σε ένα τρίγωνο γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία **ή** τις τρεις πλευρές)

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2 \cdot ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot συνΑ$$

(Η πλευρά ΒΓ και η γωνία Α βρίσκονται απέναντι η μια της άλλης) ή $α^2 = β^2 + γ^2 - 2 \cdot β \cdot γ \cdot συνΑ$

Άσκηση 1η

Να βρεθούν οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί στις παρακάτω περιπτώσεις.

I. $ημx = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $90^0 < x < 180^0$

II. $εφx = \sqrt{3}$, $180^0 < x < 270^0$

Λύση

I. Από το θεμελιώδη τύπο της τριγωνομετρίας έχουμε: $ημ^2x + συν^2x = 1$ επομένως $(\frac{\sqrt{5}}{3})^2 + συν^2x = 1$ οπότε $\frac{5}{9} + συν^2x = 1$ ή $συν^2x = 1 - \frac{5}{9}$ ή $συν^2x = \frac{4}{9}$ άρα $συνx = \pm\frac{2}{3}$.

Αλλά $90^0 < x < 180^0$ οπότε **συνx<0** επομένως δεχόμαστε το $συνx = -\frac{2}{3}$

Για την εφαπτομένη έχουμε: $εφx = \frac{ημx}{συνx}$

άρα $εφx = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}}$ οπότε $εφx = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

II. $εφx = \sqrt{3}$ ή $\frac{ημω}{συνω} = \sqrt{3}$ οπότε $ημx = \sqrt{3} \cdot συνx$, αντικαθιστούμε στο θεμελιώδη τύπο $ημ^2x + συν^2x = 1$ και προκύπτει: $(\sqrt{3} \cdot συνx)^2 + συν^2x = 1$ ή $4συν^2x = 1$ ή $συν^2x = \frac{1}{4}$ συνεπώς $συνx = \pm\frac{1}{2}$, αλλά $180^0 < x < 270^0$ οπότε **συνx<0** επομένως $συνx = -\frac{1}{2}$. Από τη σχέση $ημx = \sqrt{3} \cdot συνx$ προκύπτει $ημx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Άσκηση 2η

Αν $συνω = 3ημω - 1$ και $0^0 < ω < 90^0$

α) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω

β) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$K = \frac{5ημω + 10συνω}{2εφω - \frac{1}{2}}$$

Λύση

α) Στο θεμελιώδη τύπο $ημ^2x + συν^2x = 1$ αντικαθιστούμε το συνω με το ημω-1 και προκύπτει:

$ημ^2ω + (3ημω - 1)^2 = 1$ ή

$ημ^2ω + (9ημ^2ω - 6ημω + 1) = 1$ ή

$10ημ^2ω - 6ημω = 0$ οπότε

$\eta\mu\omega\cdot(10\eta\mu\omega-6)=0$ άρα

ημω=0(απορρίπτεται) ή $\eta\mu\omega=\frac{3}{5}$ (δεκτή)

Επομένως $\sigma\upsilon\nu\omega=3\cdot\frac{3}{5}-1=\frac{4}{5}$ και

$\varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ Άρα, $\varepsilon\varphi\omega=\frac{3}{4}$

β) $K=\frac{5\eta\mu\omega+10\sigma\upsilon\nu\omega}{2\varepsilon\varphi\omega-\frac{1}{2}}$, $K=\frac{5\cdot\frac{3}{5}+10\cdot\frac{4}{5}}{2\cdot\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}$

επομένως $K=\frac{3+8}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}$. Τελικά Κ=11

Άσκηση 3η

Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων

$$A=(\eta\mu\omega-\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\omega)^2+(\sqrt{3}\cdot\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega)^2$$

$$B=\frac{4\eta\mu^2150^0+4\sigma\upsilon\nu^2135^0-\eta\mu90^0+\varepsilon\varphi45^0}{\eta\mu^2 20^0+\sigma\upsilon\nu^2160^0}$$

Λύση

$$A=(\eta\mu\omega-\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\omega)^2+(\sqrt{3}\cdot\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega)^2$$

$$A=\eta\mu^2\omega-2\sqrt{3}\cdot\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega+3\sigma\upsilon\nu^2\omega+$$
$$+3\eta\mu^2\omega+2\sqrt{3}\cdot\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega$$

$$A=4\eta\mu^2\omega+4\sigma\upsilon\nu^2\omega$$

$$A=4(\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega)$$

Α=4

$$B=\frac{4\eta\mu^2150^0+4\sigma\upsilon\nu^2135^0-\eta\mu90^0+\varepsilon\varphi45^0}{\eta\mu^2 20^0+\sigma\upsilon\nu^2160^0}$$

$$B=\frac{4\eta\mu^2 30^0+4(-\sigma\upsilon\nu45^0)^2-1+1}{\eta\mu^2 20^0+(-\sigma\upsilon\nu20^0)^2}$$

$$B=\frac{4\eta\mu^2 30^0+4\sigma\upsilon\nu^2 45^0-1+1}{\eta\mu^2 20^0+\sigma\upsilon\nu^2 20^0}$$

$$B=\frac{4\cdot\frac{1}{4}+4\frac{2}{4}-1+1}{1} \text{ ή } B=3$$

Άσκηση 4η

Αν $\eta\mu\omega=\frac{3x-7}{x+1}$ και $\eta\mu\varphi=\frac{x-2}{x-1}$

Να βρεθεί η τιμή του x, ώστε ω και φ να είναι παραπληρωματικές γωνίες. Ποιες είναι οι ω,φ.

Λύση

Αν ω, φ παραπληρωματικές τότε ημφ = ημω οπότε $\frac{3x-7}{x+1}=\frac{x-2}{x-1}$ άρα

$(3x-7)(x-1)=(x-2)(x+1)$ επομένως

$3x^2-10x+7=x^2-x-2$ ή $2x^2-9x+9=0$

Δ=81-72=9 και $x_{1,2}=\frac{9\pm3}{4}$ και τελικά x=3 ή x=3/2.

Αλλά ταυτόχρονα πρέπει ημω και ημφ να είναι θετικά αφού οι γωνίες βρίσκονται στο 1^o και στο 2^o τεταρτημόριο. Η τιμή x=3/2 δίνει $\eta\mu\omega=\eta\mu\varphi=-1<0$ άρα απορρίπτεται, ενώ η τιμή χ=3 δίνει ημω=1/2 οπότε μια γωνία είναι 30^0 και η άλλη 150^0

Άσκηση 5η

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $x\hat{O}A$, $x\hat{O}B$, $x\hat{O}\Gamma$. Αν A(4,3), B(-1,$\sqrt{3}$), Γ(-1, -$\sqrt{3}$)

Λύση

Έστω $x\hat{O}A=\omega$, $x\hat{O}B=\varphi$, $x\hat{O}\Gamma=\theta$

$(OA)=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

Άρα $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{4}{5}$, $\eta\mu\omega=\frac{3}{5}$ και $\varepsilon\varphi\omega=\frac{3}{4}$

$(OB)=\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$

Άρα $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$, $\eta\mu\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και

$\varepsilon\varphi\varphi=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$

$(O\Gamma)=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$

Άρα $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$, $\eta\mu\theta=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ και

$\varepsilon\varphi\theta=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}$

Άσκηση 6η

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι, ΑΒ=8cm , ΑΓ=10 cm και Γ=43^0

Να βρεθεί η πλευρά ΒΓ.

Λύση

Αν γνωρίζαμε τη γωνία Α τότε θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε νόμο συνημιτόνων.

Μπορούμε όμως να εφαρμόσουμε νόμο ημιτόνων, $\frac{ΑΓ}{ημΒ}=\frac{ΑΒ}{ημΓ}$ **οπότε** $\frac{10}{ημΒ}=\frac{8}{ημ43^0}$

ή $8ημΒ=10\cdot 0,682$ ή ημΒ=0,8525, **τελικά** $Β=59^0$ ή $Β=180^0-59^0=121^0$(παραπληρωματική)

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη γωνία Α

i) για $Β=59^0$ είναι $Α= 180^0-43^0-59^0=78^0$

Τώρα από **νόμο συνημιτόνων** έχουμε

$ΒΓ^2=ΑΒ^2+ΑΓ^2-2ΑΒ\cdot ΑΓ\cdot συνΑ$, άρα

$ΒΓ^2=8^2+10^2-2\cdot 8\cdot 10\cdot συν78^0$

$ΒΓ^2=64+100-160\cdot 0,2079=130,74$

$ΒΓ=\sqrt{130,74}=11,4\,cm$

ή

ii) για $Β=121^0$ είναι $Α= 180^0-43^0-121^0=16^0$

Τώρα από **νόμο συνημιτόνων** έχουμε

$ΒΓ^2=ΑΒ^2+ΑΓ^2-2ΑΒ\cdot ΑΓ\cdot συνΑ$, άρα

$ΒΓ^2=8^2+10^2-2\cdot 8\cdot 10\cdot συν16^0$

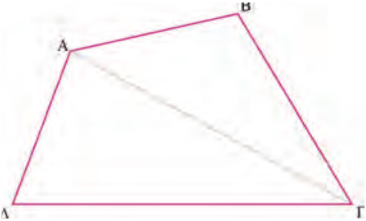
$ΒΓ^2=64+100-160\cdot 0,9613=10,192$

$ΒΓ=\sqrt{10,192}\simeq 3,2\,cm$

Άσκηση 7η

Δίνεται το κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ, αν ΑΔ=8cm, ΓΔ=12cm και $Δ=77^0$, $Β\hat{Α}Γ=40^0$, $\hat{Β}=110^0$ Να βρεθούν α) Η διαγώνιος ΑΓ. β) η πλευρά ΑΒ.

Λύση



α) Στο τρίγωνο ΑΔΓ, **με νόμο συνημιτόνων** έχουμε: $ΑΓ^2=ΑΔ^2+ΔΓ^2-2ΑΔ\cdot ΔΓ\cdot συνΔ$

ή $ΑΓ^2=8^2+12^2-2\cdot 8\cdot 12\cdot συν77^0$

$ΑΓ^2=208-192\cdot συν0,225=164,8$ άρα ΑΓ=12,84cm

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, για να βρούμε την πλευρά ΑΒ θα χρειαστούμε την απέναντι γωνία, η οποία είναι $Α\hat{Γ}Β=180^0-110^0-40^0=30^0$

Με νόμο ημιτόνων, $\frac{ΑΒ}{ημ30^0}=\frac{12,84}{ημ110^0}$ **οπότε**

$\frac{ΑΒ}{0,5}=\frac{12,84}{ημ70^0}$ ή $ΑΒ\cdot 0,9397=12,84\cdot 0,5$ ή ΑΒ=6,83cm

Άσκηση 8η

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν τα παρακάτω :

- $συνΑ=\frac{1}{3}$
- **Το μήκος της πλευράς ΒΓ είναι λύση της εξίσωσης $x^2-3x-40=0$**
- $ημΒ=\frac{\sqrt{75}-\sqrt{12}}{6}$ **και**
- $ΑΓ=\frac{συν^2 135^0+ημ150^0+εφ^2 120^0}{5}$

Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΓ.

Λύση

Γνωρίζουμε μόνο μία πλευρά, επομένως θα εφαρμόσουμε νόμο ημιτόνων, επομένως από το $συνΑ=\frac{1}{3}$, θα υπολογίσουμε το ημΑ.

Από το θεμελιώδη τύπο της τριγωνομετρίας έχουμε: $ημ^2x+συν^2x=1$ επομένως

$ημ^2Α+\left(\frac{1}{3}\right)^2=1$, οπότε $ημ^2Α=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$ ή

$ημΑ=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ενώ $ημΑ=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ απορρίπτεται

Για να βρούμε το μήκος της πλευράς ΒΓ λύνουμε την εξίσωση $x^2-3x-40=0$

Δ=9-4(-40)=9+160=169 άρα

$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{169}}{2}=\frac{3\pm 13}{2}$ οπότε $x_1=\frac{3+13}{2}=8$

$x_2=\frac{3-13}{2}=-5<0$, απορρίπτεται

Επομένως **ΒΓ=8**

$ημΒ=\frac{\sqrt{75}-\sqrt{12}}{6}=\frac{\sqrt{25\cdot 3}-\sqrt{4\cdot 3}}{6}$ ή

$ημΒ=\frac{5\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Από νόμο ημιτόνων έχουμε $\dfrac{\text{ΑΓ}}{\text{ημΒ}}=\dfrac{8}{\text{ημΑ}}$ ή

$\dfrac{\text{ΑΓ}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{8}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$ ή $\dfrac{2\text{ΑΓ}}{\sqrt{3}}=\dfrac{24}{2\sqrt{2}}$ οπότε

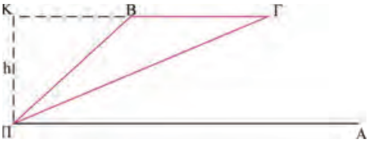
$4\sqrt{2}\cdot\text{ΑΓ}=24\sqrt{3}$ άρα

$$\text{ΑΓ}=\frac{24\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{6}}{2}=3\sqrt{6}$$

Άσκηση 9η

Ένας παρατηρητής Π βλέπει ένα αεροπλάνο το οποίο πετάει σε σταθερό ύψος από τη θέση Β, μέχρι τη θέση Γ, το οποίο θα προσγειωθεί στο αεροδρόμιο που βρίσκεται στη θέση Α. Η ταχύτητα του αεροσκάφους είναι 720 Km/h και για να φτάσει από το Β στο Γ χρειάστηκε 2 λεπτά. Αν η γωνία $\text{Β}\hat{\Pi}\text{Α}=50^0$ και $\Gamma\hat{\Pi}\text{Α}=20^0$ να βρεθεί η απόσταση ΠΒ και το ύψος που πετούσε το αεροπλάνο. Θεωρήστε το έδαφος της περιοχής επίπεδο.

Λύση



Στο τρίγωνο ΒΠΓ έχουμε:

Η ταχύτητα του αεροπλάνου είναι 720 χιλιόμετρα ανά ώρα, επομένως κάθε λεπτό διανύει 720:60=12 χιλιόμετρα. Σε 2 λεπτά διανύει 24 χιλιόμετρα. Επομένως ΒΓ=24Km.

Επίσης $\text{Β}\hat{\Pi}\Gamma=50^0-20^0=30^0$ και

Αφού ΒΓ//ΠΑ τότε $\text{Β}\hat{\Gamma}\Pi=\Gamma\hat{\Pi}\text{Α}=20^0$ (εντός εναλλάξ)

Με νόμο ημιτόνων στο τρίγωνο ΒΠΓ

ισχύει: $\dfrac{\text{ΒΓ}}{\text{ημΒ}\hat{\Pi}\Gamma}=\dfrac{\Pi\text{Β}}{\text{ημΒ}\hat{\Gamma}\Pi}$ άρα

$\dfrac{24}{\text{ημ}30^0}=\dfrac{\Pi\text{Β}}{\text{ημ}20^0}$ ή $\dfrac{24}{0,5}=\dfrac{\Pi\text{Β}}{0,342}$ ή

$\Pi\text{Β}=\dfrac{24\cdot 0,342}{0,5}=16,416$ Τελικά

ΠΒ=16,416Km ή 16.416m

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΠΒ το ΠΚ είναι το ύψος h στο οποίο πετάει το αεροπλάνο και είναι

$\text{ημΚ}\hat{\Pi}\text{Β}=\dfrac{\Pi\text{Κ}}{\Pi\text{Β}}$ ή $\text{ημ}50^0=\dfrac{h}{16,416}$ οπότε

$h=0,766\cdot 16,416$ ή h=12,575.

Άρα το αεροσκάφος πετά σε ύψος

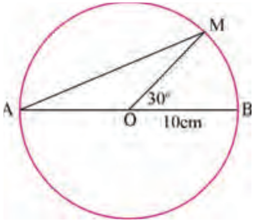
12,575 Km ή 12.575m.

και αν θέλαμε να το μετατρέψουμε σε πόδια, πολλαπλασιάζουμε επί 3,2808 άρα $12.575\cdot 3,2808=41.256$ πόδια

Άσκηση 10η

Αν ΑΒ η διάμετρος κύκλου (Ο, 10cm) και για σημείο Μ του κύκλου είναι ΜΟΒ=30⁰.
Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής ΜΑ.

Λύση



Αφού $\text{Μ}\hat{\text{Ο}}\text{Β}=30^0$ άρα $\text{Α}\hat{\text{Ο}}\text{Μ}=180^0-30^0=120^0$

Στο τρίγωνο ΑΟΜ έχουμε: ΟΑ=ΟΜ=10cm

Επομένως με νόμο συνημιτόνων

$\text{ΑΜ}^2=\text{ΟΑ}^2+\text{ΟΜ}^2-2\cdot\text{ΟΑ}\cdot\text{ΟΜ}\cdot\text{συν}120^0$ ή

$\text{ΑΜ}^2=10^2+10^2-2\cdot 10\cdot 10\cdot(-\text{συν}60^0)$

$\text{ΑΜ}^2=200+200\cdot 0,5$

$\text{ΑΜ}^2=300$

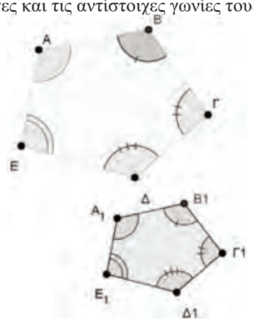
$\text{ΑΜ}=\sqrt{300}=10\sqrt{3}=10\cdot 1,732=17,32$

Τελικά ΑΜ=17,32cm

Γ΄ Τάξη Όμοια σχήματα-Όμοια τρίγωνα

Λυμπερόπουλος Γεώργιος

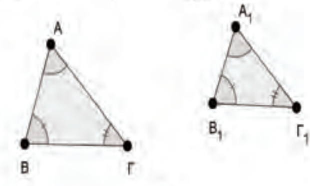
Γενικά όταν λέμε ότι δύο πολύγωνα ή και 2 τρίγωνα είναι όμοια, εννοούμε ότι τα πολύγωνα αυτά έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.



ΣΧ 1

Έτσι στο σχ. 1 τα πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ και $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1E_1$ έχουν πλευρές: ΑΒ=2·A_1B_1, ΒΓ=2·$B_1\Gamma_1$, ΓΔ=2·$\Gamma_1\Delta_1$, ΔΕ=2·Δ_1E_1 και ΕΑ=2·E_1A_1 ή $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{B\Gamma}{B_1\Gamma_1}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma_1\Delta_1}=\frac{\Delta E}{\Delta_1E_1}=\frac{EA}{E_1A_1}=\frac{1}{2}$ ανάλογες με λόγο $\frac{1}{2}$, και οι γωνίες: $A=A_1$, $B=B_1$,$\Gamma=\Gamma_1$, $\Delta=\Delta_1$, $E=E_1$ (δηλαδή οι γωνίες που αντιστοιχούν σε ομόλογες πλευρές είναι ίσες). Τα πεντάγωνα αυτά λέμε ότι είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda=\frac{1}{2}$

Τα τρίγωνα στο παρακάτω σχήμα 2



Σχ2

$A_1B_1=\frac{2}{3}AB,\ B_1\Gamma_1=\frac{2}{3}B\Gamma,\ A_1\Gamma_1=\frac{2}{3}A\Gamma$

Έχουν: $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{2}{3}$, $\frac{A_1\Gamma_1}{A\Gamma}=\frac{2}{3}$ και $\frac{B_1\Gamma_1}{B\Gamma}=\frac{2}{3}$. ή $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{A_1\Gamma_1}{A\Gamma}=\frac{B_1\Gamma_1}{B\Gamma}=\frac{2}{3}$. Έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που περιέχονται από ομόλογες πλευρές ίσες μία προς μία, δηλαδή: $A=A_1,\ B=B_1,\ \Gamma=\Gamma_1$.

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και $A_1B_1\ \Gamma_1$ είναι μεταξύ τους όμοια. Για να είναι δυο τρίγωνα όμοια μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι δεν χρειάζεται να ξέρουμε ότι όλες οι πλευρές τους είναι ανάλογες μία προς μία και όλες οι γωνίες ους είναι ίσες.

Όπως στην ισότητα τριγώνων υπάρχουν κριτήρια, έτσι και στην ομοιότητα τριγώνων υπάρχουν τα παρακάτω κριτήρια:

1. Δύο τρίγωνα είναι όμοια, αν έχουν τις αντίστοιχες γωνίες ίσες μία προς μία.
2. Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν 2 πλευρές ανάλογες μία προς μια και τις γωνίες που περιέχονται από τις ομόλογες πλευρές ίσες.
3. Δυο τρίγωνα είναι όμοια αν οι πλευρές του ενός τριγώνου είναι ανάλογες με τις πλευρές του άλλου τριγώνου.

Για τα ορθογώνια τρίγωνα τα πράγματα είναι πιο απλά λόγω της ορθής γωνίας τους. Έτσι τα κριτήρια εδώ είναι:

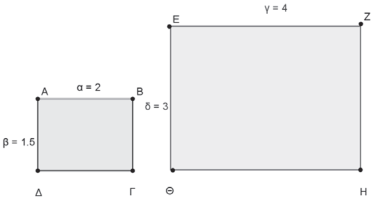
1. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια αν μία οξεία γωνία του ενός είναι ίση με τη αντίστοιχη οξεία γωνία του άλλου τριγώνου.
2. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια αν οι κάθετες πλευρές του ενός είναι ανάλογες με τις αντίστοιχες κάθετες πλευρές του άλλου τριγώνου.
3. Δυο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια αν, μια πλευρά και η υποτείνουσα του ενός είναι ανάλογες με μία πλευρά και την υποτείνουσα του άλλου τριγώνου.

Τις προτάσεις αυτές, που μας δίνουν τη δυνατότητα να κρίνουμε αν δύο τρίγωνα είναι όμοια με λιγότερα στοιχεία από αυτά που απαιτεί ο ορισμός της ομοιότητας, τις ονομάζουμε κριτήρια ομοιότητας τριγώνων. Για να αποδείξουμε κάθε μια από τις προτάσεις αυτές, πρέπει προφανώς να αποδεικνύουμε, ότι όλες οι γωνίες του ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με τις γωνίες του άλλου τριγώνου και όλες οι πλευρές είναι ανάλογες με τις ομόλογες πλευρές του άλλου τριγώνου. Τις αποδείξεις τις αφήνουμε σε εσάς τους μαθητές ως άσκηση.

Γενικά αν δύο οποιαδήποτε πολύγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος δύο ομολόγων πλευρών τους , είναι ο ίδιος για οποιεσδήποτε ομόλογες πλευρές (πλευρές που αντιστοιχούν σε ίσες γωνίες) . Είναι ένας θετικός αριθμός λ και ονομάζεται λόγος ομοιότητας των ομοίων σχημάτων.

Εφαρμογές

1. Στο σχήμα 3 έχουμε δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα το ΑΒΓΔ και το ΕΖΗΘ.



ΣΧ3

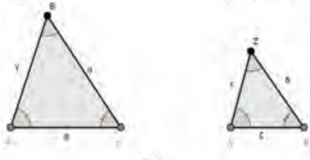
Έχουν: ίσες όλες τις γωνίες τους ως ορθές γωνίες και οι αντίστοιχες πλευρές του 2ου είναι διπλάσιες σε μέγεθος από του πρώτου, άρα είναι όμοια σύμφωνα με τον ορισμό της ομοιότητας.

Για τα εμβαδά τους έχω:

$E_{ΑΒΓΔ} = α\cdot β = 2\cdot 1{,}5 = 3$

$E_{ΕΖΗΘ} = γ\cdot δ = 4\cdot 3 = 12$ παρατηρώ ότι ο λόγος ομοιότητας των ορθογωνίων είναι: $\frac{AB}{EZ}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ και ο λόγος των εμβαδών τους: $\frac{E_{ΑΒΓΔ}}{E_{ΕΖΗΘ}} = \frac{α\cdot β}{γ\cdot δ}=\frac{α}{γ}\cdot\frac{β}{δ} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^2$, δηλαδή ίσος με το λόγο ομοιότητας των δυο ορθογωνίων στο τετράγωνο.

2. Αποδείξτε ότι αν δύο τρίγωνα είναι όμοια, τότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας τους.



Σχ4

Δηλαδή αν τρ ΑΒΓ≈τρ ΔΕΖ, τότε $\frac{E_{ΑΒΓ}}{E_{ΔΕΖ}} = λ^2$ όπου $λ$ είναι ο λόγος ομοιότητας των δυο τριγώνων.

3. Αποδείξτε ότι δύο κανονικά εξάγωνα είναι μεταξύ τους όμοια και δικαιολογείστε ότι δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι μεταξύ τους όμοια.

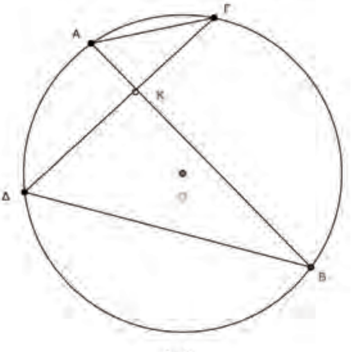
4. Αν για δύο Τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουμε ότι, οι πλευρές τους ΑΒ//ΔΖ, ΒΓ//ΖΕ και ΑΓ//ΔΕ, αποδείξτε ότι τα τρίγωνα είναι μεταξύ τους όμοια.

5. Ομοίως αν έχουν ΑΒ//ΔΖ, ΒΓ//ΖΕ και $\angle Β = \angle Ζ$ τότε τα τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους.

6. Αν δύο τρίγωνα έχουν 2 γωνίες ίσες μία προς μία τότε είναι μεταξύ τους όμοια.

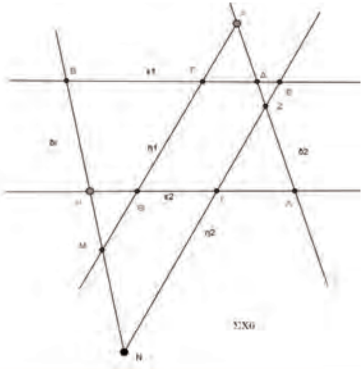
Ασκήσεις

1. Στο σχήμα 5 να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα: ΚΑΓ και ΚΔΒ είναι όμοια και να βρεθούν οι ομόλογες πλευρές και οι ίσες γωνίες των δυο τριγώνων.



Σχ5

2. Στο σχ.6 Γνωρίζουμε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$, $\delta_1 // \delta_2$ και $\eta_1 // \eta_2$. Να βρείτε όλα τα ζεύγη των τριγώνων που είναι μεταξύ τους όμοια και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

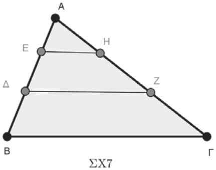


ΣΧ6

3. Στο Σχ 7 έχουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου το εμβαδόν είναι 54 cm^2 Ορίζουμε σημεία Δ,Ε στην ΑΒ ώστε ΒΔ=ΔΕ=ΕΑ και στην ΓΑ σημεία Ζ,Η ώστε ΓΖ=ΖΗ=ΗΑ.

Να υπολογίσεται τα παρακάτω εμβαδά :

$E_{AEH}, E_{A\Delta Z}$ και $E_{E\Delta ZH}$



ΣΧ7

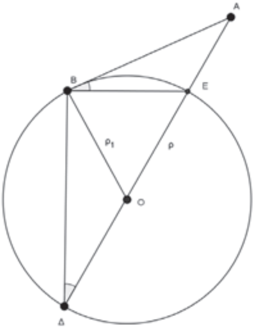
4. Στο παρακάτω ΣΧ 8

α) να συγκρίνετε ως προς την ομοιότητα τα τρίγωνα ΑΒΟ, και ΔΒΕ

β) Να αποδείξετε , ότι $\angle ABE = \angle B\Delta E$

γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΒ είναι μεταξύ τους όμοια

δ) Να αποδείξετε ότι (ΑΒ)^2=ΑΕ.ΑΔ

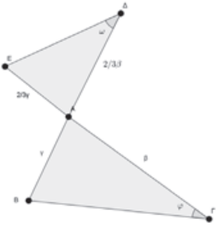


ΣΧ8

Παρατήρηση: Από τη προηγούμενη άσκηση διαπιστώνουμε ότι :

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ενός κύκλου, είναι ίση με την γωνία που έχει πλευρές την αντίστοιχη χορδή της και την εφαπτομένη του κύκλου σε ένα άκρο της χορδής αυτής.

5. Στο Σχ 9 να αποδείξετε ότι: $\angle\varphi = \angle\omega$



Σχ9

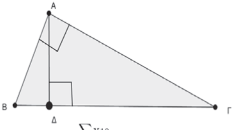
6. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ Σχ.10 αν ΑΔ είναι το ύψος στην υποτείνουσα να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ^2=ΔΒ.ΔΓ

β) ΑΒ^2=ΔΒ.ΒΓ

γ) ΑΓ^2=ΔΓ. ΒΓ και

δ) ΒΓ^2= ΑΒ^2+ ΑΓ^2



∑Χ10

85ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"

18 Ιανουαρίου 2025

Οι λύσεις των προβλημάτων

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. **Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις**

$$\mathbf{A} = ((-\mathbf{3})^{\mathbf{3}} + \mathbf{27} - (-\mathbf{5})^{\mathbf{3}} - \mathbf{10}^{\mathbf{2}}) \cdot (\mathbf{3}^{\mathbf{2}} - \mathbf{2}^{\mathbf{2}}),$$

$$\mathbf{B} = (-\mathbf{5}^{\mathbf{3}} + \mathbf{10}^{\mathbf{2}})^{\mathbf{4}} : (\mathbf{2}^{\mathbf{3}} - \mathbf{3})^{\mathbf{2}}$$

και να γράψετε τον αριθμό Α: Β ως δύναμη με βάση το 5.

Λύση. Έχουμε:

$$\mathrm{A} = ((-3)^3 + 27 - (-5)^3 - 10^2) \cdot (3^2 - 2^2) = (-27 + 27 - (-125) - 100) \cdot (9 - 4)$$
$$= 25 \cdot 5 = 5^2 \cdot 5 = 5^3.$$

$$\mathrm{B} = (-5^3 + 10^2)^4 : (2^3 - 3)^2 = (-125 + 100)^4 : (8 - 3)^2 =$$
$$(-25)^4 : (5)^2 = (-5^2)^4 : 5^2 = 5^8 : 5^2 = 5^6$$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{A} : \mathrm{B} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{5^3}{5^6} = 5^{3-6} = 5^{-3}.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του θετικού ακέραιου α για τις οποίες ισχύει η ισότητα:

$$\boldsymbol{ΜΚΔ}\{\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{50}\} + \boldsymbol{ΕΚΠ}\{\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{90}\} = \mathbf{100}.$$

Σημείωση

Με $ΜΚΔ\{\alpha, \beta\}$ *συμβολίζουμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των ακέραιων* α, β.

Με $ΕΚΠ\{\alpha, \beta\}$ *συμβολίζουμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των ακέραιων* α, β.

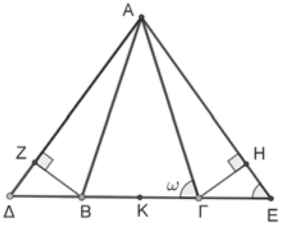
Λύση

Οι δυνατές τιμές του $ΜΚΔ\{\alpha, 50\}$ είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 1 και μικρότερες ή ίσες του 50. Οι δυνατές τιμές του $ΕΚΠ\{\alpha, 90\}$ είναι τα θετικά πολλαπλάσια του 90. Επομένως τα πολλαπλάσια που είναι μεγαλύτερα του 90 αποκλείονται και μοναδική δυνατή τιμή είναι η $ΕΚΠ\{\alpha, 90\} = 90$, οπότε $ΜΚΔ\{\alpha, 50\} = 10$.

Από την ισότητα $ΕΚΠ\{\alpha, 90\} = 90$ προκύπτει ότι ο α πρέπει να είναι διαιρέτης του 90, δηλαδή $\alpha \in \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$.

Από την ισότητα $ΜΚΔ\{\alpha, 50\} = 10$ προκύπτει ότι ο α πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 10. Επομένως οι δυνατές τιμές του α είναι όλα τα πολλαπλάσια του 10 που είναι ταυτόχρονα και διαιρέτες του 90, δηλαδή $\alpha \in \{10, 30, 90\}$.

Πρόβλημα 3

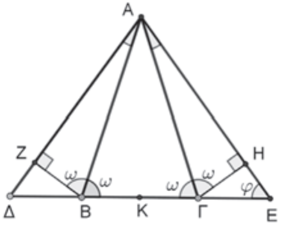


Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και $\mathrm{A\hat{\Gamma}B} = \omega$. Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΓΗ είναι ορθογώνια με $\mathrm{A\hat{Z}B} = \mathrm{A\hat{H}\Gamma} = 90^o$ και $\mathrm{A\hat{B}Z} = \mathrm{A\hat{\Gamma}H} = \omega$. Το σημείο Κ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ. Δίνεται ακόμη ότι ισχύει η ισότητα γωνιών: $\mathrm{Z\hat{A}H} = \mathrm{A\hat{\Gamma}B}$.

(α) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{A\hat{\Gamma}B} = \omega$.

(β) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{A\hat{E}\Delta}$ και να αποδείξετε ότι το σημείο Κ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΔΕ.

Λύση



(α) Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΓΗ έχουμε ότι:

$$\mathrm{Z\hat{A}B} = 90^o - \omega = \mathrm{\Gamma\hat{A}H}.$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι: $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = 180^o - 2\omega$, οπότε

$$\mathrm{Z\hat{A}H} = \mathrm{Z\hat{A}B} + \mathrm{B\hat{A}\Gamma} + \mathrm{\Gamma\hat{A}H} = 90^o - \omega + 180^o - 2\omega + 90^o - \omega = 360^o - 4\omega.$$

Τότε έχουμε $\mathrm{Z\hat{A}H} = \hat{\Gamma} \Leftrightarrow 360^o - 4\omega = \omega \Leftrightarrow 5\omega = 360^o \Leftrightarrow \omega = 72^o$.

(β) Έστω $\mathrm{A\hat{E}\Delta} = \varphi$. Στο τρίγωνο ΑΓΕ η γωνία $\mathrm{A\hat{\Gamma}B} = \omega$ είναι εξωτερική, οπότε ισχύει η σχέση $\mathrm{A\hat{\Gamma}B} = \omega = \varphi + \mathrm{\Gamma\hat{A}E} = \varphi + \mathrm{\Gamma\hat{A}H} = \varphi + 90^o - \omega$

$$\Rightarrow \mathrm{A\hat{E}\Delta} = \varphi = 2\omega - 90^o \Rightarrow \varphi = 2 \cdot 72^o - 90^o = 54^o.$$

Ομοίως, βρίσκουμε και ότι $\mathrm{A\hat{\Delta}E} = \mathrm{A\hat{\Delta}B} = 2\omega - 90^o = 54^o$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με ΑΔ = ΑΕ.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΚ είναι διάμεσος προς τη βάση, άρα είναι και ύψος, δηλαδή η ΑΚ είναι ύψος και του ισοσκελούς τριγώνου ΑΔΕ. Άρα είναι και διάμεσος προς τη βάση ΔΕ, δηλαδή το σημείο Κ είναι το μέσο της ΔΕ.

Πρόβλημα 4. **Δίνονται οι θετικοί ακέραιοι**

$$\boldsymbol{A = \overline{\alpha\beta\beta\beta} = 1000\alpha + 100\beta + 10\beta + \beta} \text{ και } \quad \boldsymbol{B = \overline{\alpha\beta\beta} = 100\alpha + 10\beta + \beta},$$

με $\boldsymbol{\alpha \neq 0, \beta}$ ψηφία. Αν ισχύει $\boldsymbol{A - B = 4900}$, να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του αριθμού Α.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε την εξίσωση:

$$\overline{\alpha\beta\beta\beta}-\overline{\alpha\beta\beta}=4900 \Leftrightarrow 1000\alpha+100\beta+10\beta+\beta-(100\alpha+10\beta+\beta\,)=4900$$
$$\Leftrightarrow 900\alpha+100\beta=4900 \Leftrightarrow 9\alpha+\beta=49 \Leftrightarrow \beta=49-9\alpha.$$

Επειδή το β είναι ψηφίο, από την ισότητα $\beta=49-9\alpha$ έπεται ότι το α δεν μπορεί, να πάρει τιμή μεγαλύτερη του 5, αλλά ούτε και τιμή μικρότερη του 5. Άρα πρέπει να είναι $\alpha=5$, οπότε $\beta=49-9\alpha=4$.

Θα μπορούσαμε επίσης να εργαστούμε ως εξής: Επειδή $0\leq\beta\leq 9$, έπεται ότι

$$0\leq 49-9\alpha\leq 9 \Leftrightarrow -49\leq -9\alpha\leq -40 \Leftrightarrow 40\leq 9\alpha\leq 49 \Leftrightarrow \frac{40}{9}\leq\alpha\leq\frac{49}{9} \Leftrightarrow \alpha=5,$$

οπότε θα είναι $\beta=4$ και $\overline{\alpha\beta\beta\beta}=5444$.

2ος τρόπος. Εκτελούμε την κλασσική αφαίρεση $A-B$:

$$\begin{array}{rcccc} & \alpha & \beta & \beta & \beta \\ - & & \alpha & \beta & \beta \\ \hline & 4 & 9 & 0 & 0 \end{array}$$

Στις δύο τελευταίες θέσεις προκύπτουν δύο μηδενικά. Στην τρίτη θέση από το τέλος πρέπει η διαφορά να είναι 9, το οποίο αποκλείεται γιατί πρέπει να είναι $\alpha\geq 1$. Επομένως πρέπει να πάρουμε μία εκατοντάδα με συνέπεια την ισότητα

$$\beta+10-\alpha=9 \Leftrightarrow \alpha-\beta=1$$

και στη συνέχεια στην επόμενη θέση $\alpha-1=4 \Leftrightarrow \alpha=5$.
Άρα έχουμε α=5, β=4 και $A=5444$.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. **Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς τριψήφιους ακέραιους αριθμούς**

$$\mathbf{A}=\overline{\boldsymbol{\alpha\beta\gamma}}=\mathbf{100}\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{10}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$$

οι οποίοι κατά την Ευκλείδεια διαίρεσή τους με το άθροισμα των ψηφίων τους δίνουν πηλίκο 20 και υπόλοιπο 6.

Λύση

Από την υπόθεση έχουμε ότι τα α,β,γ είναι ψηφία με $\alpha\neq 0$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\mathrm{A}=\overline{\alpha\beta\gamma}=100\alpha+10\beta+\gamma=20(\alpha+\beta+\gamma)+6 \Leftrightarrow$$

$$80\alpha-10\beta-19\gamma=6 \Leftrightarrow 80\alpha-10\beta=19\gamma+6 \Leftrightarrow 10(8\alpha-\beta)=19\gamma+6.$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι ο ακέραιος $19\gamma+6$ είναι πολλαπλάσιο του 10. Αυτό συμβαίνει μόνο για την τιμή $\gamma=6$.

Η τιμή $\gamma=6$ μπορεί να προκύψει άμεσα από την εξίσωση $\mathrm{A}=20(\alpha+\beta+\gamma)+16$, από την οποία προκύπτει ότι ο αριθμός Α έχει τελευταίο ψηφίο το 6.

Άρα έχουμε την εξίσωση:

$$10(8\alpha-\beta)=120 \Leftrightarrow 8\alpha-\beta=12 \Leftrightarrow 8\alpha-12=\beta.$$

Επειδή $0\leq\beta\leq 9$, έχουμε ότι η μοναδική επιτρεπτή τιμή του α είναι $\alpha=2$, οπότε προκύπτει ότι $\beta=4$ και ο ζητούμενος αριθμός είναι ο $\mathrm{A}=\overline{\alpha\beta\gamma}=246$.

Πρόβλημα 2. **Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του ακέραιου $\boldsymbol{\nu}$ για τις οποίες ο αριθμός**

$$\mathbf{A}=\frac{\boldsymbol{\nu}^2+\mathbf{9}\boldsymbol{\nu}+\mathbf{20}}{\boldsymbol{\nu}^2+\mathbf{3}\boldsymbol{\nu}-\mathbf{4}}$$

είναι ακέραιος.

Λύση

Έχουμε ότι

$$\nu^2+9\nu+20=\nu^2+5\nu+4\nu+20=\nu(\nu+5)+4(\nu+5)=(\nu+5)(\nu+4).$$

$$\nu^2+3\nu-4=\nu^2+4\nu-\nu-4=\nu(\nu+4)-(\nu+4)=(\nu+4)(\nu-1).$$

Για να ορίζεται ο αριθμός Α πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του 0, οπότε πρέπει $(\nu+4)(\nu-1)\neq 0 \Leftrightarrow \nu+4\neq 0$ και $\nu-1\neq 0 \Leftrightarrow \nu\neq -4$ και $\nu\neq 1$.

$$\mathrm{A}=\frac{\nu^2+9\nu+20}{\nu^2+3\nu-4}=\frac{(\nu+5)(\nu+4)}{(\nu-1)(\nu+4)}=\frac{\nu+5}{\nu-1}=\frac{\nu-1+6}{\nu-1}=1+\frac{6}{\nu-1},$$

οπότε

$$\mathrm{A}=1+\frac{6}{\nu-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{6}{\nu-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\nu-1\in\{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\}$$
$$\Leftrightarrow\nu\in\{-5,-2,-1\ \ 0\ \ 2,3,4\ 7\}.$$

Σημείωση. Μπορούμε επίσης να γράψουμε:

$$\mathrm{A}=\frac{\nu^2+9\nu+20}{\nu^2+3\nu-4}=\frac{\nu^2+3\nu-4+6\nu+24}{\nu^2+3\nu-4}=1+\frac{6(\nu+4)}{(\nu-1)(\nu+4)}=1+\frac{6}{\nu-1}.$$

Πρόβλημα 3

Δίνονται οι εξισώσεις

$$\boldsymbol{5(7x-2a)=6\left(5x+\frac{b}{6}\right),\qquad (E_1)}$$

$$\boldsymbol{3(8y-6a)=7\left(3y+\frac{b}{7}\right).\qquad (E_2)}$$

με άγνωστο το x και το y, αντίστοιχα, ενώ οι αριθμοί a,b, με $b>0$ είναι ακέραιοι που θεωρούνται γνωστοί. Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του ακέραιου b για την οποία και οι δύο δεδομένες εξισώσεις έχουν ακέραια λύση.

Λύση

Για την πρώτη εξίσωση έχουμε:

$$5(7x-2a)=6\left(5x+\frac{b}{6}\right)\Leftrightarrow 35x-10a=30x+b$$
$$\Leftrightarrow 5x=10a+b\Leftrightarrow x=2a+\frac{b}{5}.$$

Επειδή οι a,b είναι ακέραιοι, η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις, για κάθε ακέραιο a, αν ο θετικός ακέραιος b είναι θετικό πολλαπλάσιο του 5.

Για την δεύτερη εξίσωση έχουμε:

$$3(8y-6a)=7\left(3y+\frac{b}{7}\right)\Leftrightarrow 24y-18a=21y+b\Leftrightarrow 3y=18a+b\Leftrightarrow y=6a+\frac{b}{3}.$$

Επειδή οι a,b είναι ακέραιοι, η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις, για κάθε ακέραιο a, αν ο θετικός ακέραιος b είναι θετικό πολλαπλάσιο του 3.

Επομένως η ελάχιστη τιμή της παραμέτρου b για την οποία έχουν ακέραια λύση και οι δύο δεδομένες εξισώσεις, για κάθε ακέραιο a, είναι το $ΕΚΠ\{5,3\}=15$.

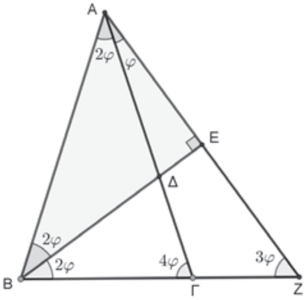
Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και σημείο Ζ στην προέκταση της πλευράς ΒΓ προς το μέρος του Γ τέτοιο, ώστε να ισχύει $Β\hat{Α}Γ = 2\cdot Γ\hat{Α}Ζ$ και η ευθεία ΑΖ να είναι κάθετη στη διχοτόμο της γωνίας $Α\hat{Β}Γ$.

(α) Να αποδείξετε ότι $ΑΒ = ΒΖ$.

(β) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση



(α) Έστω ότι η διχοτόμος της γωνίας $Α\hat{Β}Γ$ τέμνει την ΑΖ στο Ε. Τότε τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΖΕΒ είναι ίσα, αφού έχουν

$$Α\hat{Ε}Β = Ζ\hat{Ε}Β = 90^\circ,\ Α\hat{Β}Ε = Ζ\hat{Β}Ε$$

και η πλευρά ΒΕ είναι κοινή (Γ-Π-Γ). Συνεπώς, το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΒΖ$ και $Β\hat{Ζ}Α = Β\hat{Α}Ζ$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να πούμε ότι στο τρίγωνο ΑΒΖ η διχοτόμος του ΒΕ είναι και ύψος, οπότε το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΒΖ$.

(β) Αν $Γ\hat{Α}Ζ = \varphi$, τότε $Β\hat{Α}Γ = 2\varphi$ και

$$Β\hat{Ζ}Α = Β\hat{Α}Ζ = Β\hat{Α}Γ + Γ\hat{Α}Ζ$$

$$= 2\varphi + \varphi = 3\varphi.$$

Επιπλέον, έχουμε

$$Α\hat{Β}Γ = Α\hat{Γ}Β = Γ\hat{Ζ}Α + Γ\hat{Α}Ζ = 3\varphi + \varphi = 4\varphi,$$

αφού η γωνία $Α\hat{Γ}Β$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΓΖ. Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε

$$4\varphi + 4\varphi + 2\varphi = 180^\circ,$$

και άρα $\varphi = 18^\circ$. Επομένως είναι

$$Β\hat{Α}Γ = 2\cdot 18^\circ = 36^\circ \text{ και } Α\hat{Β}Γ = Α\hat{Γ}Β = 4\cdot 18^\circ = 72^\circ.$$

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 134

Δ16. Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν να τοποθετήσουμε τους 49 θετικούς ακέραιους από το 1 μέχρι και 49 στα τετράγωνα ενός πίνακα 7×7 έτσι ώστε σε κάθε κελί να περιέχεται μόνο ένας αριθμός και να μην υπάρχουν δύο πρώτοι αριθμοί σε γειτονικά κελιά.

Σημείωση, *Εδώ θεωρούμε ως γειτονικά κελιά εκείνα που έχουν κοινή πλευρά ή κοινή κορυφή.* **(ΜΟ Ρουμανίας 2024)**

Λύση. Παρατηρούμε καταρχήν ότι μεταξύ των 49 θετικών ακέραιων από το 1 μέχρι το 49 υπάρχουν οι εξής 15 πρώτοι: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Σύμφωνα με τον ορισμό των γειτονικών κελιών πρέπει οι παραπάνω πρώτοι αριθμοί να τοποθετηθούν σε κελιά που στα διπλανά με μία κοινή πλευρά ή μία κοινή κορυφή να υπάρχουν μόνο το 1 και οι σύνθετοι θετικοί ακέραιοι από το 1 μέχρι το 49. Στον πίνακα που ακολουθεί δίνουμε μία τέτοια τοποθέτηση των 15 πρώτων.

2		3		5		7
11		13		17		19
23		29		31		37
41		43		47		

Στα υπόλοιπα κελιά θα τοποθετηθούν οι υπόλοιποι 30 αριθμοί από το 1 μέχρι το 49.

Ν53. Να αποδείξετε ότι:
(α) Υπάρχουν άπειροι θετικοί ακέραιοι ν τέτοιοι ώστε ο αριθμός 2ν να είναι τέλειο τετράγωνο και ο αριθμός 3ν να είναι τέλειος κύβος.
(β) Δεν υπάρχει θετικός ακέραιος μ τέτοιος ώστε ο αριθμός $2+\mu$ να είναι τέλειο τετράγωνο και ο αριθμός 3μ να είναι τέλειος κύβος.

(ΜΟ Ρουμανίας 2024)

Λύση. (α) Για να είναι ο αριθμός 2ν τέλειο τετράγωνο πρέπει ο ν να έχει παράγοντα μία δύναμη του 2 με περιττό εκθέτη, δηλαδή το $2^{2\kappa+1}$. Επειδή ζητείται και ο αριθμός 3ν να είναι τέλειος κύβος θα πρέπει ο παράγοντας $2^{2\kappa+1}$ να είναι τέλειος κύβος, δηλαδή πρέπει ο εκθέτης $2\kappa+1$ να είναι πολλαπλάσιο του 3. Ένας τέτοιος παράγοντας είναι το $2^3=8$.

Για να είναι ο αριθμός 3ν τέλειος κύβος πρέπει ο ν να έχει παράγοντα μία δύναμη του 3 με εκθέτη της μορφής $3\lambda-1$, δηλαδή το $3^{3\lambda-1}$. Επειδή ζητείται και ο αριθμός 2ν να είναι τέλειο τετράγωνο θα πρέπει ο παράγοντας $3^{3\lambda-1}$ να είναι τέλειο τετράγωνο, δηλαδή πρέπει ο εκθέτης $3\lambda-1$ να είναι πολλαπλάσιο του 2. Ένας τέτοιος παράγοντας είναι το $3^2=9$.

Έτσι μέχρι τώρα έχει προκύψει ο αριθμός $2^3\cdot 3^2=72$.

Για την εύρεση άπειρων θετικών ακέραιων με τη ζητούμενη ιδιότητα αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το 72 με έναν παράγοντα που είναι ταυτόχρονα τέλειο τετράγωνο και τέλειος κύβος, για παράδειγμα το α^6, όπου α τυχόν ακέραιος.

(β) Έστω ότι ο αριθμός 3μ είναι τέλειος κύβος, δηλαδή $3\mu=\alpha^3$, όπου α θετικός ακέραιος, και έστω ότι και ο αριθμός $2+\mu$ είναι τέλειο τετράγωνο. Τότε έχουμε

$$3\mu=\alpha^3 \Rightarrow 3|\alpha^3 \xRightarrow{3\ \pi\rho\acute{\omega}\tau o\varsigma} 3|\alpha \Rightarrow \alpha=3\kappa, \text{όπου } \kappa \text{ θετικός ακέραιος}$$

$$\Rightarrow 3\mu=27\kappa^3 \Rightarrow \mu=\pi o\lambda.9 \Rightarrow \mu=3\rho \Rightarrow \mu+2=3\rho+2, \text{με } \rho \text{ θετικό ακέραιο,}$$

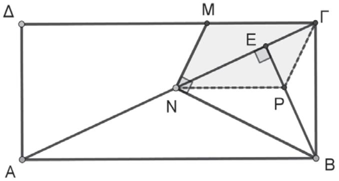
οπότε ο αριθμός $\mu+2$ δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο, το οποίο αντίκειται στην υπόθεση ότι ο αριθμός $2+\mu$ να είναι τέλειο τετράγωνο.
Πράγματι, ο τυχόν θετικός ακέραιος x παίρνει τη μορφή $x=3\kappa+\upsilon, \upsilon\in\{0,1,2\}$, οπότε

$$x^2=\pi o\lambda.3+\upsilon^2=\pi o\lambda.3+1.$$

Γ67. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, σημεία Μ πάνω στην πλευρά ΓΔ και τα σημεία Ε και Ν πάνω στη διαγώνιο ΑΓ, έτσι ώστε $ΒΕ \perp ΑΓ$ και $\frac{ΓΜ}{ΓΔ}=\frac{ΕΝ}{ΕΑ}$. Αν οι ευθείες ΜΝ και ΝΒ είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

(ΜΟ Ρουμανίας 2024)

Λύση. Από το Ν φέρουμε παράλληλη προς τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ η οποία τέμνει την ευθεία ΒΕ, έστω στο σημείο Ρ.



Από τα όμοια τρίγωνα ΕΝΡ και ΕΑΒ έχουμε

$$\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{EN}}{\mathrm{EA}}\Rightarrow\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{AB}}=\frac{\Gamma\mathrm{M}}{\Gamma\Delta}=\frac{\Gamma\mathrm{M}}{\mathrm{AB}}\Rightarrow \mathrm{NP}=\Gamma\mathrm{M}.$$

Επειδή ΝΡ ∥= ΓΜ το τετράπλευρο ΜΝΡΓ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε ΓΡ∥ ΜΝ και επειδή από την υπόθεση οι ευθείες ΜΝ και ΝΒ είναι κάθετες, έπεται ότι ΓΡ⊥ ΝΒ. Επομένως το σημείο Ρ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΓΝΒ, οπότε θα είναι και ΝΡ⊥ ΓΒ ⇒ ΜΓ ⊥ ΓΒ, οπότε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

Ασκήσεις για λύση

Α84. Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού k για τις οποίες το σύστημα

$$kx-y=-\frac{1}{3},$$

$$6x+3y=1,$$

(α) έχει μοναδική λύση, (β) δεν έχει λύση και (γ) έχει απειρία λύσεων

Α85. Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου $a\in\mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα με αγνώστους x,y

$$x+2y=a+6,$$

$$2x-y=25-2a,$$

έχει μία λύση (x,y), με x,y θετικούς ακέραιους.

Α86. Αν οι πραγματικοί αριθμοί x,y,z ικανοποιούν το σύστημα των εξισώσεων

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=0,\qquad \frac{1}{x}-\frac{6}{y}-\frac{5}{z}=0,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$P(x,y,z)=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}.$$

Α87. Να λύσετε το σύστημα των εξισώσεων

$$\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}=\frac{1}{2},\qquad \frac{1}{y}+\frac{1}{z+x}=\frac{1}{3},\qquad \frac{1}{z}+\frac{1}{x+y}=\frac{1}{4}\right\}.$$

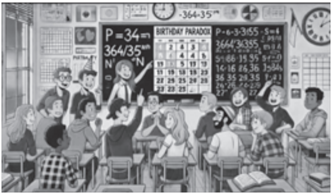
Το Πρόβλημα των Γενεθλίων

Πόσο πιθανό είναι να έχουμε την ίδια μέρα γενέθλια;

Γρυπάρης Παντελής - Διαμαντίδης Δημήτρης

Ας πούμε ότι βρισκόμαστε σε μια τάξη με μαθητές[1]. Κάποιοι από αυτούς είναι πιθανό να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα. Μπορεί να βρεθούν δύο παιδιά να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα; Μπορεί με τη λογική μας να μην το πιστεύουμε. Όμως, το διάσημο "Πρόβλημα των Γενεθλίων" δείχνει κάτι πολύ διαφορετικό!

Τι Είναι το Πρόβλημα των Γενεθλίων;



Το Πρόβλημα των Γενεθλίων είναι ένα μαθηματικό πρόβλημα που με τη λύση του στοχεύουμε στην εξής ερώτηση: Αν σε μια ομάδα ανθρώπων, π.χ. σε μια τάξη, επιλέξεις δύο τυχαία άτομα, ποια είναι η πιθανότητα να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα;

Η "Έκπληξη" της Πιθανότητας

Αρχικά, μπορεί να πιστεύεις ότι η πιθανότητα είναι πολύ μικρή, ειδικά αν σκεφτείς ότι υπάρχουν 365 ημέρες σε ένα χρόνο. Καθώς αυξάνεται ο αριθμός των μαθητών στην τάξη, αυξάνεται και η πιθανότητα να υπάρχουν δύο άτομα με την ίδια ημερομηνία γέννησης, αλλά η σχέση αυτή δεν είναι γραμμική (δηλαδή δεν υπάρχει αναλογία). Ας το δούμε αναλυτικά:

- Με 10 μαθητές στην τάξη, η πιθανότητα είναι περίπου 12%.
- Με 20 μαθητές στην τάξη, η πιθανότητα είναι περίπου 41%.
- Με 23 μαθητές στην τάξη, η πιθανότητα είναι περίπου 50%.

Αυτό σημαίνει ότι σε 1 στις 2 τάξεις με 23 μαθητές, αναμένεται να υπάρχουν μαθητές που έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα!

- Με 30 μαθητές στην τάξη, η πιθανότητα ανεβαίνει στο 70%.
- Με 40 μαθητές στην τάξη, η πιθανότητα είναι πάνω από 90%.
- Με 50 μαθητές στην τάξη, η πιθανότητα είναι περίπου 97%.

Ας υποθέσουμε ότι ένα σχολείο έχει 200 μαθητές. Είναι σχεδόν βέβαιο ότι όχι μόνο ότι θα βρούμε δύο μαθητές με γενέθλια την ίδια ημέρα, αλλά πιθανότατα ότι θα βρούμε πολλούς! Εδώ, η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον δύο μαθητές με τα ίδια γενέθλια είναι σχεδόν 100% και υπάρχει αρκετά μεγάλη πιθανότητα να υπάρχουν ακόμη και τρία ή τέσσερα ζευγάρια μαθητών με την ίδια ημέρα γενεθλίων.

Γιατί Συμβαίνει Αυτό;

Ας δούμε πιο αναλυτικά γιατί το "Πρόβλημα των Γενεθλίων" έχει τα παραπάνω αποτελέσματα και πώς η πιθανότητα να βρεις, σε μια ομάδα ατόμων, δύο άτομα με τα ίδια γενέθλια αυξάνεται όσο μεγαλώνει το πλήθος της ομάδας. Θα το εξηγήσουμε χρησιμοποιώντας απλά Μαθηματικά, που σε επίπεδο υπολογισμών είναι γνωστά από το Δημοτικό.

Βασικές Αρχές Πιθανοτήτων

Πρώτα, ας θυμηθούμε τι είναι η «Πιθανότητα», στα Μαθηματικά. Για παράδειγμα, αν στρίψουμε

[1] Εννοούμε μαθητές και μαθήτριες, αλλά για λόγους συντομίας χρησιμοποιούμε τον όρο «μαθητές».

ένα κέρμα, τότε ως Πιθανότητα να έρθει «Γράμματα» ονομάζουμε έναν αριθμό που αντιστοιχεί στο πόσο βέβαιοι είμαστε ότι θα έρθει Γράμματα. Συγκεκριμένα, αν στρίψουμε ένα κέρμα, έχουμε δύο πιθανά αποτελέσματα: «Κεφαλή» ή «Γράμματα». Αν επιπλέον το κέρμα είναι, όπως λέμε «τίμιο», τότε δεν έχουμε λόγο να θεωρούμε ότι η μία πλευρά από τις δύο είναι πιο πιθανό να εμφανιστεί. Άρα, όπως λέμε τα δύο αποτελέσματα είναι «ισοπίθανα» και η πιθανότητα να εμφανιστεί «Κεφαλή» είναι μία στις δύο και επομένως $\frac{1}{2}$ (ή 50%). Αντίστοιχα $\frac{1}{2}$ είναι και η πιθανότητα του αποτελέσματος «Γράμματα».

Αν ρίξουμε ένα συνηθισμένο, τίμιο ζάρι, τότε υπάρχουν έξι δυνατά αποτελέσματα: τα 1, 2, 3, 4, 5 και 6, τα οποία είναι ισοπίθανα. Η πιθανότητα να έρθει κάθε ένα από τα αποτελέσματα, π.χ. το 3, είναι $\frac{1}{6}$, ενώ η πιθανότητα να μην έρθει 3 υπολογίζεται με δύο τρόπους:

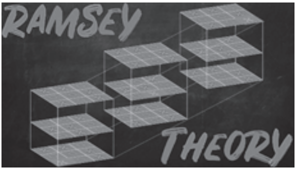
- **Α΄ τρόπος:** αν δεν έρθει 3, τότε έρχεται 1 ή 2 ή 4 ή 5 ή 6. Δηλαδή υπάρχουν πέντε ισοπίθανα αποτελέσματα, για να μην έρθει 3. Γράφουμε $\frac{\textit{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων}}{\textit{πλήθος όλων των αποτελεσμάτων}}$ και αντικαθιστώντας βρίσκουμε $\frac{5}{6}$.
- **Β΄ τρόπος:** αφαιρούμε από το 1, την πιθανότητα να έρθει 3, άρα υπολογίζουμε $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

Γενικά, όσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα ενός ενδεχόμενου, τόσο πιο βέβαιοι είμαστε ότι θα συμβεί το ενδεχόμενο αυτό. Ο μεγαλύτερος βαθμός βεβαιότητας είναι 1 και ο μικρότερος είναι 0.

Υπολογίζοντας τις Πιθανότητες Γενεθλίων

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μόνο 2 μαθητές σε μια τάξη. Ποια είναι η πιθανότητα να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα; Επισημαίνουμε ότι είναι ευκολότερο να απαντήσουμε στο ερώτημα «ποια είναι η πιθανότητα να **μην** έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα». Στη συνέχεια θα απαντήσουμε το αρχικό ερώτημα του προβλήματος. Για λόγους απλότητας θα λύσουμε το πρόβλημα με την υπόθεση ότι οι μαθητές έχουν γεννηθεί σε έτος που δεν είναι δίσεκτο, άρα έχει 365 ημέρες.

Κάθε ένας από του δύο μπορεί να έχει γενέθλια οποιαδήποτε ημέρα από τις 365, ενός έτους.



Άρα, ο πρώτος μαθητής, από τους δύο μπορεί να έχει γενέθλια οποιαδήποτε από τις 365 ημέρες του χρόνου. Ο δεύτερος μαθητής, για να μην έχει τα ίδια γενέθλια με τον πρώτο, θα πρέπει να έχει γενέθλια μια από τις 364 υπόλοιπες ημέρες.

Επομένως η πιθανότητα να **μην** έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα αντιστοιχεί στην πιθανότητα ο δεύτερος μαθητής να έχει γενέθλια διαφορετική ημέρα από τον πρώτο, δηλαδή $\frac{364}{365}$.

Στη συνέχεια απαντούμε το αρχικό ερώτημα:

Η πιθανότητα οι δύο μαθητές **να έχουν** γενέθλια την ίδια ημέρα είναι $1-\frac{364}{365}=\frac{1}{365}\approx 0{,}27\%$

Πρόκειται για πολύ μικρή πιθανότητα, περίπου 0,27%.

Όταν έχουμε τάξεις με περισσότερους μαθητές

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε 3 μαθητές σε μια τάξη. Ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον 2 από αυτούς να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα; Θα εργαστούμε με τον ίδιο τρόπο. Αρχικά θα υπολογίσουμε την πιθανότητα να **μην** έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα και στη συνέχεια θα απαντήσουμε στο αρχικό πρόβλημα.

Ο πρώτος μαθητής μπορεί να έχει γενέθλια οποιαδήποτε από τις 365 ημέρες του χρόνου.

Πριν προχωρήσουμε ας σκεφτούμε το εξής: Αν επιλέξουμε τυχαία δύο ημερομηνίες πόσα ζεύγη ημερομηνιών μπορούμε να έχουμε; Π.χ. ένα ζεύγος μπορεί να είναι 10 Ιουνίου και 5 Αυγούστου, ένα άλλο 12 Ιουλίου και 20 Ιανουαρίου, ενώ μπορεί να έχουμε και ένα ζεύγος με την ίδια ημερομηνία, όπως 10 Μαΐου και 10 Μαΐου. Εφόσον το ημερολόγιο έχει 365 διαφορετικές ημερομηνίες, τα ζεύγη είναι $365 \cdot 365$. Έτσι το πλήθος των πιθανών ζευγών γενεθλίων για δύο μαθητές είναι επίσης $365 \cdot 365$.

Ας επιστρέψουμε τώρα στο ερώτημά μας. Ο δεύτερος μαθητής πρέπει να έχει γενέθλια σε μια από τις 364 άλλες ημέρες (διαφορετικές από τον πρώτο).

Για τα γενέθλια του τρίτου μαθητή υπάρχουν 363 διαθέσιμες ημέρες, ώστε να μην έχει τα ίδια γενέθλια με τους άλλους δύο. Επομένως, για κάθε μια από τις 364 ημέρες του δεύτερου υπάρχουν 363 ημέρες για τον τρίτο. Αν συνδυάσουμε όλες τις περιπτώσεις για τον δεύτερο και τον τρίτο υπάρχουν $364 \cdot 363$ περιπτώσεις. Έτσι η πιθανότητα ο δεύτερος και ο τρίτος να έχουν γενέθλια διαφορετική ημέρα από τον πρώτο και μεταξύ τους είναι $\frac{364 \cdot 363}{365 \cdot 365}$ ή αλλιώς $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$.

Η πιθανότητα να μην συμβεί αυτό είναι $1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$.

Ωστόσο, αν δεν συμβεί αυτό, τότε σημαίνει ότι τουλάχιστον δύο από αυτούς έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα. Άρα, η πιθανότητα δύο τουλάχιστον μαθητές να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα είναι:$1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$. Καθώς αυξάνουμε το πλήθος των μαθητών της τάξης, η πιθανότητα να έχουν διαφορετικά γενέθλια μικραίνει. Με 4 μαθητές, η πιθανότητα αυτή είναι: $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365}$

Συνεπώς, αντίθετα, η πιθανότητα να έχουν τα ίδια γενέθλια 2 από αυτούς τους 4 μαθητές είναι:

$$1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365}$$

Ποιες είναι οι αντίστοιχες πιθανότητες για τάξη με 23 μαθητές;

Για μια τάξη με 23 μαθητές, το πράγμα γίνεται πιο εντυπωσιακό. Η πιθανότητα <u>όλοι</u> να έχουν διαφορετικά γενέθλια είναι: $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdots\cdots\cdots \frac{343}{365} \approx 0{,}4927$

Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον <u>δύο</u> μαθητές από αυτούς να έχουν τα ίδια γενέθλια είναι: 1−0,4927=0,5073 Δηλαδή περίπου 50%.

Γιατί Αυξάνεται η Πιθανότητα;

Η πιθανότητα αυξάνεται τόσο πολύ, γιατί με κάθε νέο μαθητή προστίθενται πολλές νέες ευκαιρίες για να υπάρχουν κοινά γενέθλια. Για παράδειγμα, σε μια τάξη με 10 μαθητές υπάρχουν 45 δυνατά ζευγάρια μαθητών ενώ σε μια τάξη με 23 μαθητές, υπάρχουν 253 δυνατά διαφορετικά **ζευγάρια μαθητών**! Όταν έχουμε πολλά δυνατά ζευγάρια, είναι πολύ πιο πιθανό να συμπέσουν τα γενέθλια δύο μαθητών. Και πάντως, όταν από τα 45 πάμε στα 253 δυνατά ζευγάρια, τότε η πιθανότητα για κοινά γενέθλια αυξάνεται σημαντικά. Αυτός είναι ο λόγος που η πιθανότητα είναι τόσο μεγάλη ακόμα και με έναν σχετικά μικρό αριθμό μαθητών, όπως 23.

Τι Σημαίνει "Ζευγάρι Μαθητών";

Όταν λέμε "ζευγάρι μαθητών", εννοούμε ότι διαλέγουμε δύο μαθητές από την τάξη. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα το κάνουμε για να συγκρίνουμε τα γενέθλιά τους. Για παράδειγμα, αν η τάξη έχει 23 μαθητές, μπορούμε να επιλέξουμε δύο από αυτούς, την Ουρανία και την Ευγενία, και να δούμε αν έχουν τα ίδια γενέθλια.

Πώς Βρίσκουμε τον Αριθμό των Ζευγαριών;

Ας υποθέσουμε ότι στεκόμαστε μπροστά σε 23 μαθητές και πρέπει να επιλέξουμε δύο από αυτούς. Ας δούμε πώς μπορούμε να το κάνουμε βήμα-βήμα:

1. **Επιλέγουμε τον πρώτο μαθητή:** Έχουμε 23 επιλογές (μπορούμε να επιλέξουμε οποιονδήποτε από τους 23 μαθητές).
2. **Επιλέγουμε τον δεύτερο μαθητή:** Πρέπει να είναι διαφορετικός από τον πρώτο. Άρα, έχουμε 22 επιλογές για τον δεύτερο μαθητή, δηλαδή 1 λιγότερη, εξαιρώντας τον μαθητή που έχουμε ήδη επιλέξει.

Τώρα, αν προσπαθήσουμε να φτιάξουμε ένα ζευγάρι με κάθε πιθανό τρόπο, έχουμε πολλές περιπτώσεις. Για παράδειγμα:

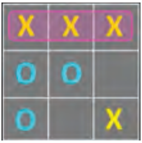
- Αν διαλέξουμε πρώτα την Ουρανία και μετά την Ευγενία, έχουμε ένα ζευγάρι (Ουρανία-Ευγενία).
- Αν διαλέξουμε πρώτα την Ευγενία και μετά την Ουρανία, έχουμε το ίδιο ζευγάρι (Ευγενία-Ουρανία).

Αλλά επειδή το ζευγάρι Ουρανία-Ευγενία είναι το ίδιο με το ζευγάρι Ευγενία-Ουρανία, θα πρέπει να μετρήσουμε κάθε ζευγάρι μόνο μία φορά.

Ας Υπολογίσουμε τον Αριθμό των Ζευγαριών

Αν προσπαθούσαμε να μετρήσουμε όλα τα ζευγάρια με το χέρι, σίγουρα θα ήταν πολλή και χρονοβόρα δουλειά. Ωστόσο, υπάρχει ένας πιο απλός τρόπος να κάνουμε αυτόν τον υπολογισμό:

- **Πρώτο βήμα:** Για τον πρώτο μαθητή έχεις 23 επιλογές.
- **Δεύτερο βήμα:** Για τον δεύτερο μαθητή έχεις 22 επιλογές.



Αν πολλαπλασιάσουμε αυτούς τους αριθμούς, βρίσκουμε $23 \cdot 22$.
Ας θυμηθούμε όμως ότι κάθε ζευγάρι μετρήθηκε δύο φορές (π.χ., Ουρανία-Ευγενία και Ευγενία-Ουρανία), οπότε πρέπει να διαιρέσουμε αυτόν τον αριθμό δια 2 για να υπολογίσουμε το πλήθος των ζευγαριών, εφόσον δεν μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής των μαθητών: $506 \div 2 = 253$

Άρα, υπάρχουν 253 διαφορετικά ζευγάρια που μπορούμε να φτιάξουμε από μια τάξη με 23 μαθητές. Κάθε ένα από αυτά τα ζευγάρια είναι μια ευκαιρία να βρούμε δύο μαθητές με τα ίδια γενέθλια.

Συμπέρασμα

Στον μεγάλο αριθμό ζευγαριών (253) βρίσκεται ο λόγος που, σε μια τάξη με 23 μαθητές, οι πιθανότητες να βρούμε δύο με τα ίδια γενέθλια είναι τόσο υψηλές!

Πείραμα στην Τάξη

Μπορείς να δοκιμάσεις το Πρόβλημα των Γενεθλίων στην τάξη σου! Ρώτησε όλους τους συμμαθητές σου πότε έχουν γενέθλια και δες αν υπάρχουν κοινές ημερομηνίες. Θα εκπλαγείς πόσο συχνά συμβαίνει!

Το Πρόβλημα των Γενεθλίων είναι μια διασκεδαστική μαθηματική πρόκληση, με εντυπωσιακά αποτελέσματα, που δείχνει πώς οι πιθανότητες μπορούν να μας κάνουν να δούμε τα πράγματα με έναν εντελώς διαφορετικό τρόπο. Οπότε την επόμενη φορά που θα είσαι σε μια τάξη γεμάτη μαθητές, θυμήσου: μπορεί να έχεις περισσότερο κοινά με τους συμμαθητές σου από ό,τι νομίζεις!
Σημ. Το παράδοξο αυτό πρόβλημα θα το βρείτε και στην έκδοση της ΕΜΕ «Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν».

Εφαρμογές της τριγωνομετρίας σε άλλα πεδία

Γκιουλέκα Αλεξάνδρα-Γρυπάρης Παντελής

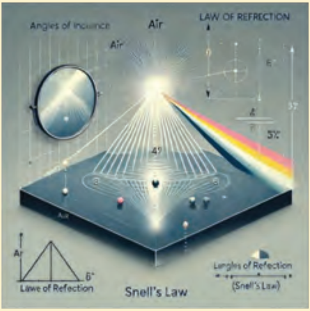
Η τριγωνομετρία είναι μια συναρπαστική πτυχή των μαθηματικών που μας βοηθά να κατανοήσουμε τον κόσμο γύρω μας με τρόπους που ίσως δεν φανταζόμαστε. Από την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο το φως ταξιδεύει ή δημιουργεί το ουράνιο τόξο, μέχρι την πλοήγηση στη θάλασσα και την εξερεύνηση του σύμπαντος, οι εφαρμογές της τριγωνομετρίας είναι αμέτρητες. Στο άρθρο που ακολουθεί, θα δούμε πώς αυτό το μαθηματικό εργαλείο έχει επηρεάσει τη ναυτιλία, την αστρονομία, αλλά και την καθημερινότητά μας. Ας ανακαλύψουμε τις γωνίες και τις αποστάσεις που κρύβονται παντού γύρω μας!

Τριγωνομετρία: Ένα μαθηματικό εργαλείο που αλλάζει τον κόσμο

Σκεφτείτε έναν καπετάνιο που διασχίζει τον ωκεανό τη νύχτα, έναν επιστήμονα που παρατηρεί τους πλανήτες ή έναν τεχνικό που σχεδιάζει συστήματα οπτικών ινών. Τι κοινό έχουν μεταξύ τους; Όλοι χρησιμοποιούν την τριγωνομετρία, ένα μαθηματικό εργαλείο που μας βοηθά να κατανοήσουμε τον χώρο, το φως και τα αστέρια.

Η Τριγωνομετρία στην οπτική: το φως ως τρίγωνο

Η οπτική, η οποία είναι κλάδος της φυσικής που ασχολείται με τη μελέτη του φωτός, βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στις αρχές της τριγωνομετρίας. Μέσα από μαθηματικούς υπολογισμούς, η τριγωνομετρία επιτρέπει την κατανόηση φαινομένων όπως για παράδειγμα η διάθλαση, η ανάκλαση και η ανάλυση του φωτός.



Διάθλαση: το φως αλλάζει πορεία

Η διάθλαση είναι το φαινόμενο κατά το οποίο το φως αλλάζει κατεύθυνση όταν περνά από ένα μέσο σε ένα άλλο (π.χ., από τον αέρα στο νερό).

- Η γωνία με την οποία το φως εισέρχεται στο νέο μέσο, καθώς και η γωνία με την οποία εξέρχεται, υπολογίζονται με τη βοήθεια της τριγωνομετρικής συνάρτησης του ημιτόνου (sin).
- Ο **νόμος του Snell** μας δίνει τη σχέση: $n_1 * \sin(\theta_1) = n_2 * \sin(\theta_2)$ όπου n_1 και n_2 είναι οι δείκτες διάθλασης των δύο μέσων, και θ_1, θ_2 είναι οι γωνίες πρόσπτωσης και διάθλασης.

Παράδειγμα: Όταν μια ακτίνα φωτός πέφτει λοξά σε μία γυάλινη επιφάνεια, η γωνία διάθλασης υπολογίζεται ώστε να προβλεφθεί πώς το φως θα ταξιδέψει μέσα στο γυαλί.

Ανάκλαση: το φως επιστρέφει

Όταν μια ακτίνα φωτός προσπίπτει σε μια λεία επιφάνεια (π.χ. καθρέφτης), η ανάκλαση ακολουθεί συγκεκριμένους γεωμετρικούς κανόνες:

- Η γωνία πρόσπτωσης (θ_i) είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης (θ_r).
- Οι μαθηματικοί υπολογισμοί για την κατεύθυνση της ανακλώμενης ακτίνας βασίζονται στη χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων, ιδίως όταν μελετώνται πολλαπλές ανακλάσεις σε καμπύλες επιφάνειες.

Ανάλυση του φωτός: το πρίσμα και το ουράνιο τόξο

Όταν το φως περνά μέσα από ένα πρίσμα, διαχωρίζεται στα χρώματα του φάσματος λόγω της διάθλασης.

- Κάθε χρώμα του φωτός έχει διαφορετικό μήκος κύματος και επομένως διαφορετικό δείκτη διάθλασης.
- Οι γωνίες διάθλασης υπολογίζονται ξεχωριστά για κάθε μήκος κύματος με τη χρήση τριγωνομετρίας.

Πείραμα: Εάν τοποθετήσουμε μια ακτίνα φωτός υπό συγκεκριμένη γωνία σε ένα γυάλινο πρίσμα, παρατηρούμε ότι διαχωρίζεται στα χρώματα του ουράνιου τόξου. Η κατεύθυνση κάθε χρώματος μπορεί να προβλεφθεί με τριγωνομετρικές σχέσεις.

Η Τριγωνομετρία στη Ναυτιλία: Ο καπετάνιος και τα αστέρια

Πριν από την εποχή της εφαρμογής google maps και γενικότερα των GPS, οι ναυτικοί χρησιμοποιούσαν την τριγωνομετρία για να πλοηγηθούν στη θάλασσα. Πώς; Οι ναυτικοί υπολόγιζαν τη θέση τους σε σχέση με τα αστέρια. Χρησιμοποιούσαν έναν εξάντα το οποίο είναι ένα όργανο πλοήγησης που χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της γωνίας μεταξύ δύο ορατών αντικειμένων, συνήθως του Ήλιου ή κάποιου άστρου και του ορίζοντα. Με αυτό το εργαλείο, τόσο οι ναυτικοί όσο και οι εξερευνητές προσδιόριζαν τη γεωγραφική τους θέση (γεωγραφικό πλάτος) ενώ βρίσκονταν στη θάλασσα, πολύ πριν την εμφάνιση της σύγχρονης τεχνολογίας GPS.

Παρόμοια, οι χάρτες που σχεδιάστηκαν για τη ναυσιπλοΐα απαιτούσαν ακριβείς γωνίες και κατευθύνσεις, ώστε οι ναυτικοί να μπορούν να καθορίσουν την πορεία. Οι πρώτοι ναυτικοί χάρτες περιλάμβαναν δίκτυα γεωγραφικού πλάτους και μήκους, τα οποία βασίζονταν σε γωνιακές μετρήσεις. Συγκεκριμένα, οι γραμμές γεωγραφικού πλάτους (παράλληλοι) σχηματίζουν κύκλους γύρω από τη Γη και οι γραμμές γεωγραφικού μήκους (μεσημβρινοί) συγκλίνουν στους πόλους. Η θέση κάθε σημείου προσδιορίζεται μέσω γωνιών που υπολογίζονται με τριγωνομετρικές αναλογίες. Αντίστοιχα, οι ναυτικοί χάρτες, όπως αυτοί που χρησιμοποιούνταν από τους εξερευνητές κατά τον 15^{o} και 16^{o} αιώνα, περιλάμβαναν ρόμβους, δηλαδή κατευθυντήριες γραμμές που βασίζονταν σε γωνίες για τον υπολογισμό της πορείας και αποστάσεις μετρούμενες σε ναυτικά μίλια, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Πυθαγόρα και με τη βοήθεια τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Η Τριγωνομετρία στην αστρονομία: τα μυστικά των αστεριών

Η τριγωνομετρία είναι το κλειδί για την κατανόηση του Σύμπαντος. Οι αστρονόμοι χρησιμοποιούν τη μέθοδο της παράλλαξης για να υπολογίσουν την απόσταση των άστρων από τη Γη. Μετρώντας την γωνία μεταξύ δύο παρατηρήσεων από διαφορετικές θέσεις, σχηματίζουν ένα νοητό τρίγωνο. Επίσης, οι τροχιές των πλανητών και οι φάσεις της Σελήνης περιγράφονται με τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον γεγονός είναι ότι το 2022, με τη χρήση της τριγωνομετρίας, οι επιστήμονες υπολόγισαν την απόσταση του μακρινού γαλαξία GN-z11, ο οποίος βρίσκεται 13,4 δισεκατομμύρια έτη φωτός μακριά!

Η Τριγωνομετρία στα Βιντεοπαιχνίδια και την Εικονική Πραγματικότητα (Virtual Reality)

Η εικονική πραγματικότητα (VR) και τα βιντεοπαιχνίδια αποτελούν δύο από τις πιο σύγχρονες και τεχνολογικά προηγμένες εφαρμογές της τριγωνομετρίας. Κάθε πτυχή αυτών των ψηφιακών κόσμων, από τις κινήσεις των χαρακτήρων μέχρι τον φωτισμό και τις σκιές, βασίζεται σε τριγωνομετρικούς υπολογισμούς για να δημιουργήσει μια ρεαλιστική και καθηλωτική εμπειρία.

Κινηματογραφικές Γωνίες και Κάμερα: Όταν ο παίκτης κινεί το ποντίκι, η κάμερα περιστρέφεται γύρω από τον χαρακτήρα. Οι γωνίες περιστροφής καθορίζονται από τριγωνομετρικές συναρτήσεις όπως το συνημίτονο και το ημίτονο.

Εστίαση σε Αντικείμενα: Σε σκηνές που απαιτούν να δούμε ένα συγκεκριμένο αντικείμενο από κοντά, η κάμερα μετακινείται και στρέφεται με βάση τριγωνομετρικούς υπολογισμούς για να προσαρμόσει την προοπτική.

Παράδειγμα: Όταν ένας παίκτης κοιτάζει προς τα πάνω ή προς τα κάτω, η κάμερα υπολογίζει τη γωνία ανύψωσης χρησιμοποιώντας την απόσταση του αντικειμένου και τη θέση του παίκτη.

Πλοήγηση και Στόχευση: Όταν ένας χαρακτήρας κινείται ή στοχεύει, η τριγωνομετρία παίζει καθοριστικό ρόλο για να καθορίσει την κατεύθυνση και την απόσταση.

Κατεύθυνση Κίνησης: Στα παιχνίδια, ο προσανατολισμός ενός χαρακτήρα εξαρτάται από την κατεύθυνση προς την οποία κινείται. Η γωνία που σχηματίζεται με βάση τον άξονα x ή y υπολογίζεται με τη χρήση της εφαπτομένης.

Στόχευση: Όταν ένας χαρακτήρας πρέπει να πετύχει έναν στόχο σε απόσταση, το παιχνίδι υπολογίζει τη γωνία εκτόξευσης ή βολής με βάση το ύψος του στόχου και την απόσταση του παίκτη από αυτόν.

Παράδειγμα: Σε ένα παιχνίδι τοξοβολίας, η γωνία και η ταχύτητα της βολής καθορίζονται μέσω τριγωνομετρικών εξισώσεων για να διασφαλιστεί ότι το βέλος φτάνει στο στόχο.

Γιατί να μη δούμε τον κόσμο μέσα από τα μάτια των επιστημόνων; Εξερευνήστε το φως και τον τρόπο που αλλάζει πορεία μέσα από διάφορα υλικά. Μετρήστε τις γωνίες που σχηματίζουν τα τρίγωνα στον ουρανό και στη θάλασσα. Κατανοήστε όχι μόνο τη Γη αλλά και τα μακρινά αστέρια και γαλαξίες. Μέσα από την τριγωνομετρία, ανοίγουμε μια πόρτα σε έναν αόρατο κόσμο που γίνεται κατανοητός και μετρήσιμος.

Η τριγωνομετρία δεν είναι μόνο παντού – είναι επίσης το κλειδί για να συνδέσουμε τη φαντασία με την πραγματικότητα, τη θεωρία με την πράξη. Με τις γνώσεις που αποκτάμε, μπορούμε να ξεπεράσουμε τα όρια του γνωστού και να ονειρευτούμε νέους τρόπους για να εξερευνήσουμε, να δημιουργήσουμε και να κατανοήσουμε. Εσείς έχετε τα εργαλεία για να ξεκινήσετε αυτό το συναρπαστικό ταξίδι. Ας κάνουμε τα μαθηματικά ένα μέσο για να κατακτήσουμε τον κόσμο!

Η Χιονάτη και οι Άπειροι Νάνοι

Ηλίας Κωνσταντόπουλος

Η Χιονάτη δεν είχε φίλους μόνο τους εφτά Νάνους. Αυτό είναι ένα παραμύθι! Ούτε την κυνηγούσε η κακιά βασίλισσα. Αυτό και αν είναι παραμύθι! Μόνη της κατέφυγε στο δάσος, γιατί βαρέθηκε τη ζωή στην πόλη και τους ανθρώπους. Βρήκε το σπιτάκι των επτά Νάνων, της άρεσε και έμεινε εκεί. Μόλις οι Νάνοι γύρισαν στο σπίτι και είδαν την ομορφιά της, όχι μόνο δεν την έδιωξαν, αλλά την παρακάλεσαν να μείνει εκεί, στο

σπίτι τους. Ήθελαν μόνο να τη βλέπουν και να της τραγουδούν. Αυτοί θα έκτιζαν επτά σπιτάκια γύρω από το δικό της, ώστε να μένουν σ' αυτά και να την προσέχουν από τα κακά πνεύματα του δάσους. Έτσι και έγινε. Η Χιονάτη έμεινε στο σπίτι των Νάνων, το έκανε δικό της και ζούσε ευτυχισμένη. Το ίδιο και οι Νάνοι. Παράτησαν όλες τις δουλειές τους και έγιναν υπηρέτες της Χιονάτης. Η φήμη της ομορφιάς της εξαπλώθηκε σ' όλο το δάσος, όπου υπήρχαν και άλλοι πολλοί Νάνοι.

Άρχισαν να μαζεύονται όλο και περισσότεροι. Μαζί και τα ξωτικά. Ήθελαν όλοι να ζήσουν κοντά στην πανέμορφη Χιονάτη. Καθένας καινούργιος που κατέφθανε έκτιζε ένα σπιτάκι κοντά στο αρχικό σπίτι των επτά Νάνων και καθόταν και τη θαύμαζε. Άφησαν όλοι τις δουλειές τους, δεν ενδιαφέρονταν για τίποτε άλλο. Έτσι σε λίγο το δάσος γέμισε από μικρά σπιτάκια. Ήταν τόσο πολλά που ο κάθε Νάνος δεν μπορούσε να βρει το δικό του. Πλήθυναν πάρα πολύ, έγιναν άπειρα! Οι Νάνοι ήταν σε απελπισία. Όλη την ημέρα περίμεναν στην ουρά για να περάσουν λίγες στιγμές με την Χιονάτη, αλλά το βράδυ που ήθελαν να πάνε στα σπιτάκια τους να κοιμηθούν, δεν τα εύρισκαν. Πήγαν να ρωτήσουν τους αρχικούς επτά Νάνους, τους κολλητούς της Χιονάτης, αλλά ούτε αυτοί μπόρεσαν να δώσουν λύση. Ζήτησαν τη βοήθεια της Χιονάτης η οποία σκέφτηκε λίγο και τους είπε:

- Να βάλετε έναν αριθμό σε κάθε σπίτι. Θα θυμάστε τον αριθμό του δικού σας σπιτιού και έτσι θα το βρίσκετε εύκολα.
- Έχουμε όμως τόσους αριθμούς, τη ρώτησαν.
- Ου, πάρα πολλούς, όσους θέλετε, ξεκινήστε από το ένα και όπου φτάσετε.
- Μα τα σπίτια μας είναι άπειρα, τόλμησε να ψελλίσει ένας Νάνος.
- Και οι αριθμοί επίσης, είπε η Χιονάτη. Αύριο πρωί – πρωί ξεκινήστε και βάψτε έναν αριθμό στο κάθε σπίτι. Προσοχή όμως! Ο καθένας να θυμάται τον αριθμό του.

Οι Νάνοι θαύμασαν την εξυπνάδα της αγαπημένης τους. Εκτός από όμορφη είναι και έξυπνη, σκέφτηκαν και ένοιωσαν πιο ευτυχισμένοι. Το βράδυ αυτό κοιμήθηκαν όπου – όπου και το πρωί άρχισαν να βάφουν στην πόρτα κάθε σπιτιού από έναν αριθμό. Ξεκίνησαν από το 1, στη συνέχεια το 2, μετά το 3, το 4 , το 5, …Σε κάθε σπιτάκι με αριθμό, έμπαινε μέσα ένας Νάνος τύπωνε τον αριθμό στο μυαλό του και το κατοχύρωνε. Οι υπόλοιποι συνέχιζαν. Έφτασαν τον αριθμό 1000, 100000, 1000000. Αλλά ούτε οι Νάνοι τελείωναν, ούτε τα σπίτια, ούτε φυσικά οι αριθμοί.

Συνέχιζαν, συνέχιζαν, συνέχιζαν! Έφτασαν μέχρι το άπειρο. Ε, κάποια στιγμή τακτοποιήθηκαν όλοι. Έτσι τώρα, στο τέλος κάθε ημέρας, μπορούσε ο καθένας να βρει το σπιτάκι του. Τώρα περνούσαν όμορφα τις ημέρες τους. Η φήμη όμως της Χιονάτης αυξανόταν. Την επόμενη ημέρα ήρθε ένας καινούργιος Νάνος. Οι εφτά Νάνοι που ήταν υπεύθυνοι όλης της κοινότητας τρομοκρατήθηκαν.

- Πού θα τον βάλουμε να κοιμηθεί, αναρωτήθηκαν. Όλα τα σπιτάκια είναι πιασμένα. Έσπασαν το μυαλό τους να βρουν λύση, αλλά μάταια. Κατέφυγαν πάλι στη Χιονάτη.

- Εύκολο, είπε αυτή. Ακούστε τι θα κάνουμε. Ο Νάνος που μένει στο σπιτάκι με τον αριθμό 1, θα μετακινηθεί στο σπιτάκι με τον αριθμό 2, αυτός που μένει στο 2, θα πάει στο 3, αυτός που μένει στο 3 θα πάει στο 4. Όλοι θα μετακινηθούν στο επόμενο σπιτάκι από αυτό που μένουν.
- Έτσι θα αλλάξουμε όλοι αριθμό, διαμαρτυρήθηκε ένας Νάνος.
- Σωστά, αυτό είναι ένα θέμα. Θα πρέπει όλοι να θυμάστε τον καινούργιο σας αριθμό. Αλλά έτσι θα λύσουμε το πρόβλημά μας. Το σπιτάκι με τον αριθμό 1 θα μείνει ελεύθερο και μπορούμε να φιλοξενήσουμε το καινούργιο μέλος της παρέας μας.

Οι Νάνοι έμειναν άφωνοι από την εξυπνάδα της Χιονάτης. Διαπίστωσαν άλλη μια φορά, ότι είναι τόσο πολύ έξυπνη, όσο και όμορφη. Έλα όμως που σε μερικές ημέρες κατέφθασαν από έναν γειτονικό Γαλαξία άλλοι τόσοι Νάνοι! Τι κάνουμε τώρα;

Οι επτά Νάνοι φυσικά αδυνατούσαν να λύσουν αυτό το τεράστιο πρόβλημα. Δυο φορές άπειροι Νάνοι να τοποθετηθούν στα άπειρα σπιτάκια; Αδύνατον!

- Η έξυπνη Χιονάτη, δυσκολεύτηκε λίγο αυτή τη φορά, αλλά βρήκε πάλι τη λύση. Κάλεσε τους επτά Νάνους – δε χωρούσαν όλοι στο σπιτάκι της – και τους είπε :
- Ακούστε τι θα κάνουμε. Ξέρετε τους μονούς αριθμούς; Είναι οι 1, 3, 5, 7, 9, 11,…
- Ξέρουμε, απάντησε ο Σοφός Νάνος. Και οι ζυγοί είναι οι αριθμοί 2, 4, 6, 8, 10,…Αυτό δε μας λύνει το πρόβλημα. Το λύνει, απάντησε η Χιονάτη. **Όλοι οι παλιοί Νάνοι θα πάνε στα σπίτια με τους ζυγούς αριθμούς.** Πώς θα γίνει αυτό;
- Αυτός που μένει στο 1, θα πάει στο 2, αυτός που μένει στο 2, θα πάει να μείνει στο 4, αυτός του 3, θα πάει στο 6 και θα συνεχίσετε έτσι μέχρι το άπειρο.

- Τι είναι αυτό το «άπειρο»;
- Ακούστε. Το άπειρο δεν είναι ένας πολύ μεγάλος αριθμός. Δεν είναι καν ένας αριθμός μεγαλύτερος από τον μεγαλύτερο αριθμό που μπορούμε να σκεφτούμε. Δεν είναι αριθμός, είναι απλά το άπειρο. Καταλάβατε;

Οι Νάνοι έσκυψαν το κεφάλι. Δεν είχαν καταλάβει.

- Θα σας κάνω ένα σχήμα, είπε η Χιονάτη. Πήρε ένα ξυλαράκι και σχεδίασε στο χώμα το παρακάτω σχήμα. Να, έτσι θα μετακινηθούν :

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 …

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 …

- Τώρα καταλάβατε; Ωραία! Έτσι θα αδειάσουν όλα τα δωμάτια με τους μονούς αριθμούς. Εκεί, θα φιλοξενήσουμε όλους τους νεοφερμένους.
- Μα θα φτάσουν οι ζυγοί αριθμοί, για να πάνε όλοι οι παλιοί σε αυτούς, ψέλλισε ο Χαζούλης Νάνος.
- Βέβαια, Χαζούλη, αφού είναι άπειροι, του είπε χαϊδευτικά η Χιονάτη και αυτός κοκκίνισε μέχρι τα' αυτιά, γιατί ήταν κρυφά ερωτευμένος μαζί της.

Το σχέδιο πήγε μια χαρά. Όλοι οι νέοι και οι παλιοί Νάνοι χώρεσαν στα άπειρα σπιτάκια των Νάνων και αυτοί κατάλαβαν, μολονότι ήταν Νάνοι, ότι «άπειρο + άπειρο μας κάνει πάλι άπειρο». Και όταν μετά από χρόνια ήρθαν από έναν άλλο Σύμπαν, πάλι άπειροι Νάνοι, γιατί η φήμη της Χιονάτης ταξίδευε πλέον με κοσμική ταχύτητα, δεν πανικοβλήθηκαν. Εξοικειωμένοι πλέον με το άπειρο, βρήκαν μόνοι τους τη λύση. Θα έκαναν το ίδιο ακριβώς που έκαναν και την προηγούμενη φορά και έτσι θα άδειαζαν πάλι τα σπιτάκια με μονούς αριθμούς. Θα μπορούσαν έτσι να φιλοξενήσουν τους νέους τους φίλους. Έτσι, έζησαν έτσι καλά και εμείς καλύτερα!

Βιβλιογραφία: «Η Εικασία του Δράκου και άλλα Παραμύθια» Ηλία Κωνσταντόπουλου

Τα μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Ο δάσκαλος: Είπε ο δάσκαλος στους μαθητές του, βάλτε στο μυαλό σας έναν 4ψήφιο αριθμό, ύστερα προσθέστε τα ψηφία του και το άθροισμά τους να το αφαιρέσετε από τον αριθμό. Γράψτε το αποτέλεσμα στο τετράδιό σας π.χ. 6482-(6+4+8+2)=6462.
Ο δάσκαλος διάβασε στα τετράδια των μαθητών τους αριθμούς 2861, 5859, 4325, 1145, 9812, 8172 και είπε ότι όλοι έκαναν λάθος εκτός από τους μαθητές που βρήκαν 5859 και 8172. Πώς σκέφτηκε ο δάσκαλος και εντόπισε αμέσως τα λάθη;

Η Θεανώ: Όταν η Θεανώ πέρασε σε Πανεπιστήμιο άλλης πόλης ο πατέρας της κατέθεσε σε μια τράπεζα ένα ποσό και της έδωσε το βιβλιάριο. Η Θεανώ κάθε μήνα έπαιρνε για τα έξοδά της 1000 Ευρώ. Μετά τον τρίτο μήνα ο πατέρας βλέποντας το ποσό που έμεινε το αύξησε κατά το 1/4 του. Τους 6 τελευταίους μήνες η Θεανώ διπλασίασε τα έξοδά της. Όταν συμπληρώθηκε ο χρόνος (12 μήνες) ο πατέρας διαπίστωσε ότι στο βιβλιάριο δεν έμειναν καθόλου χρήματα. Α) Ποιο ποσό είχε καταθέσει αρχικά; Β) Τι ποσό κατέθεσε στη συνέχεια;

Ο πολλαπλασιασμός

```
     1 α 5 α 2
  χ      . α .
 ---------------
     . . . . α
  7 . . . .
 ---------------
  . . α . 9 1 0
```

Μπορείτε να συμπληρώσετε τις τελείες και την τιμή του α;

Τα τετράγωνα έτη: Το $2025=45^2$ είναι τέλειο τετράγωνο, πόσα τετράγωνα έτη έχει αυτή η χιλιετία.

Τα ψηφία: Σε ένα υπουργείο αυξήθηκαν οι αρμοδιότητες και πρέπει να δημιουργηθούν 11 νέα γραφεία δίπλα στα υπάρχοντα. Ο υπουργός για να αριθμήσει τα γραφεία αγόρασε 33 ψηφία και πλήρωσε 60€. Η αξία τους είναι το 0 μισό Ευρώ, το 1 ένα €, το 2 δύο €, κοκ. Ποια αρίθμηση έχουν τα γραφεία;

Απαντήσεις στους Γρίφους τ.134

Οι μαθητές: Με επώνυμο που αρχίζει από Β ή Γ είναι 12. Με επώνυμο που αρχίζει από Α ή Γ είναι 13. Με επώνυμο που αρχίζει από Α ή Β είναι 15 (όχι 14 που είναι στην εκφώνηση από λάθος). Άρα το 2πλασιο όλων είναι 40. Έτσι από τους 20 μαθητές με Α είναι 8, με Β είναι 7, με Γ είναι 5.

Αίνιγμα: Ο μαυροπίνακας

Τα γενέθλια: Ο Χρίστος γεννήθηκε την $31^{η}$ - $12^{ου}$ και η Βάσω με το νέο έτος $1^{η}$ - $1^{ου}$.

Οι ηλικίες: Η αδελφή του είναι 3 ετών, άρα ο Παύλος 9 ετών , έχουν διαφορά 6 έτη, τόσα χρόνια θα είναι μεγαλύτερος ο Παύλος πάντα.

Στο τρένο: Το τρένο είναι με εννέα βαγόνια.

Από την αρχή

1ο	2ο	3ο	4ο	Τάσος	6ο	7ο	8ο	9ο

Από το τέλος

9ο	8ο	7ο	φίλη	5ο	4ο	3ο	2ο	1ο

Με ένα ζύγισμα: Θα βάλουμε στη ζυγαριά ένα κάστανο 10 καρύδια και 100 στραγάλια. Αν η ζυγαριά π.χ. δείξει 357 γραμμάρια τότε 7 γραμμάρια ζυγίζει το κάστανο, 5 το καρύδι και 3 το στραγάλι.

Παιχνίδι της παρέας, μαντέψτε το άθροισμα: Μετρήστε τα χαρτάκια που περισσεύουν, αφαιρείτε 7 και έχετε το άθροισμα των αριθμών στα τρία χαρτάκια.

Οι φίλοι: Ο καθένας είχε: 25+25-40=10 Ευρώ. Άρα 40-10=30 Ευρώ πήραν συνολικά από τα κάλαντα.

Η ισότητα: $1\cdot 2\cdot 3=1+2+3$

Η δασκάλα: Η ηλικία της δασκάλας είναι 45 έτη. **Α)** Το $2025=45^2$, 2025:(20+25)=45 ,2025:25=81, επίσης 2025:3=675, 2025:5=405, 2025:9=225. **Β)** Το 2040, 2040:20=102, 2040:40=51, 2040:(20+40)=34 επίσης διαιρείται με 2, με 3 και με 5.

Ο Αμαξάς: Όταν ο αμαξάς κάνει ένα βήμα πίσω η άμαξα προχωρεί x βήματα του αμαξά μπροστά, η ταχύτητα αμαξά και άμαξας προστίθενται και ο αμαξάς πλησιάζει στο πίσω μέρος με ταχύτητα 1+x και το μήκος μέχρι πίσω είναι 8(1+x). Όταν επιστρέφει στη θέση του οι ταχύτητες αφαιρούνται και η ταχύτητά του είναι 1-x και το μήκος τώρα εκφράζεται ίσο με 24(1-x). Έτσι έχουμε 8(1+x)= 24(1-x) άρα $x=\frac{1}{2}$ άρα το μήκος της άμαξας από τη θέση του μέχρι πίσω είναι $8(1+\frac{1}{2})=12$ βήματα του αμαξά.

Οι πλάκες: Με 2020 πλάκες θα έκανε 2020:20=101 μέτρα πεζόδρομου με πλάτος 20 πλάκες. Για να κάνει 3x101=303 μέτρα με (2020+101)=2121 πλάκες, ο πεζόδρομος θα έχει πλάτος, 2121:303=7πλάκες.

7^{ος} διαγωνισμός ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ 2025

Πρωτότυπος διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων

Στις **15 Μαρτίου 2025** θα γίνει ο ετήσιος διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ της ΕΜΕ.

Ο διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ της ΕΜΕ είναι στην **ουσία μία εκπαιδευτική έρευνα** μεγάλης κλίμακας. Κεντρικός του στόχος, είναι η ανάπτυξη των βασικών μαθηματικών ικανοτήτων, που προσδιορίζουν τις δυνατότητες να σκέπτεται ο μαθητής με μαθηματικό τρόπο και να αξιοποιεί βασικές μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες.

Ο διαγωνισμός αυτός, ο οποίος θα πραγματοποιηθεί ηλεκτρονικά εξ΄ αποστάσεως και αυτή τη χρονιά, δεν ελέγχει άμεσα ή έμμεσα τη σχολική επίδοση και τις γνώσεις, αλλά την ικανότητα του διαγωνιζόμενου να σκέφτεται με τα εφόδια που τα Μαθηματικά προσδίδουν στη σκέψη. Με βάση τις μαθηματικές δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων διακρίνουμε τις παρακάτω πτυχές της μαθηματικής ικανότητας: **αριθμητική** ικανότητα, **γεωμετρική** ικανότητα, ικανότητα **επαγωγικού** συλλογισμού, **συνδυαστική** ικανότητα, ικανότητα **μετάφρασης δεδομένων** από ένα πλαίσιο σε ένα άλλο πλαίσιο. (π.χ. η εξαγωγή συμπερασμάτων από ένα διάγραμμα, από ένα σχήμα ή από μία εικόνα), **αλγεβρική** ικανότητα, ικανότητα επίλυσης προβλήματος, **αλγοριθμική** ικανότητα. Βασικό χαρακτηριστικό του διαγωνισμού είναι ότι αποτελεί **εργαλείο βελτίωσης** των μαθηματικών ικανοτήτων, αφενός σε επίπεδο σχολικής τάξης και αφετέρου σε επίπεδο μεμονωμένων μαθητών τονίζοντας τη σύνδεση των μαθηματικών ικανοτήτων με τις κατάλληλες **στρατηγικές** αντιμετώπισής τους. Επίσης χαρακτηριστικό του, είναι αφενός η **μη απογοήτευση** των μαθητών που θεωρούν ότι υστερούν σε επίδοση στα Μαθηματικά, αλλά ταυτόχρονα και η ύπαρξη **πρόκλησης** για μαθητές με **υψηλούς** στόχους στα Μαθηματικά. Ακόμη επιτρέπει την εξάσκηση των μαθητών σε θέματα **τύπου PISA**, που είναι ένα πεδίο στο οποίο οι Έλληνες μαθητές υστερούν σε μεγάλο βαθμό. Ακόμη ο διαγωνισμός ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ αποτελεί τη βάση και τον **συνδετικό κρίκο** της υποχρεωτικής εκπαίδευσης με τους διαγωνισμούς της ΕΜΕ (Θαλής, Ευκλείδης, Αρχιμήδης, προκριματικός) που καταλήγουν στη συγκρότηση της ελληνικής ομάδας που μετέχει σε διεθνείς μαθηματικούς διαγωνισμούς, με **αποκορύφωμα** την Παγκόσμια **Ολυμπιάδα των Μαθηματικών**.

«**Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν**», η στήλη που για πολλά χρόνια φιλοξενούμε στο περιοδικό, **τώρα και σε βιβλίο**. Η ΕΜΕ προχώρησε στην έκδοση ενός καταπληκτικού βιβλίου με τον τίτλο: «**Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν**». Το βιβλίο προλογίζει ο διάσημος σε διεθνές επίπεδο (**Βραβείο Shaw**) καθηγητής κ. **Δημήτρης Χριστοδούλου**. *Σχετικά αποσπάσματα από τον πρόλογο*:

«….Από την αρχαιότητα, οι μαθηματικοί **γρίφοι** έχουν προκαλέσει την περιέργεια και τη φαντασία των ανθρώπων, αποτελώντας μια γέφυρα μεταξύ της **αναζήτησης** γνώσης και της **διασκέδασης**. …. Η μαγεία των Μαθηματικών δεν είναι μόνο στην ικανότητα να λύνουμε προβλήματα, αλλά και στην δύναμη **να ανακαλύπτουμε νέες ιδέες** και να επεκτείνουμε τα όρια της γνώσης μας. Οι γρίφοι και τα πνευματικά παιχνίδια, αποτελούν έναν εξαιρετικό τρόπο για να ενθαρρύνουμε την κριτική σκέψη και την μαθηματική προσέγγιση, τόσο στην εκπαίδευση όσο και στην καθημερινή ζωή. ….». Αυτά τα προβλήματα – γρίφοι εντάσσονται στη **σύγχρονη παιδαγωγική**, κάνουν την εμφάνισή τους και στα σχολικά προγράμματα σε όλο τον κόσμο, καθώς και σε διαγωνισμούς. Επίσης βοηθούν στην εκπαιδευτική διαδικασία γιατί έχουν τη δύναμη να τραβούν το ενδιαφέρον των μαθητών και **αναπτύσσουν θετικά τη φαντασία** τους που μέσω της περιέργειας τους βάζουν σε **δημιουργική** απασχόληση με ευχάριστο τρόπο. Είναι μια ευχάριστη και συναρπαστική εκπαιδευτική εμπειρία για μικρούς και μεγάλους. Τα Μαθηματικά, γνωστά και ως η γλώσσα του σύμπαντος, έχουν τη δύναμη να μας μεταφέρουν, σε έναν κόσμο όπου η λογική και η φαντασία συναντιούνται. Οι αρχαίοι Έλληνες, όπως ο Διόφαντος, ο Ζήνων και ο Αρχιμήδης, ανακάλυψαν την ομορφιά που κρύβεται πίσω από κάθε θεώρημα και απόδειξη. Μέσα από τα **Διασκεδαστικά Μαθηματικά**, η απλότητα και η ευφυΐα των μαθηματικών προβλημάτων γίνονται προσιτά σε όλους, αποκαλύπτοντας πως η μαθηματική σκέψη δεν είναι μόνο για τους ειδικούς, αλλά μπορεί να είναι μια πηγή χαράς και έμπνευσης για τον καθένα.

Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ολυμπιάδες / Προσφορές

Νέα τιμή βιβλίου: 15€

Νέα τιμή βιβλίου: 10€

Τιμή βιβλίου: 25€

Διαγωνισμοί

2η έκδοση

Τιμή βιβλίου: 18€

2η έκδοση

Τιμή βιβλίου: 18€

2η έκδοση

Τιμή βιβλίου: 18€

Βιβλία της ΕΜΕ

Νέο Βιβλίο

Τιμή βιβλίου: 25€

Νέο Βιβλίο

Τιμή βιβλίου: 25€

Νέο Βιβλίο

Τιμή βιβλίου: 20€

Περιοδικά

Τιμή τεύχους: 10€

Τιμή τεύχους: 10€

Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr