ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
85ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
18 Ιανουαρίου 2025

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις

$$\mathrm{A} = ((-3)^3 + 27 - (-5)^3 - 10^2) \cdot (3^2 - 2^2),$$

$$\mathrm{B} = (-5^3 + 10^2)^4 : (2^3 - 3)^2$$

και να γράψετε τον αριθμό Α : Β ως δύναμη με βάση το 5.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του θετικού ακέραιου α για τις οποίες ισχύει η ισότητα:

$$ΜΚΔ\{\alpha, 50\} + ΕΚΠ\{\alpha, 90\} = 100.$$

Σημείωση

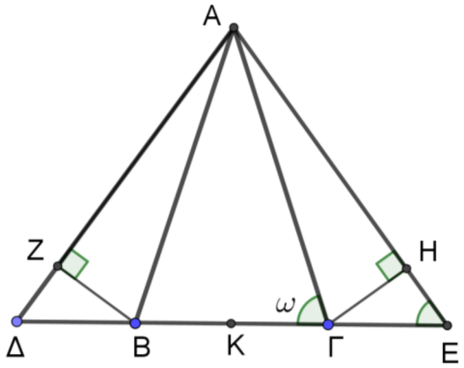
Με $ΜΚΔ\{\alpha, \beta\}$ *συμβολίζουμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των ακέραιων* α, β.
Με $ΕΚΠ\{\alpha, \beta\}$ *συμβολίζουμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των ακέραιων* α, β.

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$ και $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B} = \omega$. Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΓΗ είναι ορθογώνια με $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{H}}\Gamma = 90^o$ και $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = \mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{H} = \omega$. Το σημείο Κ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ. Δίνεται ακόμη ότι ισχύει η ισότητα γωνιών: $\mathrm{Z}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{H} = \mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B}$.

(α) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B} = \omega$.

(β) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{E}}\Delta$ και να αποδείξετε ότι το σημείο Κ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΔΕ.



Πρόβλημα 4

Δίνονται οι θετικοί ακέραιοι

$$A = \overline{\alpha\beta\beta\beta} = 1000\alpha + 100\beta + 10\beta + \beta \quad \text{και} \quad B = \overline{\alpha\beta\beta} = 100\alpha + 10\beta + \beta,$$

με $\alpha \neq 0, \beta$ ψηφία. Αν ισχύει $A - B = 4900$, να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του αριθμού Α.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες — ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
85ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
18 Ιανουαρίου 2025

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς τριψήφιους ακέραιους αριθμούς

$$\mathrm{A} = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$$

οι οποίοι κατά την Ευκλείδεια διαίρεσή τους με το άθροισμα των ψηφίων τους δίνουν πηλίκο 20 και υπόλοιπο 6.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του ακέραιου ν για τις οποίες ο αριθμός

$$\mathrm{A} = \frac{\nu^2 + 9\nu + 20}{\nu^2 + 3\nu - 4}$$

είναι ακέραιος.

Πρόβλημα 3

Δίνονται οι εξισώσεις

$$5(7x - 2a) = 6\left(5x + \frac{b}{6}\right), \qquad (E_1)$$

$$3(8y - 6a) = 7\left(3y + \frac{b}{7}\right). \qquad (E_2)$$

με άγνωστο το x και το y, αντίστοιχα, ενώ οι αριθμοί a, b, με $b > 0$ είναι ακέραιοι που θεωρούνται γνωστοί. Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του ακέραιου b για την οποία και οι δύο δεδομένες εξισώσεις έχουν ακέραια λύση.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$ και σημείο Ζ στην προέκταση της πλευράς ΒΓ προς το μέρος του Γ τέτοιο, ώστε να ισχύει $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = 2 \cdot \Gamma\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{Z}$ και η ευθεία ΑΖ να είναι κάθετη στη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{AB} = \mathrm{BZ}$.

(β) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***

Καλή επιτυχία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
85ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"

18 Ιανουαρίου 2025

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς τριψήφιους ακέραιους αριθμούς

$$\mathrm{A} = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$$

οι οποίοι κατά την Ευκλείδεια διαίρεσή τους με το άθροισμα των ψηφίων τους δίνουν πηλίκο 30 και υπόλοιπο 16.

Πρόβλημα 2
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{B\Gamma}$ και σημείο Ζ της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{Z} = 3 \cdot \mathrm{Z}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma$ και $\mathrm{BZ} = \mathrm{BA}$. Έστω Θ σημείο της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε $\Theta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{Z} = \mathrm{Z}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma$ και έστω Κ το σημείο τομής της ΑΘ με την διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma$.

(α) Να εκφράσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει της γωνίας $\mathrm{Z}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = \varphi$.
(β) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{AZ} = \mathrm{K\Gamma}$.
(γ) Αν ισχύει $\mathrm{Z}\widehat{\mathrm{K}}\Gamma = 20^\circ$, να προσδιορίσετε τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ.

Πρόβλημα 3
Να βρεθεί εξίσωση δευτέρου βαθμού η οποία έχει δύο διακεκριμένες πραγματικές ρίζες α, β τέτοιες, ώστε

$$\alpha^2 = 45\beta + 2024\alpha\beta \;\text{ και }\; \beta^2 = 45\alpha + 2024\alpha\beta.$$

Πρόβλημα 4
Οι πραγματικοί αριθμοί α, β ικανοποιούν την ισότητα:

$$\alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta = 1.$$

Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές της διαφοράς $\alpha - \beta$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
85ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"

18 Ιανουαρίου 2025

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η εξίσωση

$$|2x+2|-|2x-8|=a \qquad (\mathrm{E})$$

με άγνωστο το $x \in \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$ παράμετρο.
Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές της παραμέτρου a:
(α) Αν η εξίσωση (Ε) έχει άπειρες λύσεις .
(β) Αν η εξίσωση (Ε) έχει μοναδική λύση.

Πρόβλημα 2

Δίνεται ότι οι αριθμοί μ, ν είναι θετικοί ακέραιοι και ότι οι αριθμοί

$$\frac{3\mu-1}{\nu} \text{ και } \frac{2\nu-1}{\mu}$$

είναι ακέραιοι. Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του ζεύγους (μ, ν).

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}>\mathrm{B\Gamma}$ και σημείο Δ στην προέκταση της πλευράς ΒΓ προς το Γ τέτοιο ώστε $\mathrm{B\Delta}=\mathrm{AB}$ και $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = 2\cdot \Gamma\widehat{\mathrm{A}}\Delta$. Έστω σημείο Ε στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $\Gamma\mathrm{E}=\Gamma\Delta$ και έστω Η το σημείο τομής του ευθύγραμμου τμήματος ΒΕ με το ύψος ΑΖ του τριγώνου ΑΒΓ.
(α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.
(β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΗ είναι κάθετη προς την ευθεία ΑΒ.
(γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο Ε είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΔ.

Πρόβλημα 4

Οι πραγματικοί αριθμοί α, β ικανοποιούν την ισότητα:

$$\alpha^3+\beta^3+6\alpha\beta=8.$$

Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του αθροίσματος $\alpha+\beta$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
85ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”

18 Ιανουαρίου 2025

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Δίνεται η εξίσωση

$$\big||2x-4|-a\big| = 8 \qquad \text{(E)}$$

με άγνωστο το x και $a \in \mathbb{R}$ παράμετρο. Αν η εξίσωση (E) έχει τρεις λύσεις στο $\mathbb{R}$, να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου a και τις τρεις λύσεις της εξίσωσης.

Πρόβλημα 2
Θεωρούμε την ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$, με $\alpha_1 = 1$ και

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu + 1},$$

για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$. Να βρείτε την τιμή του αθροίσματος

$$\Sigma = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \cdots + \alpha_{2024}\alpha_{2025}\,.$$

Πρόβλημα 3
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$ και το μέσο Δ της πλευράς ΑΓ. Αν Ζ είναι σημείο στην πλευρά ΒΓ τέτοιο, ώστε η ευθεία ΑΖ να είναι κάθετη στην ευθεία ΒΔ και να ισχύει $\mathrm{BZ} = 2 \cdot \mathrm{Z\Gamma}$, τότε να αποδείξετε ότι $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = 90^o$.

Πρόβλημα 4
Έστω $P(x)$ πολυώνυμο με μη αρνητικούς ακέραιους συντελεστές τέτοιο ώστε $P(1) = 9$ και $P(9) = 1481$. Να βρεθεί η τιμή του $P(10)$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!