Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Υπεύθυνοι τάξης: Δ. Αργυράκης, Ν. Αντωνόπουλος, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς

Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Η χρησιμότητα των υπαρξιακών Θεωρημάτων στη μελέτη των συναρτήσεων

Δημήτρης Μπαρούτης
3ο ΓΕ.Λ. Σταυρούπολης Θεσσαλονίκης

Γιάννης Σαράφης
Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί Θεσσαλονίκης

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΧΟΛΙΟ

Στόχος της εργασίας που ακολουθεί είναι να καταδείξει τη χρησιμότητα των «υπαρξιακών» θεωρημάτων του Διαφορικού Λογισμού για την αντιμετώπιση προβλημάτων που προκύπτουν κατά τη μελέτη μιας συνάρτησης, καθώς και το σκεπτικό με το οποίο τα επιλέγουμε.

Τα παραδείγματα που ακολουθούν περιέχουν ερωτήματα τα οποία απαιτούν από τον λύτη να αντιληφθεί ότι για την απάντηση είναι αναγκαίο να χρησιμοποιήσει κάποιο «υπαρξιακό» θεώρημα, και να επιλέξει ποιο θα είναι αυτό.

Αποφύγαμε να θέσουμε ερωτήματα που αναφέρονται ευθέως στην ύπαρξη ενός ή περισσότερων «ξ» που ικανοποιούν μια δοσμένη συνθήκη, τα οποία εμφανίζονταν κατά κόρον στη θεματογραφία των πανελλαδικών εξετάσεων και στη σχετική βιβλιογραφία.

Άσκηση 1η

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα [α, β] με $f''(x)>0$ για κάθε x∈(α, β). Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).

Λύση

Η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με

$$g'(x)=\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]'=$$

$$\frac{\left(f(x)-f(\alpha)\right)'(x-\alpha)-(x-\alpha)'\left(f(x)-f(\alpha)\right)}{(x-\alpha)^2}$$

$$\frac{(x-\alpha)f'(x)-\left(f(x)-f(\alpha)\right)}{(x-\alpha)^2} \qquad (1)$$

> • **ΣΚΕΠΤΙΚΟ:** Χρειαζόμαστε το πρόσημο της παράστασης $(x-\alpha)f'(x)-\left(f(x)-f(\alpha)\right)$. Επειδή έχουμε τη συνάρτηση f και την f′ αυτό μας οδηγεί να σκεφτούμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής το οποίο συνδέει τις δύο συναρτήσεις.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ξ∈(α, x) ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$, δηλαδή

$$f(x)-f(\alpha)=(x-\alpha)f'(\xi) \quad (2)$$

Από τις (1), (2) έχουμε

$$g'(x)=\frac{(x-\alpha)f'(x)-f'(\xi)(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2}=$$

$$\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\alpha},$$ x∈(α, β). Αλλά για κάθε x∈(α, β) είναι $f''(x)>0$ οπότε η f′ είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β). Άρα: α < ξ < x $\Rightarrow f'(\xi)<f'(x) \Rightarrow f'(x)-f'(\xi)>0$. Επίσης είναι x – α > 0.

Ώστε για κάθε x∈(α, β) είναι $g'(x)>0$ συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).

Άσκηση 2η

Έστω μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β] με $f''(x)>0$ για κάθε x∈[α, β]. Αν f(α) = f(β) = 0 να βρείτε το πρόσημο της f στο διάστημα (α, β).

Λύση

Επειδή $f''(x)>0$ για κάθε x∈[α, β] η f′ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο [α, β].

> • **ΣΚΕΠΤΙΚΟ:** Γνωρίζοντας την μονοτονία της f′ χρειαζόμαστε κάποια τιμή μηδενισμού της (αν υπάρχει). Η σχέση f(α)=f(β) μας οδηγεί στην εφαρμογή του Θεωρήματος Rolle

Η f είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] οπότε είναι και συνεχής στο [α, β]. Έχουμε f(α) = f(β), επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle και άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(α, β) τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$. Επειδή η f′ είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1 – 1, το ξ θα είναι μοναδικό.

> • **ΣΚΕΠΤΙΚΟ:** Επειδή ξ∈(α, β) και x∈(α, β), θεωρούμε περιπτώσεις για την σχέση διάταξης που έχουν τα x και ξ στο διάστημα (α, β).

Παρατηρούμε ότι:

- $\alpha \le x < \xi \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) \overset{f'(\xi)=0}{\Rightarrow} f'(x) < 0$ και αφού η f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο [α, ξ], η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [α, ξ].
- Επίσης $\xi < x \le \beta \Rightarrow f'(\xi) < f'(x) \overset{f'(\xi)=0}{\Rightarrow} f'(x) > 0$ και αφού η f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο [ξ, β], η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [ξ, β].

Οπότε:

- $\alpha < x \le \xi \Rightarrow f(\alpha) > f(x) \overset{f(\alpha)=0}{\Rightarrow} f(x) < 0$
- $\xi \le x < \beta \Rightarrow f(x) < f(\beta) \overset{f(\beta)=0}{\Rightarrow} f(x) < 0$

Άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Άσκηση 3η

Δίνεται η συνάρτηση

$$\mathbf{f(x) = x^2 + \eta\mu x\,,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].}$$

i) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x) = 0.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - \frac{2}{3} = -\eta\mu x$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Λύση

- **ΣΚΕΠΤΙΚΟ:** Προσδιορίζουμε τη μονοτονία της συνάρτησης. Αν μεταβάλλεται, τότε εξετάζουμε την ύπαρξη μιας τουλάχιστον λύσης σε κάθε ένα από τα αντίστοιχα διαστήματα.

i) Έχουμε $f'(x) = 2x + \sigma\upsilon\nu x$.

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f'(x) > 0$.

Έχουμε: $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi < 0$ και $f'(0) = 1 > 0$,

Και η f' είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ και

οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = 0$.

$f''(x) = 2 - \eta\mu x > 0$ (διότι $-1 \le \eta\mu x \le 1$) οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Επειδή για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f'(x) > 0$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Άρα:

- $-\frac{\pi}{2} < x < \xi < 0 \overset{f'\ \gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.}{\Rightarrow} f'(x) < f'(\xi) \Rightarrow f'(x) < 0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \xi\right]$.
- $-\frac{\pi}{2} < \xi < x < 0 \overset{f'\ \gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.}{\Rightarrow} f'(\xi) < f'(x) < f'(0)$

$\Rightarrow 0 < f'(x) < 1$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο [ξ, 0].

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, θα είναι γνησίως αύξουσα και στο $[\xi, 0] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right] = \left[\xi, \frac{\pi}{2}\right]$.

Έχουμε

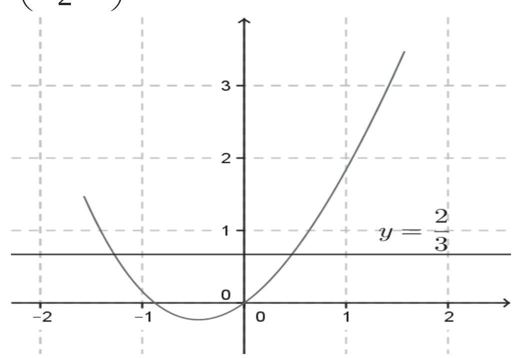
$$f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \xi\right]\right) \overset{f\ \gamma\nu.\varphi\theta.}{=} \left[f(\xi), f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \left[f(\xi), \frac{\pi^2 - 4}{4}\right]$$

Αλλά: $\xi < 0 \Rightarrow f(\xi) < f(0) \Rightarrow f(\xi) < 0$.

Άρα $0 \in \left[f(\xi), \frac{\pi^2 - 4}{4}\right]$ και η f γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \xi\right]$, οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \xi\right)$.

Στο διάστημα $\left[\xi, \frac{\pi}{2}\right]$ η f είναι γνησίως αύξουσα και έχουμε προφανή ρίζα το 0 οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα το 0.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες: την $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \xi\right)$ και την x = 0.



ii) Έχουμε $x^2 - \frac{2}{3} = -\eta\mu x \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{3}$

- Η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \xi\right]$,
- $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq f(\xi)$ διότι

  $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2-4}{4} > \frac{9-4}{4} = \frac{5}{4} > 0$ και $f(\xi) < 0$.
- $f(\xi) < \frac{2}{3} < f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \xi\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = \frac{2}{3}$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \xi\right]$ η τιμή x_1 είναι μοναδική.

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\xi, \frac{\pi}{2}\right]$,
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq f(\xi)$ διότι $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2+4}{4} > 0$ και $f(\xi) < 0$
- $f(\xi) < \frac{2}{3} < f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in \left(\xi, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = \frac{2}{3}$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\xi, \frac{\pi}{2}\right]$ η τιμή x_2 είναι μοναδική.

Άσκηση 4η

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- **f(2) = 2f(1) = 2f(0) = 4 και**
- **$f''(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$.**

α) Να αποδειχτεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο και ένα ολικό ελάχιστο.

β) Να αποδειχτεί ότι $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(2x)-4x}{(x-2)^2} = +\infty$.

γ) Να αποδειχτεί ότι υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της C_f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Αν Β(β, f(β)) το σημείο επαφής της εφαπτομένης του ερωτήματος (γ) με τη C_f τότε να αποδείξετε ότι:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ii) $\int_0^{\beta} f(x)dx > 1$.

Λύση

α) Επειδή $f''(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$ η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ αφού είναι συνεχής στο 0, ως παραγωγίσιμη

> • **ΣΚΕΠΤΙΚΟ:** Η αναζήτηση των ακροτάτων της f μας οδηγεί στον προσδιορισμό των ριζών της f'. Επειδή δεν γνωρίζουμε τον τύπο της f' ώστε να μπορέσουμε να βρούμε αλγεβρικά μια ρίζα της, και βλέποντας το δεδομένο f(0) = f(1) σκεφτόμαστε να αξιοποιήσουμε το Θεώρημα Rolle.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο [0, 1] και ισχύει f(0) = f(1) = 2, οπότε από το Θ. Rolle προκύπτει ότι υπάρχει α∈(0, 1) τέτοιο ώστε $f'(\alpha) = 0$, το οποίο είναι μοναδικό στο $[0,+\infty)$ αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Για το πρόσημο της f' παρατηρούμε ότι:

- $0 \leq x < \alpha \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(\alpha) \Rightarrow f'(x) < 0$, άρα f γνησίως φθίνουσα στο [0, α]
- $x > \alpha \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(\alpha) \Rightarrow f'(x) > 0$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Επομένως η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x=0, το f(0) = 2 (άκρο κλειστού διαστήματος) και ολικό ελάχιστο στο x = α, το f(α).

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2 = 0$ και $(x-2)^2 > 0$ για $x \neq 2$ οπότε $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 2}\left[f(2x)-4x\right] = f(4)-8$ αφού η f είναι συνεχής.

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(4)-8 > 0$, δηλαδή $f(4) > 8$.

> • **ΣΚΕΠΤΙΚΟ:** Επειδή η ανισότητα αναφέρεται σε τιμή της f και γνωρίζουμε τη μονοτονία της f', οδηγούμαστε για την απόδειξή της στο Θεώρημα Μέσης Τιμής. Το εφαρμόζουμε στα διαστήματα [1, 2] και [2, 4], αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$.

Άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (1, 2)$ και $\xi_2 \in (2, 4)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{4-2}{1} = 2$ και

$f'(\xi_2) = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{f(4)-4}{2}$.

Όμως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,+\infty)$ και $\alpha < 1 < \xi_1 < 2 < \xi_2 \Rightarrow$

$f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow 2 < \frac{f(4)-4}{2} \Rightarrow f(4) > 8$ (που είναι το ζητούμενο).

γ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο Β (β, f(β)) τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο Β που είναι η ευθεία ε: $y-f(\beta)=f'(\beta)(x-\beta)$ να διέρχεται από το σημείο Ο(0, 0), δηλαδή να ισχύει $-f(\beta)=-\beta f'(\beta)$, ή $\beta f'(\beta)-f(\beta)=0$, όπου β≠0 αφού $0\cdot f'(0)-f(0)=-f(0)=-2\neq 0$.

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι έχει μοναδική λύση η εξίσωση xf′(x) – f(x) = 0.

> • **ΣΚΕΠΤΙΚΟ:** Η αναζήτηση ρίζας σε εξίσωση στην οποία εμφανίζεται και η f και η f′ μας οδηγεί κατά προτεραιότητα στο Θεώρημα Rolle.

Στο $(0,+\infty)$ λοιπόν έχουμε:

$$xf'(x)-f(x)=0\overset{:x^2\neq 0}{\Leftrightarrow}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=0\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x>0$.

- Η g είναι παραγωγίσιμη στο [1, 2] με

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2},\ x>0$$

- Ακόμη είναι $g(1)=\dfrac{f(1)}{1}=\dfrac{2}{1}=\dfrac{4}{2}=\dfrac{f(2)}{2}=g(2)$.

Επομένως από το Θεώρημα Rolle, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\beta\in(1,2)$ τέτοιο ώστε: $g'(\beta)=0$

Δηλαδή $\dfrac{\beta f'(\beta)-f(\beta)}{\beta^2}=0$, οπότε .

.

> • **ΣΚΕΠΤΙΚΟ:** Για τη μοναδικότητα της ρίζας αρκεί να ελέγξουμε τη μονοτονία της συνάρτησης του αριθμητή, δηλαδή της $h(x)=xf'(x)-f(x),\ x>0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη με

$$h'(x)=f'(x)+xf''(x)-f'(x)=xf''(x)>0$$

για κάθε x > 0. Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα οπότε το β είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης h(x)=0 και άρα υπάρχει μόνο μια εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Β (β, f(β)) αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων η εξίσωση θα έχει εξίσωση $y=f'(\beta)x$ που λόγω τις (1) γράφεται $y=\dfrac{f(\beta)}{\beta}x$ $f''(x)>0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$, οπότε ισχύει $f(x)\geq\dfrac{f(\beta)}{\beta}x$ (2) για κάθε $x\in[0,+\infty)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=β. Ακόμη επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,+\infty)$ έχουμε:

$\alpha<1<\beta<2\Rightarrow$

$f(\beta)>f(1)\Rightarrow f(\beta)>2$ (3) και

$\beta f(\beta)>2\cdot 1\Rightarrow\dfrac{\beta f(\beta)}{2}>1$ (4)

i) Επειδή $\dfrac{f(\beta)}{\beta}>0$, θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(\beta)}{\beta}x\right)=+\infty$

και λόγω της (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ii) Από τη (2) ολοκληρώνοντας προκύπτει:

$$\int_0^{\beta}f(x)dx>\int_0^{\beta}\frac{f(\beta)}{\beta}xdx=\frac{f(\beta)}{\beta}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\beta}$$

$$\Rightarrow\int_0^{\beta}f(x)dx>\frac{f(\beta)}{\beta}\cdot\frac{\beta^2}{2}=\frac{f(\beta)\beta}{2}>1 \text{ από (4).}$$

Άσκηση 5η

Επαναληπτικές Εξετάσεις Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης 2005

ΘΕΜΑ 3ο (α)

Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι 1 – 1.

Λύση 1ος Τρόπος (Απαγωγή σε άτοπο)

Έστω ότι η f δεν είναι 1 – 1. Τότε υπάρχουν δυο τουλάχιστον πραγματικοί αριθμοί α, β με α < β, τέτοιοι ώστε να ισχύει f(α) = f(β).

> • **ΣΚΕΠΤΙΚΟ:** Η συνθήκη f(α) = f(β) σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η f είναι παραγωγίσιμη μας οδηγεί στο Θεώρημα Rolle.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής σε αυτό, ισχύουν για την f οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο [α, β]. Επομένως υπάρχει αριθμός ξ∈(α, β) τέτοιος ώστε $f'(\xi)=0$, που είναι άτοπο.

2ος Τρόπος (Ευθεία απόδειξη)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$ ισχύει $f(x_1)\neq f(x_2)$

> • **ΣΚΕΠΤΙΚΟ:** Το δεδομένο της άσκησης αναφέρεται σε ιδιότητα της παραγώγου της f, ενώ το ζητούμενο σε ιδιότητα τιμών της f. Αυτό μας οδηγεί στο Θεώρημα Μέσης Τιμής το οποίο συνδέει αυτά τα δύο στοιχεία.

Έστω $x_1<x_2$. Ισχύουν για την f οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο $[x_1,x_2]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Άρα, σύμφωνα με την υπόθεση, θα είναι

$$f'(\xi)\neq 0 \Rightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\neq 0 \Rightarrow f(x_2)\neq f(x_1)$$

Ομοίως $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_2)\neq f(x_1)$.

Άσκηση 6η

Εξετάσεις Προσανατολισμού 2018

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2,\ x\in\mathbb{R}$ με α > 1

Δ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του α > 1 η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τέτοια, ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = f(1) είναι αδύνατη στο (α,x_2).

Λύση

Δ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη δύο φορές στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2e^{x-\alpha}-2x$ και

$f''(x)=2e^{x-\alpha}-2=2\left(e^{x-\alpha}-1\right),\ x\in\mathbb{R}$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2(e^{x-\alpha}-1)=0 \Leftrightarrow x=\alpha$

και $f''(x)>0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha}>1 \Leftrightarrow x-\alpha>0 \Leftrightarrow x>\alpha$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow x<\alpha$

Επομένως:

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,\alpha]$ και κυρτή στο $[\alpha,+\infty)$, οπότε η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής το Α(α, f(α)) με $f(\alpha)=2e^{\alpha-2}-\alpha^2$.

Δ2. Αρκεί να δείξουμε ότι η f' έχει ακριβώς δυο ρίζες x_1,x_2 με $x_1<x_2$ και στη θέση x_1 αλλάζει πρόσημο (από θετική γίνεται αρνητική) ενώ στο x_2 αντιστρόφως (από αρνητική γίνεται θετική).

Από το ερώτημα Δ1 προκύπτει ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,\alpha]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha,+\infty)$ οπότε θα έχει το πολύ μια ρίζα σε καθένα απ' αυτά τα διαστήματα.

- **ΣΚΕΠΤΙΚΟ:** Η ύπαρξη της ρίζας στο $(-\infty,\alpha]$ μπορεί να αποδειχθεί και με χρήση του συνόλου τιμών και με χρήση του Θεωρήματος Bolzano (με επιλεγμένες τιμές που προσεγγίζουν τη ρίζα), ενώ στο $[\alpha,+\infty)$ θα γίνει με το σύνολο τιμών γιατί δεν είναι εύκολο να βρούμε θετική τιμή της f για x > α.

Έχουμε:

- $f'(0)=2e^{-\alpha}>0$ και
- $f'(1)=2(e^{1-\alpha}-1)<0$, αφού $1<\alpha \Rightarrow 1-\alpha<0 \Rightarrow e^{1-\alpha}<1$
- Η f' είναι συνεχής στο [0, 1]. Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(0,\,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=0$ και επειδή η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\alpha]$, το x_1 είναι μοναδικό.

Ακόμη έχουμε:

$x<x_1 \overset{f'\ \text{γν.φθιν.}}{\Rightarrow} f'(x)>f'(x_1) \Rightarrow f'(x)>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,x_1]$.

και $x_1<x\le\alpha \overset{f'\ \text{γν.φθ.}}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x_1) \Rightarrow f'(x)<0$ (1), οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1,\alpha]$ άρα η x_1 είναι θέση τοπικού μεγίστου

Εξάλλου έχουμε:

- $f'(\alpha)=2(1-\alpha)<0$, αφού $1-\alpha<0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\left(e^{x-\alpha}-x\right)\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[2x\left(\frac{e^{x-\alpha}}{x}-1\right)\right]=+\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{x-\alpha}}{x}\right) \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x-\alpha}}{1}=+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2\left(e^{x-\alpha}-x\right)\right)=+\infty$

Άρα: $f'((-\infty,\alpha])=[2(1-\alpha),+\infty)$

και $f'([\alpha,+\infty))=[2(1-\alpha),+\infty)$

- Αλλά $0\in f'([\alpha,+\infty))$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,+\infty)$. Άρα υπάρχει μοναδικό $x_2\in(\alpha,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2)=0$.

Ακόμη παρατηρούμε ότι:

$\alpha\le x<x_2 \overset{f'\text{γν.αυξ}}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x_2) \Rightarrow f'(x)<0$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1,x_2]$. και

$x>x_2 \overset{f'\ \text{γν.αυξ.}}{\Rightarrow} f'(x)>f'(x_2) \Rightarrow f'(x)>0$ οπότε η f γνησίως αύξουσα στο $[x_2,+\infty)$

Άρα η x_2 είναι θέση τοπικού ελαχίστου.

x	$-\infty$	0	x_1	1	α	x_2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–		0	+
f	↗		Τ.Μ.	↘		Τ.Ε.	↗

Δ3. Από το Δ2 προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και 1 – 1 στο $[x_1, x_2]$ και 1, α $\in (x_1, x_2)$. Έτσι για τη εξίσωση έχουμε: $f(x) = f(1) \overset{f\ 1\text{-}1}{\Leftrightarrow} x = 1$, τιμή που απορρίπτεται αφού 1<α και $x \in (\alpha, x_2)$. Επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Β΄Τρόπος (συνθετικά)

Έχουμε: 1, $\alpha \in (x_1, x_2)$ οπότε

$x \in (\alpha, x_2) \Rightarrow x_1 < 1 < \alpha < x < x_2 \Rightarrow$

$f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) \neq f(1)$. Άρα η $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

- **ΣΧΟΛΙΟ:** Το «κλειδί» για να αποδείξουμε ότι η εξίσωση είναι αδύνατη στο (α, x_2) ήταν να εξασφαλιστεί αρχικά ότι το $1 \in (x_1, x_2)$. Όπως είδαμε, η απόδειξη της ύπαρξης του x_1 με το Θεώρημα Bolzano εξασφάλισε αμέσως αυτή την ιδιότητα, ενώ χρειάζεται ξεχωριστή απόδειξη εάν η ύπαρξή του γίνει με το σύνολο τιμών της f' στο $(-\infty, \alpha]$. Όπως έδειξε η βαθμολόγηση των γραπτών, ελάχιστοι από τους μαθητές που έκαναν χρήση του συνόλου τιμών αντιλήφθηκαν αυτό το ζήτημα και ακόμη λιγότεροι μπόρεσαν να το αποδείξουν.

Άσκηση 7

Να λυθεί η εξίσωση: $2^x + (x-1)^2 = 2$.

Λύση

- **ΣΚΕΠΤΙΚΟ:** Επειδή η εξίσωση δεν λύνεται αλγεβρικά θα κάνουμε χρήση βοηθητικής συνάρτησης.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2^x + (x-1)^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$

Παρατηρούμε ότι $f(1) = f(0) = 0$, επομένως δυο ρίζες της εξίσωσης είναι οι $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχουν άλλες.

1ος Τρόπος: (Χρήση της μονοτονίας της f)

- **ΣΚΕΠΤΙΚΟ:** Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει αριθμός ρ με 0<ρ<1 και στα διαστύματα $(-\infty, \rho)$ και $(\rho, +\infty)$ η συνάρτηση αλλάζει μονοτονία

Είναι $f'(x) = 2^x \ln 2 + 2x - 2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f''(x) = 2^x \ln^2 2 + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι (προφανώς) $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f'(0) = \ln 2 - 2 < 0$ και $f'(1) = 2\ln 2 > 0$ και η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών.

Επομένως, από το Θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει $\rho \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\rho) = 0$, το οποίο είναι μοναδικό, αφού f' γνησίως αύξουσα.

Ακόμη για $x < \rho$ είναι $f'(x) < f'(\rho) = 0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \rho]$ και επομένως η $x_1 = 0$ είναι η μοναδική ρίζα στο διάστημα αυτό.

Για $x > \rho$ είναι $f'(x) > f'(\rho) = 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\rho, +\infty)$ και επομένως η $x_2 = 1$ είναι η μοναδική ρίζα στο διάστημα αυτό.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες την $x_1 = 0$ και την $x_2 = 1$.

2ος Τρόπος (Απαγωγή σε άτοπο)

- **ΣΚΕΠΤΙΚΟ:** Υποθέτω ότι η εξίσωση έχει τρεις ρίζες και με εφαρμογή του Θεωρήματος Rolle καταλήγω σε άτοπο.

Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$ τις α, β, γ με $\alpha < \beta < \gamma$. Τότε ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$ και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στα διαστήματα $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$, από το Θεώρημα Rolle προκύπτει ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες που είναι άτοπο αφού η f' είναι γνησίως μονότονη.

ΣΧΟΛΙΟ: *Είναι εμφανές ότι ο δεύτερος τρόπος είναι συντομότερος και απλούστερος του πρώτου.*

Βιβλιογραφία

- Θ. Καζαντζής, Γ. Μαυρίδης & Ε. Μήτσιου: *Μαθηματικά για την Α΄ Δέσμη*. Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη, 1995.
- Γ. Θωμαΐδης: *66 Θέματα Ανάλυσης Γ΄ Λυκείου*. Εκδόσεις Ζανταρίδης-Τηλέγραφος, 2018.
- Π. Κανδύλας [επιμ.]: *Τελική Επανάληψη στα Μαθηματικά της Γ΄ Λυκείου*. Εκδόσεις Κανδύλας, 2018.
- Ν. Ράπτης [επιμ]: *260 Επαναληπτικά Θέματα Γ΄ Λυκείου*. lisari.blogspot.gr, 2018.