

Χρήση ιδιοτήτων συνάρτησης στην επίλυση εξίσωσης ή ανίσωσης

Απόστολος Δέμης, Πρότυπο Γενικό Λύκειο Βαρβακείου Σχολής.

Στα μαθηματικά της Γ' Λυκείου – και όχι μόνον – συχνά μια εξίσωση ή μια ανίσωση επιλύεται με την βοήθεια ορισμένων χαρακτηριστικών μιας ή περισσοτέρων συναρτήσεων. Συνήθως αυτά τα χαρακτηριστικά αφορούν στην ιδιότητα του 1-1, στην μονοτονία, στα ακρότατα, στην ύπαρξη αντίστροφης συνάρτησης κλπ.

Η μονοτονία μιας συνάρτησης κατέχει προεξάρχοντα ρόλο στην μελέτη των χαρακτηριστικών που προαναφέραμε. Έτσι σε ορισμένες περιπτώσεις εξισώσεων ή ανισώσεων είναι το απαραίτητο μέσον επίλυσής τους.

Στα μαθηματικά της Γ' Λυκείου προσδιορίζουμε την μονοτονία μιας συνάρτησης συνήθως με την χρήση του προσήμου της παραγώγου της.

Σε ορισμένες περιπτώσεις όμως ο προσδιορισμός της μονοτονίας μέσω αλγεβρικών χειρισμών είναι ευκολότερος ή συντομότερος.

- Παραθέτουμε μερικές χρήσιμες προτάσεις σχετικές με την μονοτονία μιας συνάρτησης. Παραλείπουμε τις αποδείξεις των πέντε πρώτων προτάσεων ως σχετικώς απλούστερων. Οι μαθητές μπορούν να τις αντιμετωπίσουν ως ασκήσεις.

Πρόταση 1. (Άθροισμα συναρτήσεων με το ίδιο είδος μονοτονίας)

(i) Αν οι συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ με $A \cap B \neq \emptyset$ είναι γνησίως αύξουσες (αντιστοίχως, γνησίως φθίνουσες) και λ, μ είναι οποιοδήποτε θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε η συνάρτηση $\lambda f + \mu g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$

είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως, γνησίως φθίνουσα).

(ii) αν η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως, γνησίως φθίνουσα) και λ είναι οποιοσδήποτε αρνητικός πραγματικός αριθμός, τότε η συνάρτηση

$$\lambda f : A \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι γνησίως φθίνουσα (αντιστοίχως, γνησίως αύξουσα).

Πρόταση 2. (Γινόμενο συναρτήσεων με το ίδιο είδος μονοτονίας)

Αν οι συναρτήσεις

$f : A \rightarrow [0, +\infty)$ και $g : B \rightarrow [0, +\infty)$ με $A \cap B \neq \emptyset$ είναι γνησίως αύξουσες (αντιστοίχως, γνησίως φθίνουσες), τότε η συνάρτηση

$$fg : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως, γνησίως

φθίνουσα).

Πρόταση 3. (Μονοτονία της $\frac{1}{f}$, αλγεβρικής αντίστροφης της μονότονης συνάρτησης f) Αν η συνάρτηση

$$f : A \rightarrow (0, +\infty)$$

είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως, γνησίως φθίνουσα), τότε η συνάρτηση

$$\frac{1}{f} : A \rightarrow (0, +\infty)$$

είναι γνησίως φθίνουσα (αντιστοίχως, γνησίως αύξουσα). Το ίδιο ισχύει αν $f : A \rightarrow (-\infty, 0)$, γενικότερα δηλαδή όταν οι τιμές της f είναι ομόσημες

Πρόταση 4. (Σύνθεση μονοτόνων συναρτήσεων) Αν οι συναρτήσεις

$$f : A \rightarrow B \text{ και } g : B \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι γνησίως μονότονες, τότε η συνάρτηση

$$g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι:

- (i) γνησίως αύξουσα στην περίπτωση που και οι δύο συναρτήσεις έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας,
- (ii) γνησίως φθίνουσα στην περίπτωση που και οι δύο συναρτήσεις έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας.

Πρόταση 5. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ , τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i) η f είναι συνάρτηση 1-1 στο Δ ,
- (ii) η συνάρτηση $f^{-1}: f(\Delta) \rightarrow \Delta$ έχει το ίδιο

είδος μονοτονίας με την f .

Πρόταση 6. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες:

- (1) για κάθε $x \in B$ ισχύει $f(g(x)) = x$ και
- (2) για κάθε $x \in A$ ισχύει $g(f(x)) = x$.

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i) Οι συναρτήσεις f και g είναι 1-1.
- (ii) $f(A) = B$ και $g(B) = A$.
- (iii) $f^{-1} = g$ και $g^{-1} = f$.
- (iv) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και το σύνολο $A \cap f(A) = A \cap B$ είναι μη κενό, τότε ο αριθμός $m \in A \cap f(A)$ είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ – δηλαδή της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$ – αν και μόνον αν ο m είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = x$.

Απόδειξη (i) Θεωρούμε δύο τυχαία στοιχεία x_1 και x_2 του A τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε από την συνθήκη (2) συμπεραίνουμε ότι

$$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2.$$

Δηλαδή ισχύει $x_1 = x_2$, οπότε η συνάρτηση f είναι 1-1.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση g είναι επίσης 1-1.

(ii) Θεωρούμε ένα τυχαίο στοιχείο x του συνόλου $f(A)$.

Τότε υπάρχει ένα στοιχείο x' του A τέτοιο, ώστε $f(x') = x$.

Από την συνθήκη (2) αντιλαμβανόμαστε ότι ορίζεται το $g(f(x'))$ και ισούται με x' , αφού έχουμε $x' \in A$.

Επομένως το $f(x')$ πρέπει να είναι στοιχείο του πεδίου ορισμού B της συνάρτησης g , δηλαδή πρέπει να ισχύει $x \in B$.

Άρα κάθε στοιχείο του $f(A)$ είναι και στοιχείο του B . Έτσι ισχύει $f(A) \subseteq B$.

Θεωρούμε τώρα τυχαίο στοιχείο x του συνόλου B .

Τότε από την συνθήκη (1) συμπεραίνουμε ότι έχουμε $f(g(x)) = x$. Το ότι ισχύει αυτή η σχέση σημαίνει ότι αναγκαστικά το $g(x)$ είναι στοιχείο του πεδίου ορισμού A της συνάρτησης f .

Αν συμβολίσουμε με x' το $g(x)$, τότε έχουμε $f(x') = x$. Προφανώς το $f(x')$ είναι τιμή της συνάρτησης f , δηλαδή το x είναι στοιχείο του $f(A)$.

Άρα αποδείξαμε ότι κάθε στοιχείο του συνόλου B είναι και στοιχείο του συνόλου $f(A)$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι ισχύει $B \subseteq f(A)$.

Τελικά από όσα προηγήθηκαν συμπεραίνουμε ότι $f(A) = B$.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $g(B) = A$.

(iii) Από την συνθήκη (1) και το (ii) συμπεραίνουμε ότι ισχύει $f(g(x)) = x$ για κάθε $x \in f(A)$, όπου βεβαίως το $f(A)$ είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} .

Τότε επιβάλλοντας την συνάρτηση f^{-1} και στα δύο μέλη της συνθήκης (1), παίρνουμε για κάθε $x \in f(A)$ την σχέση $f^{-1}(f(g(x))) = f^{-1}(x)$, δηλαδή την σχέση $f^{-1}(x) = g(x)$.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι ισχύει $g^{-1}(x) = f(x)$.

(iv) Υποθέτουμε ότι ο $m \in A \cap f(A)$ είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$, δηλαδή ότι ισχύει $f(m) = f^{-1}(m)$.

Τότε προφανώς ισχύει $f(f(m)) = f(f^{-1}(m))$, δηλαδή ισχύει η σχέση

$$f(f(m)) = m. \quad (1)$$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι ο m είναι και λύση της εξίσωσης $f(x) = x$, δηλαδή ότι ισχύει $f(m) = m$.

Για να το αποδείξουμε χρησιμοποιούμε απαγωγή σε άτοπο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ισχύει $f(m) \neq m$. Τότε διακρίνουμε τις ακόλουθες δύο δυνατές περιπτώσεις:

- Είναι $f(m) < m$. Αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, συμπεραίνουμε ότι ισχύει $f(f(m)) < f(m)$.

Τότε από την (1) συμπεραίνουμε ότι ισχύει $m < f(m)$, το οποίο είναι αδύνατον λόγω της αρχικής παραδοχής.

- Είναι $f(m) > m$. Αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, συμπεραίνουμε ότι ισχύει $f(f(m)) > f(m)$.

Τότε από την (1) συμπεραίνουμε ότι ισχύει $m > f(m)$, το οποίο είναι αδύνατον λόγω της αρχικής παραδοχής.

Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο και στις δύο περιπτώσεις. Επομένως αναγκαστικά ισχύει $f(m) = m$, δηλαδή ο m είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = x$.

Τώρα υποθέτουμε ότι ο m είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = x$, δηλαδή ότι ισχύει $f(m) = m$.

Τότε επιβάλλοντας και στα δύο μέλη αυτής της ισότητας την συνάρτηση f^{-1} παίρνουμε την σχέση $f^{-1}(f(m)) = f^{-1}(m)$, δηλαδή την σχέση $m = f^{-1}(m)$.

Επομένως λόγω της αρχικής παραδοχής μας ισχύει η σχέση $f(m) = f^{-1}(m)$. Άρα ο m είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$.

Πρόταση 7. Αν $m \in (0, +\infty)$ και η συνάρτηση $f: A \rightarrow (0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα (φθίνουσα), τότε η συνάρτηση $g: A \rightarrow (0, +\infty)$, $g(x) = f^m(x)$ είναι γνησίως αύξουσα (φθίνουσα).

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Τότε για κάθε $x \in A$ γράφουμε:

$$g(x) = f^m(x) = \left(e^{\ln f(x)}\right)^m = e^{m \ln f(x)}.$$

Η συνάρτηση $y = \ln f(x)$, ως σύνθεση των γνησίως αυξουσών συναρτήσεων $y = \ln x$ και $y = f(x)$, είναι γνησίως αύξουσα (πρόταση 4).

Επομένως και η συνάρτηση $y = m \ln f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, αφού $m > 0$ (πρόταση 1).

Έτσι καταλήγουμε ότι η συνάρτηση g , ως σύνθεση των γνησίως αυξουσών συναρτήσεων $y = e^x$ και $y = m \ln f(x)$, είναι γνησίως αύξουσα.

Ομοίως εργαζόμαστε για την περίπτωση κατά την οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Στρατηγική επίλυσης εξίσωσης με την χρήση της μονοτονίας συνάρτησης

Βασική μέθοδος επίλυσης μια εξίσωσης με την βοήθεια της έννοιας της συνάρτησης είναι η χρήση της ιδιότητας 1–1.

Έστω ότι μας δίδεται να επιλύσουμε μια εξίσωση. Για να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα 1–1 μιας συνάρτησης συνήθως εργαζόμαστε με τον ακόλουθο τρόπο:

1. Προσδιορίζουμε το σύνολο αναφοράς της εξίσωσης που μας δίδεται. Δηλαδή καθορίζουμε το υποσύνολο A των πραγματικών αριθμών στο οποίο πρέπει (ή με άλλα λόγια, μπορούν) να περιέχονται οι λύσεις της εξίσωσης.

2. Εντοπίζουμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A και γνωστό στοιχείο a του A έτσι, ώστε η εξίσωση που μας έχει δοθεί για επίλυση να μπορεί να πάρει την μορφή $f(x) = f(a)$ και να είναι ισοδύναμη με αυτήν.

3. Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση f είναι 1–1.

4. Συμπεραίνουμε ότι η μοναδική λύση της εξίσωσης στο A είναι η $x = a$.

Σχόλια:

Στην ανωτέρω ακολουθία βημάτων επίλυσης συνήθως το δεύτερο βήμα εμφανίζει την μεγαλύτερη δυσκολία, καθώς πρέπει να βρούμε την συνάρτηση f και να εκτιμήσουμε την λύση a .

Ως προς την f πρέπει να γνωρίζουμε ότι συνήθως η προσφορότερη μέθοδος προσδιορισμού της είναι ο εντοπισμός μιας δομής που επαναλαμβάνεται μέσα στις εκφράσεις που δομούν την εξίσωση.

Για τον προσδιορισμό της λύσης a συνήθως δοκιμάζουμε ορισμένες χαρακτηριστικές τιμές του x , όπως:

- τα ουδέτερα στοιχεία των πράξεων 0 και 1,
- αναλόγως της μορφής της συνάρτησης f , τους αριθμούς e και π ,
- αριθμούς που καθιστούν 0, 1, e , π κλπ. μια επαναλαμβανόμενη έκφραση στο σώμα της εξίσωσης.

Σε κάποιες περιπτώσεις το a προκύπτει κατόπιν συλλογιστικής διαδικασίας σχετικά με το ποια μπορεί να είναι η κατάλληλη τιμή του.

Στο τρίτο βήμα – στην απόδειξη της ιδιότητας 1–1 της συνάρτησης f – συνήθως αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο A . Τότε από την ανωτέ-

ρω πρόταση 5, συμπεραίνουμε ότι η f είναι 1-1 σε αυτό. Εδώ πρέπει να προσέξουμε ιδιαίτερος το εξής: Υπάρχει περίπτωση το A να μην είναι διάστημα ή η f να είναι κατά διαστήματα μονότονη στο A . Τότε εντοπίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας $A_1, A_2, \dots, A_n$ της f και εφαρμόζουμε την στρατηγική που περιγράψαμε προηγουμένως σε **κάθε ένα** από τα διαστήματα αυτά.

Προβλήματα

Πρόβλημα 1. Αν είναι $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in (0, +\infty)$ με $\alpha < \beta < \gamma < \delta$, να λύσετε την εξίσωση

$$\alpha^x + \beta^x = \gamma^x + \delta^x.$$

Λύση Η δοθείσα εξίσωση μετασχηματίζεται ισοδύναμως ως εξής:

$$\begin{aligned} \alpha^x + \beta^x = \gamma^x + \delta^x &\Leftrightarrow \frac{\alpha^x}{\gamma^x} + \frac{\beta^x}{\gamma^x} = \frac{\gamma^x}{\gamma^x} + \frac{\delta^x}{\gamma^x} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x = 1 + \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^x \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^x + 1 - \left(\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x + \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x\right) = 0. \end{aligned}$$

Ορίζουμε την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^x + 1 - \left(\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x + \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x\right).$$

Είναι φανερό πως η δοθείσα εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $f(x) = 0$.

Επειδή είναι $\delta > \gamma$, ισχύει $\frac{\delta}{\gamma} > 1$. Επομένως η συ-

νάρτηση $y = \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^x$ είναι γνησίως αύξουσα.

Επειδή είναι $\gamma > \alpha$ και $\gamma > \beta$ ισχύει $\frac{\alpha}{\gamma} < 1$ και

$\frac{\beta}{\gamma} < 1$. Επομένως οι συναρτήσεις $y = \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x$ και

$y = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσες.

Άρα η συνάρτηση $y = \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε η συνάρτηση

$y = -\left(\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x\right)$ είναι γνησίως αύξουσα βά-

σει της προτάσεως 1. Από την ίδια πρόταση συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και επομένως είναι 1-1.

Όπως παρατηρούμε είναι $f(0) = 0$. Άρα η δοθείσα εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $f(x) = f(0)$, οπότε η μοναδική λύση της είναι το 0.

Πρόβλημα 2. Να λύσετε την εξίσωση

$$\sqrt{x-2} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[5]{29+x}.$$

Λύση Προφανώς σύνολο ορισμού της εξίσωσης είναι το διάστημα $[2, +\infty)$. Για $x=2$ δεν επαληθεύεται ενώ για $x \in (2, +\infty)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2} + \sqrt[3]{x-2} &= \sqrt[5]{29+x} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x-2} + \sqrt[3]{x-2} - \sqrt[5]{29+x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[5]{x-2}} + \frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[5]{x-2}} - \frac{\sqrt[5]{29+x}}{\sqrt[5]{x-2}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{10\sqrt{(x-2)^5}}{10\sqrt{(x-2)^2}} + \frac{15\sqrt{(x-2)^5}}{15\sqrt{(x-2)^3}} - \sqrt[5]{\frac{29+x}{x-2}} &= 0 \\ \Leftrightarrow 10\sqrt{(x-2)^3} + 15\sqrt{(x-2)^2} - \sqrt[5]{\frac{x-2+31}{x-2}} &= 0 \\ \Leftrightarrow 10\sqrt{(x-2)^3} + 15\sqrt{(x-2)^2} - \sqrt[5]{1+\frac{31}{x-2}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)^{\frac{3}{10}} + (x-2)^{\frac{2}{15}} - \left(1+\frac{31}{x-2}\right)^{\frac{1}{5}} &= 0. \end{aligned}$$

Ορίζουμε την συνάρτηση $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύ-

$$\text{πο } f(x) = (x-2)^{\frac{3}{10}} + (x-2)^{\frac{2}{15}} - \left(1+\frac{31}{x-2}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Από όσα προηγήθηκαν είναι φανερό πως η δοθείσα εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x) = 0$ ή με την εξίσωση $f(x) = f(3)$, αφού

είναι $f(3) = 0$. Καθώς η συνάρτηση $y = x-2$ είναι γνησίως αύξουσα και η συνάρτηση $y = 1 + \frac{31}{x-2}$ είναι γνησίως φθίνουσα (πρόταση 3),

συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις $y = (x-2)^{\frac{3}{10}}$ και $y = (x-2)^{\frac{2}{15}}$ είναι γνησίως αύξουσες (πρόταση 7),

ενώ η συνάρτηση $y = \left(1+\frac{31}{x-2}\right)^{\frac{1}{5}}$ είναι γνησίως φθίνουσα (πρόταση 7).

Επομένως η συνάρτηση $y = -\left(1+\frac{31}{x-2}\right)^{\frac{1}{5}}$ είναι

γνησίως αύξουσα, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (πρόταση 1).

Έτσι καταλήγουμε στο ότι η συνάρτηση f είναι 1-1, οπότε η εξίσωση $f(x) = f(3)$, και επομένως και η δοθείσα εξίσωση, έχει ως μοναδική λύση το 3.

Πρόβλημα 3. Δίδεται ο $a \in (1, +\infty)$ και η συνάρτηση $f_a: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = a^x + a^{\frac{4}{x}}$.

(i) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f_a .

(ii) Να λύσετε στο $(0, +\infty)$ τις εξισώσεις:

(α) $2^x + 3^x + 2^{\frac{4}{x}} + 3^{\frac{4}{x}} = 102$,

(β) $2^x + 3^x + 2^{\frac{4}{x}} + 3^{\frac{4}{x}} = 26$.

Λύση (i) Ας θεωρήσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ τέτοιους, ώστε $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} f_a(x_2) - f_a(x_1) &= a^{x_2} + a^{\frac{4}{x_2}} - \left(a^{x_1} + a^{\frac{4}{x_1}} \right) \\ &= a^{x_2} - a^{x_1} - \left(a^{\frac{4}{x_1}} - a^{\frac{4}{x_2}} \right) \\ &= a^{x_1} \left(a^{x_2-x_1} - 1 \right) - a^{\frac{4}{x_2}} \left(a^{\frac{4}{x_1} - \frac{4}{x_2}} - 1 \right) \\ &= a^{x_1} \left(a^{x_2-x_1} - 1 \right) - a^{\frac{4}{x_2}} \left(a^{\frac{4(x_2-x_1)}{x_1x_2}} - 1 \right). \quad (1) \end{aligned}$$

Επειδή είναι $a > 1$, η συνάρτηση $y = a^x$ είναι γνησίως αύξουσα. Καθώς είναι $x_1 < x_2$, έχουμε $x_2 - x_1 > 0$ και $\frac{4(x_2-x_1)}{x_1x_2} > 0$.

Επομένως ισχύει $a^{x_2-x_1} > a^0$ και $a^{\frac{4(x_2-x_1)}{x_1x_2}} > a^0$, οπότε έχουμε

$$a^{x_2-x_1} - 1 > 0 \text{ και } a^{\frac{4(x_2-x_1)}{x_1x_2}} - 1 > 0. \quad (2)$$

Επειδή ισχύει $2 \leq x_1 < x_2$, έχουμε $x_1x_2 > 4$. Επομένως ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες

$$x_1 > \frac{4}{x_2} \text{ και } x_2 - x_1 > \frac{4(x_2-x_1)}{x_1x_2}. \quad (3)$$

Καθώς η συνάρτηση $y = a^x$ είναι γνησίως αύξουσα, από τις ανισότητες (3) συμπεραίνουμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες

$$a^{x_1} > a^{\frac{4}{x_2}} \text{ και } a^{x_2-x_1} > a^{\frac{4(x_2-x_1)}{x_1x_2}}. \quad (4)$$

Από τις (2) και (4) συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$a^{x_2-x_1} - 1 > a^{\frac{4(x_2-x_1)}{x_1x_2}} - 1 > 0. \quad (5)$$

Καθώς από την πρώτη από τις ανισότητες (4) έχουμε $a^{x_1} > a^{\frac{4}{x_2}} > 0$, τότε από την (5), με πολλαπλασιασμό κατά μέλη, παίρνουμε

$$a^{x_1} \left(a^{x_2-x_1} - 1 \right) > a^{\frac{4}{x_2}} \left(a^{\frac{4(x_2-x_1)}{x_1x_2}} - 1 \right) \text{ ή ισοδυνάμως}$$

$$a^{x_1} \left(a^{x_2-x_1} - 1 \right) - a^{\frac{4}{x_2}} \left(a^{\frac{4(x_2-x_1)}{x_1x_2}} - 1 \right) > 0.$$

Έτσι από την (1) συμπεραίνουμε ότι $f_a(x_2) - f_a(x_1) > 0$, δηλαδή $f_a(x_2) > f_a(x_1)$.

Επομένως η συνάρτηση f_a είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$.

Επαναλαμβάνοντας το ανωτέρω συλλογισμό καταλήγουμε στο ότι η συνάρτηση f_a είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 2]$.

(ii) (α) Είναι φανερό πως η εξίσωση $2^x + 3^x + 2^{\frac{4}{x}} + 3^{\frac{4}{x}} = 102$ μπορεί να γραφεί με την μορφή $f_2(x) + f_3(x) = 120$. Αν συμβολίσουμε με f την συνάρτηση $f_2 + f_3$, τότε η εξίσωση γράφεται $f(x) = 120$.

Παρατηρούμε ότι το 120 μπορεί να γραφεί είτε ως $f(1)$ είτε ως $f(4)$.

Από το (i) και την πρόταση 1 συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$. Επομένως η f είναι 1-1 στο κάθε ένα από τα διαστήματα $(0, 2]$ και $[2, +\infty)$. Έτσι η δοθείσα εξίσωση

- στο διάστημα $(0, 2]$ παίρνει την μορφή $f(x) = f(1)$, οπότε έχει ως μοναδική λύση σε αυτό τον αριθμό 1, ενώ
- στο διάστημα $[2, +\infty)$ παίρνει την μορφή $f(x) = f(4)$, οπότε έχει ως μοναδική λύση σε αυτό τον αριθμό 4.

Τελικά συμπεραίνουμε ότι οι μοναδικές λύσεις της δοθείσας εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1 και 4.

(β) Είναι φανερό πως η εξίσωση

$2^x + 3^x + 2^{\frac{4}{x}} + 3^{\frac{4}{x}} = 26$, σύμφωνα με όσα έχουμε πει ποιο πάνω, μπορεί να πάρει την μορφή $f(x) = f(2)$.

Είδαμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 2]$ γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$.

Αφού η f είναι 1-1 στο διάστημα $(0, 2]$, τότε η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = f(2)$ σε αυτό είναι ο αριθμός 2.

Αφού η f είναι 1-1 στο διάστημα $[2, +\infty)$, τότε η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = f(2)$ σε αυτό είναι ο αριθμός 2.

Τελικά, είναι φανερό, πως η μοναδική λύση της δοθείσας εξίσωσης στο $(0, +\infty)$ είναι ο αριθμός 2.

Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε και με τον εξής τρόπο.

Όπως θα δούμε στην πρόταση 10 στην συνέχεια, από τα διαστήματα μονοτονίας της f συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός 2 είναι η μοναδική θέση ελαχίστου της f . Επομένως αυτός είναι και η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = f(2)$.

Πρόβλημα 4. Αν είναι $a \in (0, +\infty)$, θεωρούμε τη συνάρτηση $f_a: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_a(x) = 3^x + 3^{\frac{a^2}{x}}.$$

(i) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f_a .

(ii) Να λύσετε την εξίσωση $3^x + 4^{\frac{1}{x}} = 7$.

Λύση (i) Αν εργαστούμε ακριβώς όπως στο πρόβλημα 1, (i) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η f_a είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, a]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[a, +\infty)$.

(ii) Είναι προφανές ότι μια λύση της εξίσωσης $3^x + 4^{\frac{1}{x}} = 7$ είναι ο αριθμός 1. Έχει όμως και άλλη ρίζα;

Για να αξιοποιήσουμε πρώτο μέρος του προβλήματος σκεφτόμαστε ότι θα μας βοηθούσε να δώσουμε στην εξίσωση την μορφή $3^x + 3^{\frac{a^2}{x}} = 7$, δηλαδή $f_a(x) = 7$ για κατάλληλο a .

Επομένως πρέπει να μετατρέψουμε το $4^{\frac{1}{x}}$ σε δύναμη με βάση το 3. Έτσι γράφουμε

$$\begin{aligned} 4^{\frac{1}{x}} &= \left(10^{\log 4}\right)^{\frac{1}{x}} = 10^{\frac{\log 4}{x}} = 10^{\log 3 \cdot \frac{\log 4}{x \log 3}} \\ &= \left(10^{\log 3}\right)^{\frac{\log 4}{\log 3} \cdot \frac{1}{x}} = 3^{\frac{a^2}{x}}, \end{aligned}$$

όπου συμβολίσαμε με a τον μεγαλύτερο της μονάδας αριθμό $\sqrt{\frac{\log 4}{\log 3}}$.

Επομένως η δοθείσα εξίσωση παίρνει την μορφή $f_a(x) = 7$ με $a = \sqrt{\frac{\log 4}{\log 3}}$.

Από το (i) γνωρίζουμε ότι η f_a είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, a]$, οπότε είναι και 1-1 σε αυτό. Καθώς $1 \in (0, a]$ και ισχύει $f_a(1) = 7$, η εξίσωση γράφεται $f_a(x) = f_a(1)$ και προφανώς έχει μοναδική λύση στο $(0, a]$ το 1.

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} 3^{a^2} &= 3^{\frac{\log 4}{\log 3}} = \left(10^{\log 3}\right)^{\frac{\log 4}{\log 3}} = 10^{\log 3 \cdot \frac{\log 4}{\log 3}} \\ &= 10^{\log 4} = 4. \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε $f_a(a^2) = 3^{a^2} + 3^{\frac{a^2}{a^2}} = 4 + 3 = 7$.

Έτσι η δοθείσα εξίσωση μπορεί να γραφεί και με την μορφή $f_a(x) = f_a(a^2)$.

Επειδή ισχύει $a > 1$, έχουμε $a^2 > a$. Δηλαδή $a^2 \in [a, +\infty)$.

Από το (i) γνωρίζουμε ότι η f_a είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[a, +\infty)$. Άρα είναι 1-1 σε αυτό και επομένως η εξίσωση $f_a(x) = f_a(a^2)$

έχει εδώ μοναδική λύση τον αριθμό a^2 .

Τελικά συμπεραίνουμε ότι η δοθείσα εξίσωση έχει μοναδικές λύσεις τους αριθμούς 1 και $\frac{\log 4}{\log 3}$.

Πρόβλημα 5. Να λύσετε την εξίσωση

$$(x-1)^{\frac{1}{\ln(e-1)}} - (e-1)^{\ln x} = 1.$$

Λύση. Αρχικά παρατηρούμε ότι η εξίσωση έχει σύνολο ορισμού το $(1, +\infty)$. Η πράξη της αφαίρεσης συχνά δημιουργεί δυσκολίες στους αλγεβρικούς χειρισμούς, αφού εν μέρει δεν είναι συμβατή με ορισμένες σχέσεις όπως, για παράδειγμα, με την διάταξη.

Έτσι σε ορισμένες περιπτώσεις μετασχηματίζουμε μια εξίσωση ή μια ανίσωση, ώστε τα μέλη της να

έχουν μορφή αθροισμάτων. Αυτή είναι μια στρατηγική που εφαρμόζουμε συχνά σε εξισώσεις με άρρητες παραστάσεις.

Αυτήν την στρατηγική ακολουθούμε και εδώ γράφοντας την δοθείσα εξίσωση με την μορφή

$$(x-1)^{\frac{1}{\ln(e-1)}} = (e-1)^{\ln x} + 1.$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = (x-1)^{\frac{1}{\ln(e-1)}}$$

και $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = (e-1)^{\ln x} + 1$.

Τότε η εξίσωση παίρνει την μορφή $f(x) = g(x)$ με σύνολο ορισμού το $(1, +\infty)$. Στο $(1, +\infty)$ προφανώς ισχύει $g(x) > 1$ και $f(x) > 0$. Ορίζονται λοιπόν και οι δύο συναρτήσεις $f(g(x))$

$$\begin{aligned} g(f(x)), f(g(x)) &= (g(x)-1)^{\frac{1}{\ln(e-1)}} \\ &= \left((e-1)^{\ln x}\right)^{\frac{1}{\ln(e-1)}} = (e-1)^{\frac{\ln x}{\ln(e-1)}} = \left(e^{\ln(e-1)}\right)^{\frac{\ln x}{\ln(e-1)}} \\ &= e^{\frac{\ln x \ln(e-1)}{\ln(e-1)}} = e^{\ln x} = x, \quad g(f(x)) = (e-1)^{\ln(f(x))} + 1 = \\ &= (e-1)^{\ln(x-1)^{\frac{1}{\ln(e-1)}}} + 1 = \left(e^{\ln(e-1)}\right)^{\frac{\ln(x-1)}{\ln(e-1)}} + 1 \\ &= e^{\frac{\ln(e-1) \ln(x-1)}{\ln(e-1)}} + 1 = e^{\ln(x-1)} + 1 = x-1+1 = x. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση g αποτελεί σύνθεση

- της συνάρτησης $y = (e-1)^x$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αφού $e-1 > 1$ και
- της συνάρτησης $y = \ln x$ η οποία επίσης είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα βάσει της πρότασης 4.

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις της πρότασης 6, οπότε η εξίσωση $f(x) = g(x)$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $g(x) = x$, δηλαδή με την εξίσωση $(e-1)^{\ln x} + 1 = x$.

Επειδή το σύνολο στο οποίο την επιλύουμε είναι το διάστημα $(1, +\infty)$ αυτή μετασχηματίζεται ισοδυνάμως ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{(e-1)^{\ln x}}{x} + \frac{1}{x} &= 1 \Leftrightarrow \frac{e^{\ln(e-1) \ln x}}{e^{\ln x}} + \frac{1}{x} = 1 \\ &\Leftrightarrow e^{(\ln(e-1)-1) \ln x} + \frac{1}{x} = 1. \end{aligned}$$

Είναι φυσικό να ορίσουμε την συνάρτηση

$$h: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } h(x) = e^{(\ln(e-1)-1) \ln x} + \frac{1}{x}.$$

Επομένως η εξίσωση $g(x) = x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $h(x) = 1$.

Επειδή είναι $e-1 < e$, έχουμε $\ln(e-1) < 1$, δηλαδή $\ln(e-1)-1 < 0$.

Από την πρόταση 1 ii) συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $y = (\ln(e-1)-1) \ln x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Από την πρόταση 4 συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $y = e^{(\ln(e-1)-1) \ln x}$, ως σύνθεση της γνησίως αύξουσας συνάρτησης $y = e^x$ και της γνησίως φθίνουσας $y = (\ln(e-1)-1) \ln x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Καθώς η συνάρτηση $y = \frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$, συμπεραίνουμε ότι και η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό (πρόταση 1).

Είναι φανερό λοιπόν πως η h είναι $1-1$.

Προσπαθούμε να εντοπίσουμε δι' εκτιμήσεως μια λύση της εξίσωσης $h(x) = 1$. Είναι φυσικό, λόγω της μορφής της εξίσωσης, να δοκιμάσουμε τον αριθμό $e > 1$.

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} h(e) &= e^{(\ln(e-1)-1) \ln e} + \frac{1}{e} = e^{\ln(e-1)-1} + \frac{1}{e} \\ &= \frac{e^{\ln(e-1)}}{e} + \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} + \frac{1}{e} = 1. \end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση $h(x) = 1$ στην πραγματικότητα έχει την μορφή $h(x) = h(e)$.

Άρα η μοναδική λύση αυτής της εξίσωσης, και επομένως και της δοθείσας, είναι το e .

Θέματα παλαιότερων Εποχών

Επιμέλεια: Γιώργος Σ. Τασσόπουλος

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ- ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ Ε.Μ.Π. ΤΟ 1962.

Τοπογράφοι – Αγρονόμοι Ε.Μ.Π. 1962

Θέμα 1ο (Εξεταστής Ι. Αργυράκος)

Να αποδειχθεί ότι εις παν τρίγωνον αληθεύει η σχέση:

$$\frac{\sin(B-\Gamma)}{\sin A} + \frac{\sin(\Gamma-A)}{\sin B} + \frac{\sin(A-B)}{\sin \Gamma} + 2 =$$
$$= \frac{\sin(B-\Gamma)\sin(\Gamma-A)\sin(A-B)}{\sin A \sin B \sin \Gamma}$$

Απόδειξη

1^{ος} Τρόπος: (Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς-
Γυμνάσιο Κεραμειών Κεφαλλονιάς)

Μόλις κάποιος διαβάσει το θέμα, καταλαβαίνει ότι δεν έχει νόημα σε ορθογώνια τρίγωνα. Αυτό το “εις παν τρίγωνον” δεν έπρεπε να γραφεί..., αλλά αντ’ αυτού «εις παν μη ορθογώνιον τρίγωνον»

$$\text{Αν } \frac{\sin(B-\Gamma)}{\sin A} = \kappa_1,$$
$$\frac{\sin(\Gamma-A)}{\sin B} = \kappa_2,$$
$$\frac{\sin(A-B)}{\sin \Gamma} = \kappa_3$$

τότε αρκεί να δείξουμε ότι:

$$(\kappa_1 + 1) + (\kappa_2 + 1) + (\kappa_3 + 1) = \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 + 1.$$

Έχουμε

$$\kappa_1 + 1 = \frac{\sin(B-\Gamma)}{\sin A} + 1 = \frac{\sin(B-\Gamma) + \sin A}{\sin A} =$$
$$= \frac{\sin(B-\Gamma) - \sin(B+\Gamma)}{\sin A} =$$
$$= \frac{2\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\sin A} = \frac{2 \cdot \frac{\beta}{2R} \cdot \frac{\gamma}{2R}}{\sin A} = \frac{\beta\gamma}{2R^2 \sin A} =$$

$$\frac{2(AB\Gamma)}{\eta\mu A} = \frac{(AB\Gamma)}{R^2 \eta\mu A \sin A} =$$
$$= \frac{(AB\Gamma)}{\frac{1}{2}R^2 \eta\mu 2A} = \frac{(AB\Gamma)}{(OB\Gamma)},$$

όπου Ο το περίκεντρο του ΑΒΓ, όταν $\hat{A} < 90^\circ$.

Διακρίνουμε στη συνέχεια δύο περιπτώσεις.

α) Αν το $\hat{A} B \hat{A} \Gamma$ είναι οξυγώνιο και

$$(AB\Gamma) = E, (OB\Gamma) = E_1, (O\Gamma A) = E_2, (OAB) = E_3$$

τότε δείξαμε ότι $\kappa_1 + 1 = \frac{E}{E_1}$.

Ομοίως $\kappa_2 + 1 = \frac{E}{E_2}, \kappa_3 + 1 = \frac{E}{E_3}$ και αρκεί να

δείξουμε ότι:

$$\frac{E}{E_1} + \frac{E}{E_2} + \frac{E}{E_3} = \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 + 1.$$

Πράγματι

$$\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 + 1 = \left(\frac{E}{E_1} - 1\right) \cdot \left(\frac{E}{E_2} - 1\right) \cdot \left(\frac{E}{E_3} - 1\right) + 1 =$$
$$= \frac{E}{E_1} + \frac{E}{E_2} + \frac{E}{E_3} + \frac{E^2 \cdot (E - E_1 - E_2 - E_3)}{E_1 \cdot E_2 \cdot E_3} - 1 + 1 =$$
$$\frac{E}{E_1} + \frac{E}{E_2} + \frac{E}{E_3}, \text{ αφού } E = E_1 + E_2 + E_3.$$

• Το γινόμενο θα μπορούσε να βρεθεί και με βάση τον τύπο

$$(x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma) =$$
$$= x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x + \alpha\beta\gamma \quad (I)$$

με $x = -1, \alpha = \frac{E}{E_1}, \beta = \frac{E}{E_2}, \gamma = \frac{E}{E_3}$ ίσο με

$$(-1)^3 + \left(\frac{E}{E_1} + \frac{E}{E_2} + \frac{E}{E_3}\right)(-1)^2 +$$
$$+ \left(\frac{E^2}{E_1 E_2} + \frac{E^2}{E_2 E_3} + \frac{E^2}{E_3 E_1}\right)(-1) + \frac{E^3}{E_1 E_2 E_3} =$$