



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ Προκριματικός διαγωνισμός 2014 12 Απριλίου 2014

Ενδεικτικές λύσεις

Πρόβλημα 1

Έστω (x_n) , $n \geq 1$, μια ακολουθία πραγματικών αριθμών με $x_1 = 1$, που ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$2x_{n+1} = 3x_n + \sqrt{5x_n^2 - 4}.$$

(α) Να αποδειχθεί ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι φυσικοί αριθμοί.

(β) Να εξετασθεί αν υπάρχει όρος της ακολουθίας που να διαιρείται με το 2011.

Λύση

Από τη δοθείσα αναδρομική σχέση παίρνουμε ότι

$$(2x_{n+1} - 3x_n)^2 = 5x_n^2 - 4 \Rightarrow 4x_{n+1}^2 - 12x_{n+1}x_n + 4x_n^2 = -4 \Rightarrow x_{n+1}^2 - 3x_{n+1}x_n + x_n^2 = -1 \quad (1).$$

Αν τώρα γράψουμε τη τελευταία για n το $n+1$ παίρνουμε

$$x_{n+2}^2 - 3x_{n+2}x_{n+1} + x_{n+1}^2 = -1 \quad (2).$$

Θεωρούμε τώρα τη δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$x^2 - 3x \cdot x_{n+1} + x_{n+1}^2 + 1 = 0.$$

Από τις (1),(2), αυτή η δευτεροβάθμια έχει λύσεις τα x_n, x_{n+2} , οπότε από τους τύπους του Vieta παίρνουμε :

$$x_n + x_{n+2} = 3x_{n+1} \quad (3) \quad \text{και} \quad x_n x_{n+2} = x_{n+1}^2 + 1 \quad (4).$$

Γράφοντας τη σχέση (3) ως $x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n$ και αφού οι πρώτοι δύο όροι $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$ είναι ακέραιοι, επαγωγικά βλέπουμε ότι όλοι θα πρέπει να είναι ακέραιοι.

Για το δεύτερο σκέλος του ερωτήματος, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιος όρος της ακολουθίας, έστω ο x_s , έτσι ώστε: $2011 | x_s$. Τότε η σχέση (4) για $n = s$, δίνει $x_s x_{s+2} = x_{s+1}^2 + 1$. Αφού οι όροι είναι ακέραιοι και $2011 | x_s$, θα έχουμε ότι:

$$2011 | x_{s+1}^2 + 1 \Rightarrow x_{s+1}^2 \equiv -1 \pmod{2011} \Rightarrow$$

$$(x_{s+1}^2)^{1005} \equiv (-1)^{1005} \equiv -1 \pmod{2011} \Rightarrow$$

$$x_{s+1}^{2010} \equiv -1 \pmod{2011} \quad (5)$$

Όμως ο 2011 είναι πρώτος και $(x_{s+1}, 2011) = 1$. Πράγματι, αν $(x_{s+1}, 2011) = d > 1$, τότε $d | x_{s+1}, d | 2011 \Rightarrow d | x_s$, αφού $2011 | x_s$, οπότε από τη σχέση $x_s x_{s+2} = x_{s+1}^2 + 1$ προκύπτει ότι $d | 1$, άτοπο. Επομένως, από το θεώρημα Fermat θα έχουμε ότι:

$$x_{s+1}^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}, \quad (6)$$

η οποία έρχεται σε αντίφαση με τη σχέση (5) Επομένως, δεν υπάρχει όρος της ακολουθίας που να διαιρείται με 2011.

Σημείωση. Πρέπει να παρατηρήσει κανείς ότι δε μπορεί να μιλήσει για διαιρετότητα στη σχέση (2), γιατί δε γνωρίζουμε αν όλοι οι όροι είναι ακέραιοι όχι. Επομένως για το 2^ο σκέλος της απάντησης απαιτείται το 1^ο.

Πρόβλημα 2

Βρείτε όλα τα μη μηδενικά πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα

$$(P(x))^3 + 3(P(x))^2 = P(x^3) - 3P(-x), \quad (1)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Έστω ότι $\deg P(x) = 0$, οπότε $P(x) = a \neq 0$. Τότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

$$a^3 + 3a^2 = a - 3a \Leftrightarrow a^3 + 3a^2 + 2a = 0 \Leftrightarrow a = -1 \text{ ή } a = -2.$$

Άρα τα σταθερά πολυώνυμα $P(x) = -1$ και $P(x) = -2$ είναι λύσεις του προβλήματος.

Έστω $\deg P(x) = n > 0$. Τότε το πολυώνυμο $P(x)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$P(x) = ax^n + Q(x), \text{ με } a \neq 0 \text{ και } \deg Q(x) = k \leq n-1 \text{ ή } Q(x) = 0.$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) λαμβάνουμε:

$$(ax^n + Q(x))^3 + 3(ax^n + Q(x))^2 = ax^{3n} + Q(x^3) - 3Q(-x) - 3a \cdot (-1)^n x^n, \quad (2)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε εξισώνοντας του συντελεστές του x^{3n} των πολυωνύμων των δύο μελών, λαμβάνουμε:

$$a^3 = a \stackrel{a \neq 0}{\Leftrightarrow} a = 1 \text{ ή } a = -1.$$

Επομένως διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

I. $a = 1$. Τότε η σχέση (2) γίνεται:

$$\begin{aligned} (x^n + Q(x))^3 + 3(x^n + Q(x))^2 &= x^{3n} + Q(x^3) - 3Q(-x) - 3 \cdot (-1)^n x^n \\ &\Leftrightarrow A(x) = B(x), \end{aligned} \quad (3)$$

όπου έχουμε θέσει

$$A(x) = 3x^{2n}Q(x) + 3x^n(Q(x))^2 + (Q(x))^3 + 3x^{2n} + 6x^nQ(x) + 3(Q(x))^2$$

$$B(x) = Q(x^3) - 3Q(-x) - 3 \cdot (-1)^n x^n.$$

Αν υποθέσουμε ότι $Q(x) = 0$, τότε λαμβάνουμε: $3x^{2n} = -3 \cdot (-1)^n x^n$, αδύνατη.

Αν υποθέσουμε ότι $\deg Q(x) = k > 0$, τότε, αφού $0 < k < n$, θα έχουμε:

$$2n + k = \deg A(x) = \deg B(x) = \max\{3k, n\} \geq 3k \Rightarrow n \geq k, \text{ άτοπο.}$$

Άρα είναι $\deg Q(x) = 0$, οπότε $Q(x) = c \neq 0$. Τότε η ισότητα $A(x) = B(x)$ γίνεται:

$$3(c+1)x^{2n} + 3(c^2 + 2c + (-1)^n)x^n + c^3 + 3c^2 + 2c = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow c+1=0, c^2 + 2c + (-1)^n = 0, c^3 + 3c^2 + 2c = 0 \Leftrightarrow c = -1, n = 2m, m \in \mathbb{N}^*.$$

Επομένως προκύπτει το πολυώνυμο: $P(x) = x^{2m} - 1, x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}^*$.

II. $a = -1$. Τότε η σχέση (2) γίνεται:

$$\begin{aligned} (-x^n + Q(x))^3 + 3(-x^n + Q(x))^2 &= -x^{3n} + Q(x^3) - 3Q(-x) + 3 \cdot (-1)^n x^n \\ \Leftrightarrow A(x) &= B(x), \end{aligned}$$

όπου έχουμε θέσει

$$\begin{aligned} A(x) &= 3x^{2n}Q(x) - 3x^n(Q(x))^2 + (Q(x))^3 + 3x^{2n} - 6x^nQ(x) + 3(Q(x))^2 \\ B(x) &= Q(x^3) - 3Q(-x) + 3 \cdot (-1)^n x^n. \end{aligned}$$

Εργαζόμενοι όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, αν υποθέσουμε ότι $Q(x) = 0$, τότε λαμβάνουμε: $3x^{2n} = 3 \cdot (-1)^n x^n$, αδύνατη.

Αν υποθέσουμε ότι $\deg Q(x) = k > 0$, τότε, αφού $0 < k < n$, θα έχουμε:

$$2n + k = \deg A(x) = \deg B(x) = \max\{3k, n\} \geq 3k \Rightarrow n \geq k, \text{ άτοπο.}$$

Αρα είναι $\deg Q(x) = 0$, οπότε $Q(x) = c \neq 0$. Τότε η ισότητα $A(x) = B(x)$ γίνεται:

$$\begin{aligned} 3(c+1)x^{2n} - 3(c^2 + 2c + (-1)^n)x^n + c^3 + 3c^2 + 2c &= 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow c+1=0, c^2 + 2c + (-1)^n=0, c^3 + 3c^2 + 2c=0 &\Leftrightarrow c=-1, n=2m, m \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Επομένως προκύπτει το πολυώνυμο: $P(x) = -x^{2m} - 1, x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$.

Αρα τα πολυώνυμα που ζητάμε είναι τα εξής:

$$P(x) = -1, \quad P(x) = -2, \quad P(x) = x^{2m} - 1, \quad P(x) = -x^{2m} - 1, x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}^*.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma < B\Gamma$. Έστω Δ, E, Z τα μέσα των πλευρών $B\Gamma, A\Gamma, AB$ αντίστοιχα και τα ύψη $BK, \Gamma\Lambda$. Στη προέκταση του ΔZ θεωρούμε σημείο M , έτσι ώστε η παράλληλη από το M προς την $K\Lambda$ να τέμνει τις προεκτάσεις των $\Gamma A, BA$ και ΔE στα σημεία Σ, T και N αντίστοιχα. (Όλες τις προεκτάσεις, τις θεωρούμε προς το μέρος του άκρου που εμφανίζεται δεύτερο στη γραφή του αντίστοιχου τμήματος).

Αν ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου MBA , έστω (c_1) , τέμνει την ευθεία ΔN στο σημείο P και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $N\Gamma\Delta$, έστω (c_2) , τέμνει την ευθεία ΔM στο σημείο Π , αποδείξτε ότι $\Sigma T \parallel \Pi P$.

Λύση

Τα σημεία Δ, E, Z είναι μέσα των πλευρών $B\Gamma, A\Gamma, AB$ (του τριγώνου $AB\Gamma$) αντίστοιχα. Άρα τα τετράπλευρα $AE\Delta Z$, $ZE\Delta B$ και $ZE\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμα.

Εφόσον $\Delta M \parallel \Gamma\Sigma$, θα ισχύει: $\hat{M} = \hat{\Sigma}_1$. Εφόσον $MN \parallel K\Lambda$, θα ισχύει: $\hat{\Sigma}_1 = \hat{K}$.

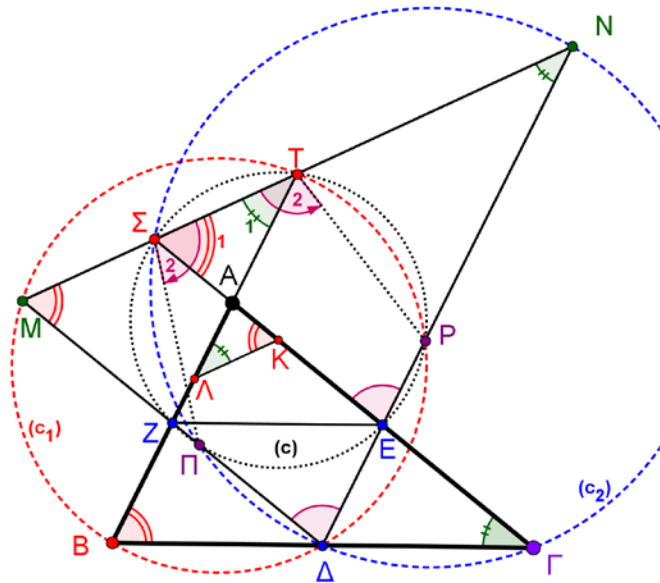
Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $B\Lambda K\Gamma$ (διότι $B\hat{\Lambda}\Gamma = B\hat{K}\Gamma = 90^\circ$) έχουμε: $\hat{K} = \hat{B}$.

Από τις τρεις τελευταίες ισότητες γωνιών ισχύει $\hat{M} = \hat{B}$, οπότε τα σημεία M, B, Δ, T , ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Εφόσον $\Delta N \parallel B\Gamma$, θα ισχύει: $\hat{N} = \hat{T}_1$. Εφόσον $MN \parallel K\Lambda$, θα ισχύει: $\hat{T}_1 = \hat{\Lambda}$.

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $B\Lambda K\Gamma$ (διότι $B\hat{\Lambda}\Gamma = B\hat{K}\Gamma = 90^\circ$) έχουμε: $\hat{\Lambda} = \hat{\Gamma}$.

Από τις τρεις τελευταίες ισότητες γωνιών ισχύει $\hat{N} = \hat{\Gamma}$, οπότε τα σημεία $N, \Gamma, \Delta, \Sigma$, ανήκουν στον ίδιο κύκλο.



Σχήμα 1

Τα σημεία B, Δ, P, T, M ανήκουν στο κύκλο (c_1) , οπότε από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $MTP\Delta$ λαμβάνουμε:

$$\hat{T}_2 + \hat{\Delta} = 180^\circ.$$

Τα σημεία $\Gamma, \Delta, \Pi, \Sigma, N$ ανήκουν στο κύκλο (c_2) , οπότε από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $\Delta\Pi\Sigma N$ λαμβάνουμε:

$$\hat{\Sigma}_2 + \hat{\Delta} = 180^\circ.$$

Από τις δύο τελευταίες ισότητες έχουμε:

$$\hat{T}_2 = \hat{\Sigma}_2 = 180^\circ - \hat{\Delta} = 180^\circ - \hat{A}.$$

Στο τετράπλευρο ΣTPE έχουμε: $\hat{T}_2 + \hat{E} = 180^\circ - \hat{A} + \hat{A} = 180^\circ$, δηλαδή το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο (έστω (c)).

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο $TPEZ$ είναι εγγράψιμο (οπότε και το σημείο Z θα ανήκει στο κύκλο (c)).

Θα αποδείξουμε ότι: $\hat{TZE} + \hat{TPE} = 180^\circ$ ($\hat{TPE} = \hat{TPA}$).

Το τετράπλευρο $MTP\Delta$ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (c_1) , άρα:

$$\hat{TPA} = 180^\circ - \hat{TM\Delta} = 180^\circ - \hat{TB\Gamma} = 180^\circ - \hat{B}.$$

Ισχύει επίσης $\hat{TZE} = \hat{TB\Gamma} = \hat{B}$. Προσθέτοντας τις δύο τελευταίες ισότητες κατά μέρη, έχουμε:

$$\hat{TZE} + \hat{TPE} = 180^\circ - \hat{B} + \hat{B} = 180^\circ.$$

Τέλος θα αποδείξουμε ότι και το σημείο Π ανήκει στο κύκλο (c) .

Η γωνία $\hat{\Sigma}_2 = 180^\circ - \hat{A}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\Sigma\Pi M$, οπότε:

$$\hat{\Sigma\Pi Z} = \hat{\Sigma\Pi M} = \hat{\Sigma}_2 - \hat{M} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Sigma\hat{E}Z}.$$

Το τετράπλευρο $\Sigma T\Pi\Pi$ είναι εγγεγραμμένο στο κύκλο (c) και (επειδή $\hat{T}_2 = \hat{\Sigma}_2$) το τετράπλευρο είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Πρόβλημα 4

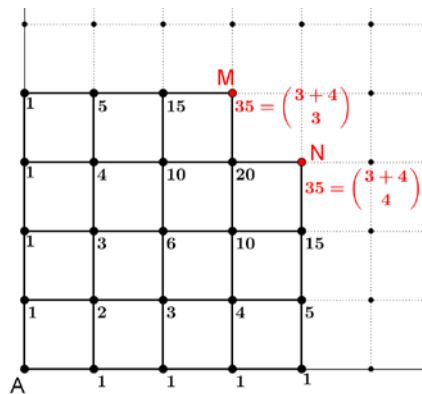
Τετράγωνο $ABCD$ διαιρείται σε n^2 ίσα μικρά (στοιχειώδη) τετράγωνα, σχεδιάζοντας ευθείες παράλληλες στις πλευρές του.

Μία αράχνη ξεκινά από το σημείο A και κινούμενη μόνο προς τα δεξιά και προς τα άνω, προσπαθεί να φθάσει στο σημείο C . Κάθε “κίνηση” της αράχνης αποτελείται ή από k στοιχειώδη βήματα δεξιά και m στοιχειώδη βήματα άνω ή από m στοιχειώδη βήματα δεξιά και k στοιχειώδη βήματα άνω (τα οποία μπορεί να τα κάνει, με όποιο τρόπο θέλει).

Η αράχνη κάνει l “κινήσεις” και στη συνέχεια κινείται (πάντα προς τα δεξιά και άνω) χωρίς κανένα περιορισμό. Αν $n = m \cdot l$, να βρεθεί ο αριθμός όλων των δυνατών τρόπων με τους οποίους η αράχνη μπορεί να φθάσει το σημείο C , όπου n, m, k, l είναι θετικοί ακέραιοι με $k < m$.

Λύση

Υποθέτουμε ότι το τετράγωνο είναι τοποθετημένο σε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς με αρχή το σημείο A και τους άξονες να ταυτίζονται με τις πλευρές AB και AD . Η αράχνη ξεκινά από το σημείο A και κάνει τη πρώτη “κίνηση” κινούμενη m βήματα επάνω και k δεξιά ή m βήματα δεξιά και k επάνω. (Στο σχήμα φαίνεται η περίπτωση για $m = 4$ και $k = 3$)



Σχήμα 2

Μετά την ολοκλήρωση της πρώτης “κίνησης”, η αράχνη μπορεί να βρίσκεται στο σημείο $M(k, m) (\equiv M(3, 4))$ ή στο σημείο $N(m, k) (\equiv N(4, 3))$.

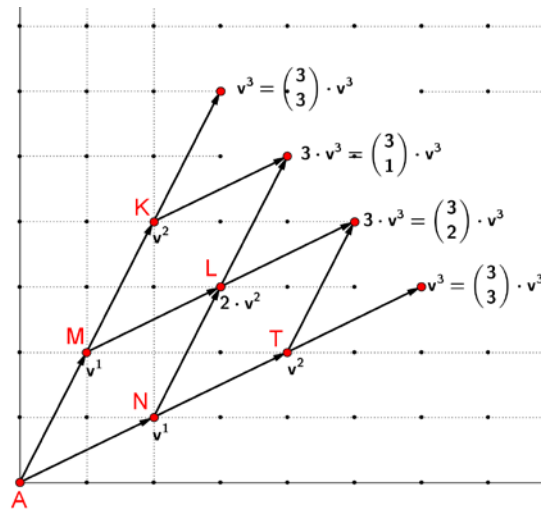
Οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να προσεγγιστεί το σημείο $M(k, m)$ ή το σημείο $N(m, k)$ είναι όσοι οι συνδυασμοί των $k + m$ αντικειμένων ανά k , δηλαδή

$$\binom{k+m}{k} = \binom{k+m}{m} = v,$$

γιατί κάθε σημείο του πλέγματος (μέχρι να φτάσουμε στο σημείο $M(k, m)$ ή το σημείο $N(m, k)$), μπορεί να προσεγγιστεί με το άθροισμα των τρόπων που προσεγγίζονται το πλησιέστερο σημείο από τα αριστερά και το πλησιέστερο σημείο από κάτω.

Μετά την ολοκλήρωση της δεύτερης “κίνησης”, η αράχνη μπορεί να βρίσκεται σε τρία διαφορετικά σημεία ($K(2k, 2m)$, $L(k+m, k+m)$) και $T(2m, 2k)$ με αντίστοιχους τρόπους προσέγγισης v^2 , $2v^2$ και v^2 .

Το σημείο M , μπορούμε να το προσεγγίσουμε με v διαφορετικούς τρόπους (από το σημείο A). Το σημείο K , μπορούμε να το προσεγγίσουμε με v διαφορετικούς τρόπους (από το σημείο M). Άρα το σημείο K , μπορούμε να το προσεγγίσουμε με v^2 διαφορετικούς τρόπους (από το σημείο A).



Σχήμα 3

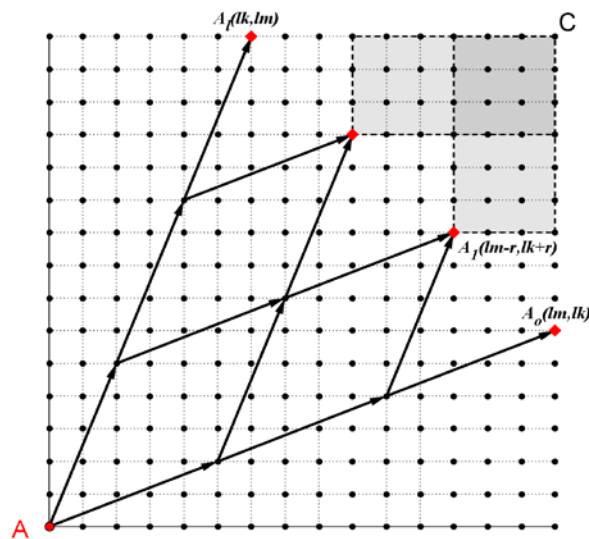
Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι και το σημείο T , μπορούμε να το προσεγγίσουμε με v^2 διαφορετικούς τρόπους (από το σημείο A).

Το σημείο L μπορούμε να το προσεγγίσουμε με v^2 διαφορετικούς τρόπους (ακολουθώντας τη διαδρομή A, M, L) και με v^2 διαφορετικούς τρόπους (ακολουθώντας τη διαδρομή A, N, L). Δηλαδή το σημείο L μπορούμε να το προσεγγίσουμε με $2v^2$ διαφορετικούς τρόπους (από το σημείο A).

Με ανάλογο τρόπο συμπεραίνουμε ότι:

Μετά την ολοκλήρωση της τρίτης κίνησης, η αράχνη μπορεί να βρίσκεται σε τέσσερα διαφορετικά σημεία, τα οποία μπορούμε να τα προσεγγίσουμε με $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot v^3$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot v^3$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot v^3$

και $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot v^3$, αντίστοιχα. Επομένως, μετά την ολοκλήρωση της l κίνησης, η αράχνη μπορεί να βρίσκεται σε $l+1$ διαφορετικά σημεία, τα οποία θα βρίσκονται προφανώς επάνω στην ευθεία με εξίσωση: $x + y = l(k + m)$.



Σχήμα 4

Αν τώρα θέσουμε $r = m - k$, τότε τα σημεία αυτά (με σειρά από δεξιά προς αριστερά) θα είναι τα:

$$A_0(lm, lk), A_1(lm - r, lk + r), A_2(lm - 2r, lk + 2r), \dots, A_l(lm - lr, lk + lr) \equiv A_l(lk, lm).$$

Τα σημεία αυτά μπορούμε να τα προσεγγίσουμε με $\binom{l}{l} \cdot v^l, \binom{l}{l-1} \cdot v^l, \binom{l}{l-2} \cdot v^l, \dots$

και $\binom{l}{0} \cdot v^l$ τρόπους αντίστοιχα (από το σημείο A).

Το σημείο $C(ml, ml)$, μπορεί να προσεγγιστεί από το σημείο:

$$A_0(lm, lk) \text{ με } \binom{(ml - lm) + (ml - lk)}{ml - lk} = \binom{ml - lk}{ml - lk} = \binom{lr}{lr} = \binom{lr}{0 \cdot r} = 1 \text{ τρόπους (**).}$$

$$A_1(lm - r, lk + r) \text{ με } \binom{(ml - lm + r) + (ml - lk - r)}{r} = \binom{ml - lk}{r} = \binom{lr}{1 \cdot r} \text{ τρόπους.}$$

$$A_2(lm - 2r, lk + 2r) \text{ με } \binom{(ml - lm + 2r) + (ml - lk - 2r)}{2r} = \binom{ml - lk}{2r} = \binom{lr}{2 \cdot r} \text{ τρόπους.}$$

.....

$$A_l(lk, lm) \text{ με } \binom{(ml - lk) + (ml - lm)}{ml - lk} = \binom{lr}{lr} = 1 \text{ τρόπους.}$$

Άρα το σημείο $C(ml, ml)$, μπορεί να προσεγγιστεί από το σημείο A με:

$$v^l \left(\binom{l}{l} \cdot \binom{lr}{0} + \binom{l}{l-1} \cdot \binom{lr}{r} + \binom{l}{l-2} \cdot \binom{lr}{2r} + \dots + \binom{l}{0} \cdot \binom{lr}{lr} \right)$$

τρόπους.

(**) Η μετακίνηση από το σημείο (i, j) στο σημείο $(i + k, j + m)$ του πλέγματος (κινούμενοι προς τα δεξιά και άνω), μπορεί να γίνει με $\binom{k+m}{k} = \binom{k+m}{m}$ τρόπους. Η διαδικασία εύρεσης του πλήθους των τρόπων, είναι η ίδια με τη διαδικασία εύρεσης των τρόπων μετακίνησης στη πρώτη “κίνηση”.

Σημείωση. Στην περίπτωση που είναι $m - k = r = 1$, τότε ο αριθμός των δυνατών τρόπων απλοποιείται ως εξής:

$$v^l \left(\binom{l}{l} \cdot \binom{l}{0} + \binom{l}{l-1} \cdot \binom{l}{1} + \binom{l}{l-2} \cdot \binom{l}{2} + \dots + \binom{l}{0} \cdot \binom{l}{l} \right) = v^l \binom{2l}{l} = \binom{k+m}{m}^l \binom{2l}{l}.$$