



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

Προκριματικός διαγωνισμός Νέων

12 Απριλίου 2014

Ενδεικτικές λύσεις

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη πραγματικών αριθμών (x, y) , τα οποία είναι λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - xy(x + y)^2 = 19 \\ |x - y| = 1 \end{cases}.$$

Λύση

Κάνοντας τις σχετικές πράξεις στην πρώτη εξίσωση λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - xy(x + y)^2 = 19 \\ |x - y| = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^3y - 2x^2y^2 - xy^3 = 19 \\ |x - y| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x^4 + y^4 - x^3y - xy^3 = 19 \\ |x - y| = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(x^3 - y^3) = 19 \\ |x - y| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)^2(x^2 + xy + y^2) = 19 \\ |x - y| = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19 \\ |x - y| = 1 \end{cases}, \end{aligned}$$

οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

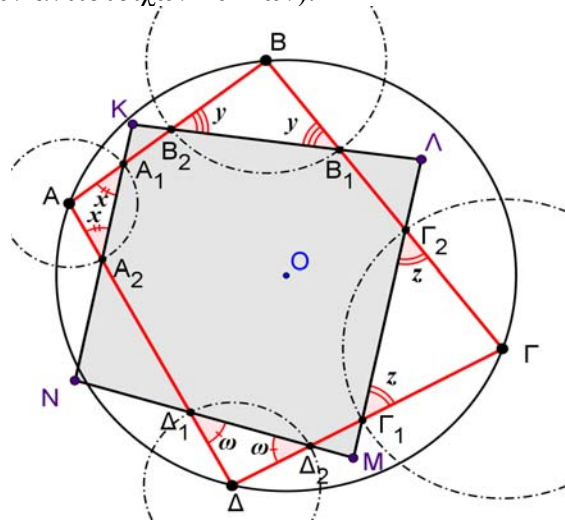
$$\begin{aligned} \bullet \quad &\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 + x^2 - x + (x - 1)^2 = 19 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ 3x^2 - 3x - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x = 3 \text{ ή } x = -2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (3, 2) \text{ ή } (x, y) = (-2, -3). \\ \bullet \quad &\begin{cases} x - y = -1 \\ x^2 + xy + y^2 = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + xy + y^2 = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + x^2 + x + (x + 1)^2 = -19 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ 3x^2 + 3x - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x = -3 \text{ ή } x = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (-3, -2) \text{ ή } (x, y) = (2, 3). \end{aligned}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$ (με κέντρο O και ακτίνα R). Με κέντρα τις κορυφές A, B, Γ, Δ θεωρούμε κύκλους $C_A, C_B, C_\Gamma, C_\Delta$ αντίστοιχα, που δεν τέμνονται μεταξύ τους. Ο κύκλος C_A τέμνει τις πλευρές του τετραπλεύρου, στα σημεία A_1, A_2 , ο κύκλος C_B στα σημεία B_1, B_2 , ο κύκλος C_Γ στα σημεία Γ_1, Γ_2 και ο κύκλος C_Δ στα σημεία Δ_1, Δ_2 . Να αποδειχτεί ότι το τετράπλευρο που ορίζουν τεμνόμενες οι ευθείες $A_1A_2, B_1B_2, \Gamma_1\Gamma_2$ και $\Delta_1\Delta_2$ είναι εγγράψιμο.

Λύση

Τα τρίγωνα $AA_1A_2, BB_1B_2, \Gamma\Gamma_1\Gamma_2$ και $\Delta\Delta_1\Delta_2$ είναι ισοσκελή, γιατί δύο πλευρές τους είναι ακτίνες των αντίστοιχων κύκλων).



Σχήμα 1

Σημειώνοντας με μικρά γράμματα τις ίσες γωνίες των ισοσκελών τριγώνων (όπως στο σχήμα), προκύπτουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$$\hat{A} + \hat{x} + \hat{x} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{x} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} \quad (1)$$

$$\hat{B} + \hat{y} + \hat{y} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{y} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} \quad (2)$$

$$\hat{\Gamma} + \hat{z} + \hat{z} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{z} = 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2} \quad (3)$$

$$\hat{\Delta} + \hat{\omega} + \hat{\omega} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} = 90^\circ - \frac{\hat{\Delta}}{2} \quad (4).$$

Εφόσον το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο, το άθροισμα των απέναντι γωνιών του είναι 180° , οπότε θα ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$$\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \stackrel{(1),(3)}{\Rightarrow} \hat{x} + \hat{z} = 90^\circ \quad (5)$$

$$\hat{B} + \hat{\Delta} = 180^\circ \stackrel{(2),(4)}{\Rightarrow} \hat{y} + \hat{\omega} = 90^\circ \quad (6).$$

Έστω ότι οι ευθείες $A_1A_2, B_1B_2, \Gamma_1\Gamma_2$ και $\Delta_1\Delta_2$ (τεμνόμενες) δημιουργούν το τετράπλευρο $KLMN$. Από το τρίγωνο KA_1B_2 , έχουμε: $\hat{K} + \hat{x} + \hat{y} = 180^\circ$, ενώ από το

τρίγωνο $\text{M}\Gamma_1\Delta_2$, προκύπτει η ισότητα: $\hat{\text{M}} + \hat{\text{z}} + \hat{\omega} = 180^\circ$.

Προσθέτοντας τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών και συνδυάζοντας το αποτέλεσμα με τις ισότητες (5) και (6), έχουμε: $\hat{\text{K}} + \hat{\text{M}} = 180^\circ$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνονται οι ακέραιοι $\alpha_1 = 11$, $\alpha_2 = 1111$, $\alpha_3 = \underbrace{111111}_{6\text{-ψηφία}}$, $\dots$, $\alpha_n = \underbrace{111\cdots 111}_{2n\text{-ψηφία}}$ (n

ακέραιος μεγαλύτερος του 8). Έστω $q_i = \frac{\alpha_i}{11}$, $i = 1, 2, \dots, n$, το πηλίκο της διαίρεσης

του α_i με το 11. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα εννέα “διαδοχικών” πηλίκων:

$$S_i = q_i + q_{i+1} + q_{i+2} + \dots + q_{i+8}$$

είναι πολλαπλάσιο του εννέα, για κάθε $i = 1, 2, 3, \dots, (n-8)$.

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι κάθε πηλίκο $q_i = \frac{\alpha_i}{11}$, $i = 1, 2, \dots, n$ είναι της μορφής: $q_i = \underbrace{101\cdots 101}_{(2i-1)\text{-ψηφία}}$.

Θεωρώντας τη δεκαδική αναπαράσταση του αριθμού α_i , έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha_i &= 10^{2i-1} + 10^{2i-2} + 10^{2i-3} + 10^{2i-4} + \dots + 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1 \\ &= 10^{2i-2}(10+1) + 10^{2i-4}(10+1) + \dots + 10^4(10+1) + 10^2(10+1) + (10+1) \\ &= 11(10^{2i-2} + 10^{2i-4} + \dots + 10^4 + 10^2 + 1).\end{aligned}$$

Άρα είναι:

$$q_i = 10^{2i-2} + 10^{2i-4} + \dots + 10^4 + 10^2 + 1 = \underbrace{101\cdots 101}_{(2i-1)\text{-ψηφία}},$$

δηλαδή ο ακέραιος $q_i = \underbrace{101\cdots 101}_{(2i-1)\text{-ψηφία}}$, αποτελείται από $i-1$ μηδενικά και i μονάδες που

εναλλάσσονται διαδοχικά μεταξύ τους. Άρα το άθροισμα των ψηφίων του q_i είναι i , του q_{i+1} είναι $i+1$ και του q_{i+2} είναι $i+2$ κ.λ.π

Επειδή οι αριθμοί $q_i, q_{i+1}, q_{i+2}, \dots, q_{i+8}$, $i = 1, 2, 3, \dots, (n-8)$ είναι εννέα, το άθροισμα των ψηφίων σε οποιαδήποτε στήλη (στην κατακόρυφη πρόσθεση) δεν υπερβαίνει το εννέα

Άρα το άθροισμα των ψηφίων του αθροίσματος S_i , ισούται με το άθροισμα των ψηφίων όλων των προσθετέων, που είναι

$$(i) + (i+1) + (i+2) + \dots + (i+8) = 9i + \frac{8 \cdot 9}{2} = 9(i+4).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται το σύνολο $\Sigma = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Θέλουμε να διαμερίσουμε το σύνολο Σ σε τρία υποσύνολα A , B και Γ ξένα μεταξύ τους με $A \cup B \cup \Gamma = \Sigma$ και τέτοια ώστε τα αθροίσματα των στοιχείων τους S_A, S_B και S_Γ , αντίστοιχα, να είναι ίσα. Να εξετάσετε, αν αυτό είναι δυνατόν, όταν:

(α) $n = 2014$; (β) $n = 2015$; (γ) $n = 2018$.

Λύση

(α) Υποθέτουμε ότι μπορεί να γίνει το ζητούμενο. Για $n = 2014$ το άθροισμα των στοιχείων του συνόλου Σ είναι: $S_{\Sigma} = S_A + S_B + S_{\Gamma} = 3 \cdot S_A$, δηλαδή το άθροισμα των στοιχείων του συνόλου Σ θα είναι πολλαπλάσιο του 3. Όμως

$$S_{\Sigma}(2014) = \frac{2014 \cdot 2015}{2} = 1007 \cdot 2015 \neq \text{πολλαπλάσιου } 3,$$

οπότε δεν είναι δυνατόν να διαμεριστεί το σύνολο Σ σε τρία υποσύνολα ξένα μεταξύ τους και με ίσα αθροίσματα στοιχείων.

(β) Για $n = 2015$ είναι $S_{\Sigma}(2015) = \frac{2015 \cdot 2016}{2} = 1008 \cdot 2015 = \text{πολλαπλάσιου } 3$.

Παρατηρούμε ότι το σύνολο Σ αποτελείται από το σύνολο $M_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και από 335 διαδοχικές εξάδες της μορφής:

$$M_k = \{6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5\}, k = 1, 2, \dots, 335.$$

Διαμερίζουμε πρώτα το σύνολο M_0 σε τρία υποσύνολα με ίσα αθροίσματα στοιχείων. Αυτά είναι τα $A_0 = \{1, 4\}$, $B = \{2, 3\}$ και $\Gamma = \{5\}$.

Επειδή ισχύει ότι:

$$(6k+1) + (6k+4) = (6k+2) + (6k+3) = 6k + (6k+5) \text{ για κάθε } k = 1, 2, \dots, 335,$$

το ζητούμενο επιτυγχάνεται αν θεωρήσουμε τα σύνολα

$$A = \{1, 4\} \cup \{6k+1, 6k+4 : k = 1, 2, \dots, 335\}$$

$$B = \{2, 3\} \cup \{6k+2, 6k+3 : k = 1, 2, \dots, 335\}$$

$$\Gamma = \{5\} \cup \{6k, 6k+5 : k = 1, 2, \dots, 335\}.$$

(γ) Για $n = 2018$ είναι $S_{\Sigma}(2018) = \frac{2018 \cdot 2019}{2} = 1009 \cdot 2019 = \text{πολλαπλάσιου } 3$.

Παρατηρούμε ότι το σύνολο Σ αποτελείται από το σύνολο $M_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ και από 335 διαδοχικές εξάδες της μορφής:

$$M_k = \{6k+3, 6k+4, 6k+5, 6k+6, 6k+7, 6k+8\}, k = 1, 2, \dots, 335.$$

Διαμερίζουμε πρώτα το σύνολο M_0 σε τρία υποσύνολα με ίσα αθροίσματα στοιχείων. Αυτά είναι τα $A_0 = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{5, 7\}$ και $\Gamma = \{4, 8\}$.

Επειδή επιπλέον ισχύει ότι:

$$(6k+3) + (6k+8) = (6k+4) + (6k+7) = (6k+5) + (6k+6),$$

για κάθε $k = 0, 1, \dots, 335$, το ζητούμενο επιτυγχάνεται αν θεωρήσουμε τα σύνολα

$$A = \{1, 2, 3, 6\} \cup \{6k+3, 6k+8 : k = 0, 1, 2, \dots, 335\}$$

$$B = \{5, 7\} \cup \{6k+4, 6k+7 : k = 0, 1, 2, \dots, 335\}$$

$$\Gamma = \{4, 8\} \cup \{6k+5, 6k+6 : k = 0, 1, 2, \dots, 335\}.$$

Σημείωση. Τα σύνολα A , B και Γ που θεωρήσαμε στα ερωτήματα (β) και (γ) δεν είναι μοναδικά. Υπάρχουν και άλλες δυνατές επιλογές.