ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2014

ΘΕΜΑ 31ο :

Έστω $f:[0,1]\to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

- $f'(0)=f'(1)=0$
- $f(0)=0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^2+x$

α) Αν οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g στα σημεία της με τετμημένες $x_1=0$ και $x_2=1$ τέμνονται στο σημείο με τετμημένη $x_3=\frac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι:

i) $g(1)=0$

ii) Υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $g'(\xi)+2\xi=1$

β) Να αποδείξετε ότι:

i) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (1-x)f'(x)dx$

ii) Υπάρχει $x_o\in[0,1]$, ώστε $f'(x_o)=2\int_0^1 f(x)dx$

ΛΥΣΗ

α) i) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $g'(x)=f'(x)-2x+1$, οπότε

$$g'(0)=f'(0)+1=1 \quad \text{και} \quad g'(1)=f'(1)-1=-1$$

Επίσης:

$$g(0)=f(0)=0 \quad \text{και} \quad g(1)=f(1) \quad (1)$$

οπότε οι εφαπτόμενες της C_g στα σημεία $A(0,g(0))$ και $B(1,g(1))$ έχουν αντίστοιχα εξισώσεις:

$$\varepsilon_A:\ y-g(0)=g'(0)(x-0)\Rightarrow y=x \quad \text{και}$$

$$\varepsilon_B:\ y-g(1)=g'(1)(x-1)\Rightarrow y-f(1)=-1(x-1)\Rightarrow y=-x+1+f(1)$$

Το σημείο $M\left(\frac{1}{2}, y_o\right)$ είναι το σημείο τομής των εφαπτόμενων ε_A και ε_B, οπότε έχουμε:

$$y_o = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad y_o = -\frac{1}{2} + 1 + f(1)$$

Επομένως έχουμε:

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + 1 + f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} g(1) = 0$$

ii) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f'(x) = g'(x) + 2x - 1$

Είναι $f(0) = 0$ και $f(1) = 0$, οπότε $f(0) = f(1)$, δηλαδή ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle.

Επομένως θα υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$

Επιπλέον

$$f'(\xi) = 0 \Rightarrow g'(\xi) + 2\xi - 1 = 0 \Rightarrow g'(\xi) + 2\xi = 1 \quad (2)$$

β) i) Είναι:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x-1)' f(x)\,dx = \left[(x-1)f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 (x-1) f'(x)\,dx \overset{f(0)=0}{=} \int_0^1 (1-x) f'(x)\,dx \quad (6)$$

ii) Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο διάστημα [0, 1] ως παραγωγίσιμη, άρα παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή. Αν m, M είναι αντίστοιχα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της στο $[0,1]$, τότε έχουμε:

$$m \le f'(x) \le M$$

Επειδή $1 - x \ge 0$ έχουμε:

$$(1-x)m \le (1-x)f'(x) \le (1-x)M \Rightarrow$$

$$m\int_0^1 (1-x)\,dx \le \int_0^1 (1-x)f'(x)dx \le M\int_0^1 (1-x)\,dx$$

Είναι:

$$\int_0^1 (1-x)\,dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

οπότε έχουμε:

$$\frac{1}{2}m \le \int_0^1 (1-x) f'(x)\,dx \le \frac{1}{2}M \overset{(6)}{\Rightarrow} m \le 2\int_0^1 f(x)\,dx \le M$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $2\int_0^1 f(x)dx$ ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f', άρα

υπάρχει $x_o \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε $f'(x_o) = 2\int_0^1 f(x)\,dx$

ΘΕΜΑ 32ο :

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(-\infty,1)\to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x)=\int_0^x e^{f(x-t)}dt$ για κάθε $x\in(-\infty\ ,1)$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=-\ln(1-x)$, $x<1$

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό E(t) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, την εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων και την ευθεία με εξίσωση $x=t$, όπου $0<t<1$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to1^-}E(t)$

δ) Να αποδείξετε ότι: $2\int_\alpha^{\alpha-2}f(t)dt<\int_\alpha^{\alpha-4}f(t)dt$, όπου $\alpha<1$

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $x-t=u$, οπότε $du=-dt$. Όταν $t=0$ το $u=x$ και όταν $t=x$ το $u=0$

Άρα έχουμε:

$$f(x)=\int_0^x e^{f(x-t)}dt=\int_x^0 e^{f(u)}(-du)=\int_0^x e^{f(t)}dt$$

Η συνάρτηση $e^{f(t)}$ είναι συνεχής στο $(-\infty,1)$, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων το $0\in(-\infty,1)$, οπότε η συνάρτηση $\int_0^x e^{f(t)}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$ οπότε και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$

Για κάθε $x\in(-\infty,1)$ είναι:

$$f'(x)=e^{f(x)}\Leftrightarrow f'(x)e^{-f(x)}=1\Leftrightarrow -f'(x)e^{-f(x)}=-1\Leftrightarrow\left(e^{-f(x)}\right)'=(-x)'$$

Άρα έχουμε:

$$e^{-f(x)}=-x+c\ ,\quad x\in(-\infty,1)$$

Για $x=0$ έχουμε $f(0)=\int_0^0 e^{f(t)}dt=0$, οπότε $e^{-f(0)}=0+c\Rightarrow c=1$

Επομένως για κάθε $x\in(-\infty,1)$ είναι:

$$e^{-f(x)}=-x+1\Leftrightarrow -f(x)=\ln(1-x)\Leftrightarrow f(x)=-\ln(1-x)\ ,\ x\in(-\infty,1)$$

β) Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(-\ln(1-x)\right)\overset{u=1-x}{=}\lim\limits_{u\to0^+}\left(-\ln u\right)=+\infty$,

  άρα η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\ln(1-x)}{x}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\frac{1}{1-x}(1-x)'}{1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-x}=0=\lambda$ και

  $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\ln(1-x)\right]=-\infty$

  Επομένως η C_f δεν έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη.

γ) Για κάθε $x \in (-\infty , 1)$ έχουμε :

$$f'(x) = \left[-\ln(1-x)\right]' = -\frac{1}{1-x}(1-x)' = \frac{1}{1-x} \quad \text{και}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = -\frac{1}{(1-x)^2}(1-x)' = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(-\infty,1)$, οπότε η C_f βρίσκεται «πάνω» από την εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο της $O(0,0)$

Επειδή $f'(0) = 1$ και $f(0) = -\ln(1-0) = 0$, η εφαπτομένη ε έχει εξίσωση :

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y = x$$

Άρα $f(x) \geq y \Rightarrow f(x) \geq x$ για κάθε $x \in (-\infty,1)$

Επομένως το εμβαδό $E(t)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, την εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων και την ευθεία με εξίσωση $x = t$, όπου $0 < t < 1$, είναι:

$$E(t) = \int_0^t \left[-\ln(1-x) - x\right]dx = -\int_0^t \ln(1-x)dx - \int_0^t x\,dx =$$

$$= -\int_0^t (x)'\ln(1-x)dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^t = -\left[x\ln(1-x)\right]_0^t + \int_0^t x\frac{1}{1-x}(1-x)'dx - \frac{t^2}{2} =$$

$$= -t\ln(1-t) + \int_0^t \frac{-x}{1-x}dx - \frac{t^2}{2} = -t\ln(1-t) + \int_0^t \frac{1-x-1}{1-x}dx - \frac{t^2}{2} =$$

$$= -t\ln(1-t) + \int_0^t \left(1 - \frac{1}{1-x}\right)dx - \frac{t^2}{2} = -t\ln(1-t) + \int_0^t 1dx + \int_0^t \frac{-1}{1-x}dx - \frac{t^2}{2} =$$

$$= -t\ln(1-t) + 1\cdot(t-0) + \int_0^t \frac{1}{1-x}(1-x)'dx - \frac{t^2}{2} =$$

$$= -t\ln(1-t) + t + \left[\ln|1-x|\right]_0^t - \frac{t^2}{2} = -t\ln(1-t) + t + \ln(1-t) - \frac{t^2}{2} =$$

$$= (1-t)\ln(1-t) + t - \frac{t^2}{2} = (1-t)\ln(1-t) - \frac{(1-t)^2}{2} + \frac{1}{2}, \quad t \in (0,1)$$

Έχουμε :

$$\lim_{t\to 1^-} E(t) = \lim_{t\to 1^-}\left[(1-t)\ln(1-t) - \frac{(1-t)^2}{2} + \frac{1}{2}\right] \overset{u=1-t}{=} \lim_{u\to 0^+}\left[u\ln u - \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2},$$

γιατί $\lim\limits_{u\to 0^+}(u\ln u) \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim\limits_{u\to 0^+}\left(\dfrac{\ln u}{\frac{1}{u}}\right) \underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+}\left(\dfrac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}}\right) = \lim\limits_{u\to 0^+}\left(-\dfrac{u^2}{u}\right) = \lim\limits_{u\to 0^+}(-u) = 0$

δ) Η δοθείσα ανίσωση ισοδύναμα γράφεται :

$$2\int_{\alpha}^{\alpha-2} f(t)dt < \int_{\alpha}^{\alpha-2} f(t)dt + \int_{\alpha-2}^{\alpha-4} f(t)dt \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\alpha-2} f(t)dt < \int_{\alpha-2}^{\alpha-4} f(t)dt \;,\; \alpha<1$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση :

$$\Phi(x) = \int_{x}^{x-2} f(t)dt = \int_{x}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x-2} f(t)dt = -\int_{0}^{x} f(t)dt + \int_{0}^{x-2} f(t)dt \;,\; x<1$$

που είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$, με

$$\Phi'(x) = -f(x) + f(x-2) = f(x-2) - f(x) \quad \text{για κάθε } x \in (-\infty\,,1)$$

Για κάθε $x \in (-\infty\,,1)$ είναι $f'(x) = \dfrac{1}{1-x} > 0$, επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty\,,1)$, οπότε ισχύει:

$$x-2 < x < 1 \Rightarrow f(x-2) < f(x) \Rightarrow f(x-2) - f(x) < 0 \Rightarrow$$

$$\Phi'(x) < 0 \;, \text{για κάθε } x \in (-\infty\,,1)$$

Άρα η συνάρτηση Φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty\,,1)$

Επομένως έχουμε:

$$\alpha-2 < \alpha < 1 \Rightarrow \Phi(\alpha-2) > \Phi(\alpha) \;, \text{για κάθε } \alpha \in (-\infty,1),$$

δηλαδή

$$\int_{\alpha}^{\alpha-2} f(t)dt < \int_{\alpha-2}^{\alpha-4} f(t)dt$$

ΘΕΜΑ 33ο :

Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)\eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1}=4$ και οι συναρτήσεις $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ και $h(x)=\int_0^1 f(x+t)dt$, $x,t\in\mathbb{R}$.

Αν $E(\Omega_1)=\dfrac{4}{3}$, $E(\Omega_2)=\dfrac{10}{3}$ είναι τα εμβαδά των χωρίων Ω_1 και Ω_2 που περικλείονται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$, $x=1$ και $x=1$, $x=2$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $f(x)>0$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

β) $g(2)=\dfrac{14}{3}$

γ) Υπάρχει μοναδικό $\xi\in(1,2)$ **τέτοιο, ώστε** $g(\xi)=3$

δ) Υπάρχουν $\theta_1,\theta_2\in(1,2)$ **τέτοια, ώστε** $\dfrac{f(\theta_1)+f(\theta_2)}{f(\theta_1)\cdot f(\theta_2)}=\dfrac{3}{5}$

ε) Ισχύει $h(x)=g(x+1)-g(x)$, $x\in\mathbb{R}$

στ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(0,1)$ **τέτοιο, ώστε** $f(\rho+1)-f(\rho)=2$

ΛΥΣΗ

α) Έστω $\varphi(x)=\dfrac{f(x)\eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1}$ για x κοντά στο 1, οπότε $\lim\limits_{x\to1}\varphi(x)=4$

Για x κοντά στο 1 έχουμε:

$$f(x)=\frac{\varphi(x)(\sqrt{x}-1)}{\eta\mu(x-1)}\Leftrightarrow f(x)=\frac{\varphi(x)(x-1)}{\eta\mu(x-1)(\sqrt{x}+1)}\Leftrightarrow f(x)=\varphi(x)\cdot\frac{1}{\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

Είναι:

$$\lim_{x\to1}\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\overset{x-1=u}{=}\lim_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$$

οπότε

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left[\varphi(x)\cdot\frac{1}{\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right]=4\cdot1\cdot\frac{1}{2}=2$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o=1$ ισχύει $f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και για κάθε $x\in R$ είναι $f(x)\neq0$, οπότε η συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο στο R. Επειδή $f(1)=2>0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

β) Είναι:

$$E(\Omega_1)=\int_0^1 f(x)dx=\frac{4}{3}\qquad\text{και}\qquad E(\Omega_2)=\int_1^2 f(x)dx=\frac{10}{3}$$

οπότε $g(2)=\displaystyle\int_0^2 f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^2 f(t)dx=\frac{4}{3}+\frac{10}{3}=\frac{14}{3}$

γ) Είναι:

$$g(1)=\int_0^1 f(t)dt=\frac{4}{3}\qquad\text{και}\qquad g(2)=\int_0^2 f(t)dt=\frac{14}{3}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, οπότε η συνάρτηση $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'(x)=f(x)>0$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο R.

Έχουμε:

- η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[1,2]$
- $g(1)\neq g(2)$
- $3\in\left(g(1),g(2)\right)=\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{14}{3}\right)$

Επομένως από Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών θα υπάρχει $\xi\in(1,2)$ και μάλιστα μοναδικό, αφού η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα τέτοιο, ώστε $g(\xi)=3$

δ) Η g είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και σε καθένα από τα διαστήματα $[1,\xi]$ και $[\xi,2]$, οπότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ, επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον:

- $\theta_1 \in (1, \xi)$ τέτοιο, ώστε $g'(\theta_1) = \dfrac{g(\xi) - g(1)}{\xi - 1} \Rightarrow f(\theta_1) = \dfrac{3 - \frac{4}{3}}{\xi - 1} \Rightarrow \xi - 1 = \dfrac{\frac{5}{3}}{f(\theta_1)}$ (1) και
- $\theta_2 \in (\xi, 2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\theta_2) = \dfrac{g(2) - g(\xi)}{2 - \xi} \Rightarrow f(\theta_2) = \dfrac{\frac{14}{3} - 3}{2 - \xi} \Rightarrow 2 - \xi = \dfrac{\frac{5}{3}}{f(\theta_2)}$ (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$1 = \frac{\frac{5}{3}}{f(\theta_1)} + \frac{\frac{5}{3}}{f(\theta_2)} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{1}{f(\theta_1)} + \frac{1}{f(\theta_2)} \Rightarrow \frac{f(\theta_1) + f(\theta_2)}{f(\theta_1)f(\theta_2)} = \frac{3}{5}$$

ε) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$h(x) = \int_0^1 f(x+t)dt \overset{x+t=u}{\underset{dt=du}{=}} \int_x^{x+1} f(u)du = \int_x^0 f(u)du + \int_0^{x+1} f(u)du =$$

$$= \int_0^{x+1} f(u)du - \int_0^x f(u)du = g(x+1) - g(x)$$

στ) Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με

$$h'(x) = \left(g(x+1) - g(x)\right)' = g'(x+1)(x+1)' - g'(x) = g'(x+1) - g'(x) = f(x+1) - f(x)$$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $h'(\rho) = \dfrac{h(1) - h(0)}{1 - 0} \Rightarrow f(\rho + 1) - f(\rho) = h(1) - h(0)$

Όμως $h(1) = g(2) - g(1) = \dfrac{14}{3} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{10}{3}$ και $h(0) = g(1) - g(0) = \dfrac{4}{3} - 0 = \dfrac{4}{3}$

Οπότε $f(\rho + 1) - f(\rho) = \dfrac{10}{3} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$

ΘΕΜΑ 34ο :

Έστω $f : R \to R$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- **$f'(x) + 1 = 2x\left(f(x) + x\right)$ για κάθε $x \in R$**
- **$f(0) = 1$**

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x^2} - x$, $x \in R$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

γ) Να αποδείξετε ότι $e^{x^2 - 1} \geq 2x - 1$ για κάθε $x \in R$

δ) Να λύσετε στο διάστημα $(0, +\infty)$ την εξίσωση $e^{x^4 - x^2} = \dfrac{1}{x}$

ε) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \displaystyle\int_{2-x}^{x} f(t)dt$, $x \in R$

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

ii) Να αποδείξετε ότι $4 \cdot \displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(2x)dx < \int_0^2 f(x)dx$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f'(x)+1=2x\big(f(x)+x\big) \Rightarrow f'(x)-2xf(x)=-1+2x^2 \overset{\cdot e^{-x^2}}{\Rightarrow}$$
$$f'(x)e^{-x^2}+e^{-x^2}(-2x)f(x)=-e^{-x^2}+2x^2e^{-x^2} \Rightarrow$$
$$f'(x)e^{-x^2}+e^{-x^2}(-2x)f(x)=(-x)'e^{-x^2}+(-x)e^{-x^2}(-2x) \Rightarrow$$
$$f'(x)e^{-x^2}+e^{-x^2}(-x^2)'f(x)=(-x)'e^{-x^2}+(-x)e^{-x^2}(-x^2)' \Rightarrow$$
$$\left(f(x)e^{-x^2}\right)'=\left(-xe^{-x^2}\right)' \Rightarrow f(x)e^{-x^2}=-xe^{-x^2}+c$$

και $f(0)=1$, οπότε $c=1$

Επομένως $f(x)e^{-x^2}=-xe^{-x^2}+1$, οπότε $f(x)=e^{x^2}-x$, $x \in R$

β) Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με

$$f'(x)=2xe^{x^2}-1 \quad \text{και} \quad f''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}=2(2x^2+1)e^{x^2}$$

Για κάθε $x \in R$ ισχύει:

$$f''(x)=2(2x^2+1)e^{x^2}>0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R

γ) Είναι:

$$f(1)=e-1 \quad \text{και} \quad f'(1)=2e-1$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_o=1$ είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1) \Rightarrow y-(e-1)=(2e-1)(x-1) \Rightarrow y=(2e-1)x-e$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R, η εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_o=1$ βρίσκεται από την C_f και κάτω.

Άρα για κάθε $x \in R$ ισχύει:

$$f(x) \ge (2e-1)x-e \Rightarrow e^{x^2}-x \ge 2ex-x-e \Rightarrow$$
$$e^{x^2} \ge (2x-1)e \Rightarrow \frac{e^{x^2}}{e} \ge 2x-1 \Rightarrow e^{x^2-1} \ge 2x-1$$

δ) Στο διάστημα $(0,+\infty)$ έχουμε:

$$e^{x^4-x^2}=\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{e^{x^4}}{e^{x^2}}=\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{e^{x^4}}{e^{x^2}}=\frac{x}{x^2} \Leftrightarrow x^2e^{x^4}=xe^{x^2} \Leftrightarrow$$

$$2x^2e^{x^4}=2xe^{x^2} \Leftrightarrow 2x^2e^{x^4}-1=2xe^{x^2}-1 \Leftrightarrow f'(x^2)=f'(x) \quad (1)$$

Η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα άρα και «1 – 1», οπότε από τη σχέση (1) έχουμε:

$$x^2=x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=1$$

ε) i) Η συνάρτηση g γράφεται $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^{2-x} f(t)\,dt$ και είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, ως διαφορά συναρτήσεων που είναι δυο φορές παραγωγίσιμες, με:

$$g'(x)=\left(\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^{2-x} f(t)\,dt\right)'=f(x)-f(2-x)\cdot(-1)=f(x)+f(2-x)$$

Η συνάρτηση g' είναι παραγωγίσιμη (σύνθεση και άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$g''(x)=f'(x)-f'(2-x)$$

Δεδομένου ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχουμε:

- $g''(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)>f'(2-x) \Leftrightarrow x>2-x \Leftrightarrow x>1$
- $g''(x)<0 \Leftrightarrow f'(x)<f'(2-x) \Leftrightarrow x<2-x \Leftrightarrow x<1$
- $g''(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή στο διάστημα $[1,+\infty)$, κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και παρουσιάζει καμπή στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$. Το σημείο καμπής της γραφικής της παράστασης της συνάρτησης g είναι το $M\left(1,\, g(1)\right)$, δηλαδή το $M\left(1,\, 0\right)$, αφού $g(1)=\int_1^1 f(t)\,dt=0$

ii) Στο ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους της σχέσης που θέλουμε να αποδείξουμε, αν θέσουμε $2x=u$ τότε, έχουμε:

$$2dx=du\,,\quad u_1=\frac{1}{2}\quad \text{και}\quad u_2=\frac{3}{2}$$

οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(u)\,du<\int_0^2 f(x)\,dx \Leftrightarrow 2g\left(\frac{3}{2}\right)<g(2)$$

Δεδομένου ότι $g(1)=0$ η αποδεικτέα σχέση μπορεί να λάβει τη μορφή

$$g\left(\frac{1+2}{2}\right)<\frac{1}{2}\left(g(1)+g(2)\right)$$

Η συνάρτηση g σε καθένα από τα διαστήματα $\left[1,\ \frac{3}{2}\right]$, $\left[\frac{3}{2},\ 2\right]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, οπότε υπάρχουν:

- $\xi_1\in\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi_1)=\dfrac{g\left(\frac{3}{2}\right)-g(1)}{\frac{1}{2}} \overset{g(1)=0}{\Rightarrow} g'(\xi_1)=2g\left(\frac{3}{2}\right)$, (2)
- $\xi_2\in\left(\frac{3}{2},\ 2\right)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi_2)=\dfrac{g(2)-g\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(\xi_2)=2g(2)-2g\left(\frac{3}{2}\right)$, (3)

Η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, 2]$ και $\xi_1 < \xi_2$, οπότε $g'(\xi_1) < g'(\xi_2)$
Επομένως έχουμε:

$$g'(\xi_1) < g'(\xi_2) \underset{(3)}{\overset{(2)}{\Rightarrow}} 2g\left(\frac{3}{2}\right) < 2g(2) - 2g\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow 2g\left(\frac{3}{2}\right) < g(2)$$

που είναι το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 35ο :

Δίνονται:

- **Η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(x) > 0$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ και**
- **Η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{2x} + \frac{3x}{2} - \frac{\ln x}{x} - 3$, $x > 0$**

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση g

Αν επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις:

- $\displaystyle\int_{e^x f(x)}^{(1+e^x)f'(x)} e^{-x} g(t)dt + (e^{-x}+1)f'(x) = f(x)$ **, για κάθε $x \in R$ και**
- $f(0) = 2$

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

γ) Αν $f(x) = e^x + 1$, τότε:

i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2+1}{f(x)} dx$

ii) Να βρείτε το $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(\varepsilon\varphi x) - f(\eta\mu x)}{\varepsilon\varphi x - \eta\mu x}$

iii) Αν μια συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0, 1]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$, ώστε

$$\int_0^1 h(x)f(\sqrt{x})dx = h(\xi)\int_0^1 f(\sqrt{x})dx$$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$$g'(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2} - \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{-1+3x^2+2\ln x - 2}{2x^2} = \frac{3x^2+2\ln x-3}{2x^2}$$

Το πρόσημο της συνάρτησης g' εξαρτάται μόνο από το πρόσημο του αριθμητή.

Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση

$$G(x) = 3x^2 + 2\ln x - 3 \ , \ \ x > 0$$

Η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$G'(x) = 6x + \frac{2}{x} > 0$$

Άρα η συνάρτηση G είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Εξάλλου $G(1) = 0$, οπότε

- για $x > 1$ έχουμε $G(x) > G(1) \Rightarrow G(x) > 0$, οπότε $g'(x) > 0$ και
- για $0 < x < 1$ έχουμε $G(x) < G(1) \Rightarrow G(x) < 0$, οπότε $g'(x) < 0$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	
			Ελάχιστο		

Επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0\,,\,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,\,+\infty)$

Επίσης η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$ το $g(1)=-1$

β) Είναι:

$$\int_{e^x f(x)}^{(1+e^x)f'(x)} e^{-x} g(t)dt + (e^{-x}+1)f'(x) = f(x) \Rightarrow$$

$$e^{-x}\int_{e^x f(x)}^{(1+e^x)f'(x)} g(t)dt + e^{-x}(1+e^x)f'(x) = f(x) \Rightarrow$$

$$\int_{e^x f(x)}^{(1+e^x)f'(x)} g(t)dt + (e^x+1)f'(x) = e^x f(x) \Rightarrow$$

$$\int_{e^x f(x)}^{(1+e^x)f'(x)} g(t)dt + (e^x+1)f'(x) - e^x f(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{e^x f(x)}^{(1+e^x)f'(x)} g(t)dt + \left[\,t\,\right]_{e^x f(x)}^{(e^x+1)f'(x)} = 0 \Rightarrow \int_{e^x f(x)}^{(1+e^x)f'(x)} [g(t)+1]dt = 0$$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_o \in R$ τέτοιο, ώστε

$$e^{x_o} f(x_o) \neq (1+e^{x_o})f'(x_o)$$

τότε στο διάστημα που σχηματίζουν οι αριθμοί $e^{x_o}f(x_o)$ και $(1+e^{x_o})f'(x_o)$, η συνάρτηση $g(t)+1$, όπως προκύπτει από το ερώτημα (α), λαμβάνει θετικές τιμές για κάθε $t \neq 1$, οπότε

$$\int_{e^{x_o} f(x_o)}^{(1+e^{x_o})f'(x_o)} [g(t)+1]dt \neq 0$$

που είναι άτοπο.

Άρα για κάθε $x \in R$ ισχύει:

$$e^x f(x) = (e^x+1)f'(x) \Rightarrow e^x f(x) - (e^x+1)f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{(e^x+1)f'(x) - e^x f(x)}{(e^x+1)^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x+1}\right)' = 0 \Rightarrow f(x) = c(e^x+1)$$

και με δεδομένο ότι $f(0)=2$, βρίσκουμε ότι $c=1$

Επομένως έχουμε:

$$f(x) = e^x + 1\,,\;\; x \in R$$

γ) i) Έχουμε:

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{x^2+1}{f(x)}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2+1}{e^x+1}dx$$

Αν θέσουμε $x=-u$ τότε, έχουμε $dx=-du$, $u_1=1$, $u_2=-1$ και

$$I=-\int_{1}^{-1}\frac{x^2+1}{e^{-x}+1}dx=\int_{-1}^{1}\frac{(x^2+1)e^x}{e^x+1}dx$$

οπότε

$$2I=\int_{-1}^{1}\frac{(x^2+1)(e^x+1)}{e^x+1}dx=\int_{-1}^{1}(x^2+1)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$$

Άρα

$$I=\frac{4}{3}$$

ii) Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\varepsilon\varphi x)-f(\eta\mu x)}{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\varepsilon\varphi x}-e^{\eta\mu x}}{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\eta\mu x}(e^{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}-1)}{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}=1$$

διότι:

$$\lim_{x\to 0}e^{\eta\mu x}=1 \text{ και } \lim_{x\to 0}\frac{e^{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}-1}{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}(\varepsilon\varphi x-\eta\mu x)'}{(\varepsilon\varphi x-\eta\mu x)'}=1$$

iii) Η συνάρτηση h, ως συνεχής στο διάστημα $[0\,,1]$ λαμβάνει μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή m. Επίσης $f(\sqrt{x})>0$, οπότε έχουμε:

$$m\le h(x)\le M\Rightarrow m f(\sqrt{x})\le h(x)f(\sqrt{x})\le Mf(\sqrt{x})\Rightarrow$$

$$m\int_0^1 f(\sqrt{x})dx\le\int_0^1 h(x)f(\sqrt{x})dx\le M\int_0^1 f(\sqrt{x})dx$$

Επομένως, ο αριθμός

$$\frac{\int_0^1 h(x)f(\sqrt{x})dx}{\int_0^1 f(\sqrt{x})dx}$$

ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης h.

Άρα υπάρχει $\xi\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε

$$h(\xi)=\frac{\int_0^1 h(x)f(\sqrt{x})dx}{\int_0^1 f(\sqrt{x})dx}\Rightarrow$$

$$\int_0^1 h(x)f(\sqrt{x})dx=h(\xi)\int_0^1 f(\sqrt{x})dx$$

που είναι το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 36ο :

Έστω η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x)=|f(x)|$ Αν $E(t)=t\ln t-t+1$, $t>0$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=t$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $f(t)=\ln t$, $t>0$

β) Αν η ευθεία $y=\alpha$, με $\alpha>0$, τέμνει τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g στα σημεία A και B, να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της C_g στα σημεία A και B είναι κάθετες.

γ) Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln t\le t-1$ που ισχύει για κάθε $t>0$, να αποδείξετε ότι:

i) $\ln t \ge \dfrac{t-1}{t}$ **για κάθε** $t>0$

ii) $\lim\limits_{x\to 1^+}\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{f(t)}dt=\ln 2$ **και**

iii) $\lim\limits_{x\to 1}\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{f(t)}{t-1}dt=0$

ΛΥΣΗ

α) Για $t>1$ είναι $E(t)=\int_1^t |f(x)|\,dx$, δηλαδή $\int_1^t |f(x)|\,dx=t\ln t-t+1$

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=|f(x)|$, τότε η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$\int_1^t g(x)dx=t\ln t-t+1$$

και αν παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της, έχουμε:

$$\left(\int_1^t g(x)dx\right)'=(t\ln t-t+1)'\Rightarrow g(t)=\ln t,\quad t>1$$

Επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής ως απόλυτη τιμή συνεχούς συνάρτησης θα ισχύει:

$$g(1)=\lim_{x\to 1^+}g(x)\Rightarrow g(1)=0\Rightarrow |f(1)|=0\Leftrightarrow f(1)=0$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε έχουμε:

- Για $t<1$ είναι $f(t)<f(1)\Rightarrow f(t)<0$
- Για $t>1$ είναι $f(t)>f(1)\Rightarrow f(t)>0$

Επομένως για $t>1$ είναι:

$$g(t)=|f(t)|=\ln t\Rightarrow f(t)=\ln t$$

Επειδή $f(1)=0$ έχουμε τελικά:

$$f(t)=\ln t,\quad t\ge 1$$

Αν $0<t<1$ είναι:

$$\int_t^1 |f(x)|\,dx = t\ln t - t + 1 \Leftrightarrow -\int_1^t g(x)dx = t\ln t - t + 1$$

Παραγωγίζοντας προκύπτει ότι:

$$-g(t) = \ln t \Leftrightarrow -|f(t)| = \ln t \overset{f(t)<0}{\Leftrightarrow} f(t) = \ln t$$

Επομένως είναι:

$$f(t) = \ln t\,,\ t>0$$

β) Θα βρούμε τα κοινά σημεία της ευθείας $y=\alpha$ και της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης $g(x)=|f(x)|$

Έχουμε:

$$g(x)=\alpha \Leftrightarrow |\ln x| = \alpha \Leftrightarrow (\ln x = \alpha \ \text{ή}\ \ln x = -\alpha) \Leftrightarrow (x_1 = e^{\alpha}\ \ \text{ή}\ \ x_2 = e^{-\alpha})\ ,\ x_2<1<x_1$$

Επομένως για τους συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτομένων της γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης $g(x)=|f(x)|$ στα σημεία Α και Β, έχουμε:

$$\lambda_A\cdot\lambda_B = g'(x_2)\cdot g'(x_1) = \left(-\frac{1}{x_2}\right)\cdot\left(\frac{1}{x_1}\right) = -e^{\alpha}\cdot e^{-\alpha} = -1$$

Επομένως οι εφαπτόμενες της C_g στα σημεία Α και Β είναι κάθετες.

γ) **i)** Αν στην ανισότητα $\ln t \le t-1,\ t>0$ (1), θέσουμε όπου t το $\frac{1}{t}$ έχουμε:

$$\ln t \ge 1-\frac{1}{t} \Leftrightarrow \ln t \ge \frac{t-1}{t}\ ,\ t>0 \qquad (2)$$

ii) Συνδυάζοντας τις ανισότητες (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{t-1}{t} \le \ln t \le t-1\ ,\ t>0$$

Για $t>1$ είναι:

$$\frac{1}{t-1} \le \frac{1}{\ln t} \le \frac{t}{t-1}$$

και για $x>1$ προκύπτει ότι:

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}dt \le \int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt \le \int_x^{x^2}\frac{t}{t-1}dt \Leftrightarrow$$

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}dt \le \int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt \le \int_x^{x^2}\frac{t-1+1}{t-1}dt \Leftrightarrow$$

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}dt \le \int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt \le \int_x^{x^2}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)dt \Leftrightarrow$$

$$\Big[\ln(t-1)\Big]_x^{x^2} \le \int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt \le \Big[t+\ln(t-1)\Big]_x^{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\left[\ln(t-1)\right]_x^{x^2} \le \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}dt \le \left[t+\ln(t-1)\right]_x^{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\ln(x^2-1)-\ln(x-1) \le \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}dt \le x^2-x+\ln(x^2-1)-\ln(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\ln\frac{x^2-1}{x-1} \le \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}dt \le x^2-x+\ln\frac{x^2-1}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\ln(x+1) \le \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}dt \le x^2-x+\ln(x+1)$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\ln(x+1)\right)=\ln 2$
- $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2-x+\ln(x+1)\right)=\ln 2$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to 1^+}\int_x^{x^2}\frac{1}{f(t)}dt=\ln 2$

iii) 1ος τρόπος:

Ισχύει:

$$\frac{t-1}{t} \le \ln t \le t-1\ ,\ t>0$$

- Για $t>1$ είναι:

$$\frac{1}{t} \le \frac{\ln t}{t-1} \le 1$$

και για $x>1$ προκύπτει ότι:

$$\int_x^{x^2}\frac{1}{t}dt \le \int_x^{x^2}\frac{\ln t}{t-1}dt \le \int_x^{x^2}1\,dt \Leftrightarrow$$

$$\left[\ln t\right]_x^{x^2} \le \int_x^{x^2}\frac{\ln t}{t-1}dt \le 1\cdot(x^2-x) \Leftrightarrow$$

$$\ln x^2-\ln x \le \int_x^{x^2}\frac{\ln t}{t-1}dt \le x^2-x \Leftrightarrow$$

$$\ln x \le \int_x^{x^2}\frac{\ln t}{t-1}dt \le x^2-x$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 1^+}(\ln x) = \ln 1 = 0$
- $\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2 - x) = 0$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to 1^+}\int_x^{x^2}\frac{\ln t}{t-1}dt = 0$ (3)

- Για $0 < t < 1$ είναι:

$$\frac{1}{t} \geq \frac{\ln t}{t-1} \geq 1$$

και για $0 < x < 1$ προκύπτει ότι:

$$\int_{x^2}^{x}\frac{1}{t}dt \geq \int_{x^2}^{x}\frac{\ln t}{t-1}dt \geq \int_{x^2}^{x}1\,dt \Leftrightarrow$$

$$\left[\ln t\right]_{x^2}^{x} \geq \int_{x^2}^{x}\frac{\ln t}{t-1}dt \geq 1\cdot(x-x^2) \Leftrightarrow$$

$$\ln x - \ln x^2 \geq \int_{x^2}^{x}\frac{\ln t}{t-1}dt \geq x - x^2 \Leftrightarrow$$

$$-\ln x \geq \int_{x^2}^{x}\frac{\ln t}{t-1}dt \geq x - x^2$$

$$\ln x \leq \int_{x}^{x^2}\frac{\ln t}{t-1}dt \leq x^2 - x$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 1^-}(\ln x) = \ln 1 = 0$
- $\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2 - x) = 0$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to 1^-}\int_x^{x^2}\frac{\ln t}{t-1}dt = 0$ (4)

Από (3) και (4) έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{\ln t}{t-1}dt = 0$

$2^{ος}$ τρόπος:

Έχουμε:

$$L = \lim_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{f(t)}{t-1}dt = \lim_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{\ln t}{t-1}dt$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(t)=\begin{cases}\dfrac{\ln t}{t-1}, & 0<t\neq 1\\ 1, & t=1\end{cases}$$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$

Επίσης είναι:

$$\lim_{x\to 1} h(t)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln t}{t-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln t-\ln 1}{t-1}=\left.\frac{d(\ln t)}{dt}\right|_{t=1}=1=h(1)$$

Άρα η συνάρτηση h είναι συνεχής και στο $t_o=1$

Επομένως η συνάρτηση h είναι συνεχής, οπότε έχει αρχική.

Έστω H μια αρχική συνάρτηση της h στο διάστημα $(0,+\infty)$, τότε έχουμε:

$$L=\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{f(t)}{t-1}dt=\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{\ln t}{t-1}dt=\lim_{x\to 1}\left(H(x^2)-H(x)\right)=H(1)-H(1)=0,$$

διότι η συνάρτηση H είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη.

ΘΕΜΑ 37ο :

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$\mathbf{f(x^2+y)+f(f(x)-y)=2f(f(x))+2y^2 \text{ για κάθε } x\,,y\in R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathbf{f^2(x)=x^4,\ x\in R}$ **και** $\mathbf{f(x)+f(-x)=2x^2,\ x\in R}$

β) $\mathbf{f(x)=x^2,\ x\in R}$

γ) $\displaystyle\mathbf{\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{e^x+1}dx=\frac{1}{3}}$

ΛΥΣΗ

α) 1ος τρόπος

Για κάθε $x\,,y\in R$ είναι:

$$f(x^2+y)+f(f(x)-y)=2f(f(x))+2y^2 \qquad (1)$$

Αν στη σχέση (1) θέσουμε $y=-x^2$ έχουμε:

$$f(0)+f(f(x)+x^2)=2f(f(x))+2x^4 \qquad (2)$$

Αν στη σχέση (1) θέσουμε $y=f(x)$ έχουμε:

$$f(x^2+f(x))+f(0)=2f(f(x))+2f^2(x) \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι:

$$2f(f(x))+2x^4=2f(f(x))+2f^2(x)\Leftrightarrow$$

$$f^2(x)=x^4 \qquad (4)$$

Για $x=0$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f^2(0)=0 \Rightarrow f(0)=0$$

Αν στη σχέση (1) θέσουμε $x=0$ έχουμε:

$$f(0+y)+f(f(0)-y)=2f(f(0))+2y^2 \Leftrightarrow$$

$$f(y)+f(-y)=2y^2$$

Επομένως ισχύει:

$$f(x)+f(-x)=2x^2,\quad x\in R \qquad (5)$$

2ος τρόπος

Για $x=y=0$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f(0)+f(f(0))=2f(f(0)) \Rightarrow f(f(0))=f(0) \qquad (6)$$

Για $x=0$ και $y=f(0)$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f(f(0))+f(f(0)-f(0))=2f(f(0))+2f^2(0) \Rightarrow$$

$$f(0)=f(f(0))+2f^2(0) \overset{(6)}{\Rightarrow} 2f^2(0)=0 \Rightarrow f(0)=0$$

Για $x=0$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f(y)+f(f(0)-y)=2f(f(0))+2y^2 \overset{f(0)=0}{\Rightarrow}$$

$$f(y)+f(-y)=2y^2,\quad y\in R$$

Επομένως ισχύει:

$$f(x)+f(-x)=2x^2,\quad x\in R$$

Για $y=-x^2$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f(x^2-x^2)+f(f(x)+x^2)=2f(f(x))+2x^4$$

$$f(0)+f(f(x)+x^2)=2f(f(x))+2x^4 \overset{f(0)=0}{\Rightarrow}$$

$$f(f(x)+x^2)=2f(f(x))+2x^4 \qquad (7)$$

Για $y=f(x)$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f(x^2+f(x))+f(f(x)-f(x))=2f(f(x))+2f^2(x) \Rightarrow$$

$$f(x^2+f(x))+f(0)=2f(f(x))+2f^2(x) \overset{f(0)=0}{\Rightarrow}$$

$$f(f(x)+x^2)=2f(f(x))+2f^2(x) \qquad (8)$$

Από τις σχέσεις (7) και (8) προκύπτει ότι:

$$2f^2(x)=2x^4 \Rightarrow f^2(x)=x^4$$

β) 1ος τρόπος

Έστω $x_o\in R$, τότε από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f^2(x_o)=x_o^4 \Leftrightarrow f(x_o)=x_o^2 \quad ή \quad f(x_o)=-x_o^2 \qquad (9)$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x_o\in R^*$ τέτοιο, ώστε $f(x_o)=-x_o^2$

Από τη σχέση (5) έχουμε:

$$f(x_o)+f(-x_o)=2x_o^2 \Rightarrow -x_o^2+f(-x_o)=2x_o^2 \Rightarrow f(-x_o)=3x_o^2$$

Αν υψώσουμε στο τετράγωνο και τα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης έχουμε:

$$\left[f(-x_o)\right]^2=9x_o^4 \Rightarrow x_o^4=9x_o^4 \Rightarrow 1=9,$$ που είναι άτοπο.

Άρα από τη σχέση (9) προκύπτει ότι για κάθε $x\neq 0$ είναι $f(x)=x^2$

Όμως $f(0)=0$, οπότε $f(x)=x^2$, για κάθε $x\in R$

Η συνάρτηση αυτή είναι δεκτή, διότι επαληθεύει τη δοσμένη συνθήκη.

2ος τρόπος

Αν στη σχέση (4) θέσουμε όπου x το $-x$ έχουμε:

$$f^2(-x)=(-x)^4 \Rightarrow f^2(-x)=x^4, \quad x\in R$$

Άρα για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f^2(x)=f^2(-x)=x^4 \Rightarrow$$

$$\big(f(x)+f(-x)\big)\cdot\big(f(x)-f(-x)\big)=0 \overset{(5)}{\Rightarrow}$$

$$2x^2\big(f(x)-f(-x)\big)=0, \quad x\in R$$

Επομένως για κάθε $x\in R^*$ είναι:

$$f(x)-f(-x)=0 \Rightarrow f(x)=f(-x) \qquad (10)$$

Από τις σχέσεις (5) και (10) προκύπτει ότι:

$$2f(x)=2x^2 \Rightarrow f(x)=x^2, \quad x\in R^* \quad (11)$$

Από τη σχέση (11) και δεδομένου ότι $f(0)=0$ έχουμε τελικά:

$$f(x)=x^2, \quad x\in R$$

γ) Έστω $I=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{e^x+1}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx$. Αν θέσουμε $x=-u$, τότε $dx=(-u)'du=-du$

Για $x=-1$ είναι $u=1$ και για $x=1$ είναι $u=-1$, οπότε έχουμε:

$$I=\int_{1}^{-1}\frac{(-u)^2}{e^{-u}+1}(-du)=-\int_{1}^{-1}\frac{u^2}{e^{-u}+1}du=\int_{-1}^{1}\frac{u^2}{e^{-u}+1}du=\int_{-1}^{1}\frac{u^2e^u}{1+e^u}du=\int_{-1}^{1}\frac{x^2e^x}{1+e^x}dx=J$$

Είναι:

- $I=J$ και
- $I+J=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+e^x}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x^2e^x}{1+e^x}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2+x^2e^x}{1+e^x}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2(1+e^x)}{1+e^x}dx=\int_{-1}^{1}x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$

Επομένως έχουμε:

$$2I=\frac{2}{3}, \text{ οπότε } I=\frac{1}{3}$$

ΘΕΜΑ 38ο :

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x+y)=e^{-y}\cdot f(x)+e^{-x}\cdot f(y)$, **για κάθε** $x,y\in\mathbb{R}$ **(1)**
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ **(2)**

Θεωρούμε επίσης και την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $g'(x^3+1)=-x^3e^{-x^3-1}$, **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **(3) και**
- $g(0)=f(0)$ **(4)**

Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=-f(x)+e^{-x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) $f(x)=xe^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$

γ) $f=g$

δ) $ex\cdot f(x+1)<f(x+1)\displaystyle\int_1^{x+1}\frac{1}{f(t)}dt<x$, **για κάθε** $x\in(0,+\infty)$

ε) Η εξίσωση

$$x\int_1^x\frac{F(t+1)}{t}dt=x\int_1^{\alpha}\frac{F(t+1)}{t}dt+F(x+1)(x-\alpha)\ ,\ x>0,$$

όπου $F(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{1}{f(t)}dt$, $x\in(0,+\infty)$ **και** $\alpha>0$**, έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα.**

ΛΥΣΗ

α) Έστω $x_o\in\mathbb{R}$. Για x κοντά στο x_0 θεωρούμε το λόγο μεταβολών $\lambda(x)=\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$

Θέτουμε $h=x-x_o$, δηλαδή $x=x_o+h$, όπου $h\neq 0$, διότι $x\neq x_o$

Έτσι έχουμε:

$$\lambda(x)=\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}\overset{(1)}{=}\frac{e^{-h}\cdot f(x_o)+e^{-x_o}\cdot f(h)-f(x_o)}{h}$$

$$=\frac{f(x_o)\cdot\left(e^{-h}-1\right)+e^{-x_o}\cdot f(h)}{h}=f(x_o)\cdot\frac{e^{-h}-1}{h}+e^{-x_o}\cdot\frac{f(h)}{h}$$

Είναι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}\overset{(2)}{=}1\quad\text{και}\quad\lim_{h\to 0}\frac{e^{-h}-1}{h}\overset{-h=t}{=}-\lim_{t\to 0}\frac{e^t-e^0}{t}=-\left.\frac{d(e^t)}{dt}\right|_{t=0}=-1\quad(5)$$

Άρα:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{h\to 0}\left(f(x_o)\cdot\frac{e^{-h}-1}{h}+e^{-x_o}\cdot\frac{f(h)}{h}\right)\overset{(2)}{\underset{(5)}{=}}$$

$$=f(x_o)\cdot(-1)+e^{-x_o}\cdot 1=-f(x_o)+e^{-x_o}\in\mathbb{R}$$

Δηλαδή, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο τυχαίο $x_o\in\mathbb{R}$ με $f'(x_o)=-f(x_o)+e^{-x_o}$

Επομένως η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=-f(x)+e^{-x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f'(x) = -f(x) + e^{-x} \Leftrightarrow f'(x) + f(x) = e^{-x} \overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow}$$
$$e^x \cdot \left(f'(x) + f(x)\right) = 1 \Leftrightarrow \left(e^x \cdot f(x)\right)' = (x)'$$

Άρα

$$e^x \cdot f(x) = x + c \ , \ c \in R$$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$e^0 \cdot f(0) = c \Rightarrow c = 0 ,$$

διότι από τη σχέση (1) για $x = y = 0$ έχουμε ότι $f(0) = 0$

Επομένως:

$$e^x \cdot f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x \cdot e^{-x} , \ x \in R$$

γ) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g'(x^3+1) = -x^3 e^{-x^3-1}$$

Θέτουμε $x^3 + 1 = t$, $t \in R$ και έχουμε:

$$g'(t) = (1-t)e^{-t} \text{ , για κάθε } t \in R$$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = (1-x)e^{-x}$$

Οπότε

$$f'(x) = g'(x), \text{ για κάθε } x \in R$$

Άρα για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f(x) = g(x) + c \ , \ c \in R$$

Από υπόθεση είναι $f(0) = g(0) = 0$, οπότε $c = 0$

Δηλαδή είναι:

$$f(x) = g(x) \text{ , για κάθε } x \in R$$

Επομένως

$$f = g$$

δ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f(x+1) = (x+1) \cdot e^{-(x+1)} > 0 \ ,$$

οπότε:

$$ex \cdot f(x+1) < f(x+1) \cdot \int_1^{x+1} \frac{1}{f(t)} dt < x \Leftrightarrow ex < \int_1^{x+1} \frac{1}{f(t)} dt < \frac{x}{f(x+1)} \qquad (6)$$

1^{ος} τρόπος: (με Θ.Μ.Τ.)

Η σχέση (6) ισοδύναμα γράφεται:

$$ex < F(x+1) - F(1) < \frac{x}{f(x+1)} \ ,$$

όπου

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{f(t)} dt \ , \ x \in (0, +\infty)$$

είναι μια αρχική της συνεχούς συνάρτησης $\dfrac{1}{f(t)}$ στο διάστημα $(0, +\infty)$

- Για κάθε $x > 0$, η συνάρτηση F ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[1, x+1]$. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, x+1)$ τέτοιο, ώστε:

$$F'(\xi) = \frac{F(x+1) - F(1)}{x}, \quad \text{δηλαδή} \quad F'(\xi) = \frac{F(x+1)}{x} \quad (7)$$

Είναι:

$$F'(x) = \left(\int_1^x \frac{1}{f(t)} dt \right)' = \frac{1}{f(x)}, \quad x > 0$$

και

$$F''(x) = \left(\frac{1}{f(x)} \right)' = \left(\frac{e^x}{x} \right)' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}, \quad x > 0$$

Έχουμε:

- ♦ Η συνάρτηση F' είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$
- ♦ $F''(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$

Επομένως η συνάρτηση F' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

- Έχουμε:

$$1 < \xi < x+1 \overset{F'\uparrow(1,+\infty)}{\Rightarrow} F'(1) < F'(\xi) < F'(x+1) \overset{(7)}{\Rightarrow} e < \frac{F(x+1)}{x} < \frac{1}{f(x+1)} \overset{x>0}{\Rightarrow}$$

$$ex < F(x+1) < \frac{x}{f(x+1)} \Rightarrow ex < \int_1^{x+1} \frac{1}{f(t)} dt < \frac{x}{f(x+1)}$$

και λόγω της (6) προκύπτει ότι:

$$ex \cdot f(x+1) < f(x+1) \cdot \int_1^{x+1} \frac{1}{f(t)} dt < x, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Σημείωση: Η σχέση (6) μπορεί να αποδειχθεί επίσης:

- Με τη βοήθεια των ακροτάτων της συνεχούς συνάρτησης $\frac{1}{f(t)}$ στο διάστημα $[1, x+1]$, $x > 0$ και στη συνέχεια ολοκληρώνοντας … **($2^{ος}$ τρόπος) , ή**
- Με τη μέθοδο της μονοτονίας για κάθε ανισότητα χωριστά … **($3^{ος}$ τρόπος)**.

ε) Έστω

$$\Phi(x) = \int_1^x \frac{F(t+1)}{t} dt, \quad x \in (0, +\infty)$$

μια αρχική της συνεχούς συνάρτησης $\frac{F(t+1)}{t}$ στο διάστημα $(0, +\infty)$,

όπου

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{f(t)} dt, \quad x \in (0, +\infty)$$

Η εξίσωση

$$x\int_1^x \frac{F(t+1)}{t}dt = x\int_1^{\alpha} \frac{F(t+1)}{t}dt + F(x+1)(x-\alpha)\ ,\ \ x>0$$

γράφεται ισοδύναμα

$$\Phi(x)-\Phi(\alpha)-\Phi'(x)(x-\alpha)=0\ ,\quad x>0 \quad (8)$$

Θεωρούμε συνάρτηση

$$K(x)=\Phi(x)-\Phi(\alpha)-\Phi'(x)(x-\alpha)\ ,\quad x>0,$$

Για κάθε $x>0$ είναι:

$$K'(x)=-\Phi''(x)(x-\alpha)$$

Όμως $\Phi''(x)=\dfrac{\dfrac{x}{f(x+1)}-F(x+1)}{x^2}>0$, για κάθε $x>0$, λόγω του ερωτήματος (γ), οπότε:

- $K'(x)=0 \Leftrightarrow x-\alpha=0 \Leftrightarrow x=\alpha$
- $K'(x)<0 \Leftrightarrow x-\alpha>0 \Leftrightarrow x>\alpha$

Το πρόσημο της $K'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης K φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		α		$+\infty$
$K'(x)$		$+$	0	$-$	
$K(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	
			μέγιστο		

Έχουμε:

- Για $0<x<\alpha \overset{K\nearrow}{\Rightarrow} K(x)<K(\alpha) \Rightarrow K(x)<0$
- Για $x>\alpha \overset{K\searrow}{\Rightarrow} K(x)<K(\alpha) \Rightarrow K(x)<0$

Άρα

- $K(x)<0$ για κάθε $x\in(0,\alpha)\cup(\alpha,+\infty)$ και
- $K(x)=0$ μόνο για $x=\alpha$

Επομένως η εξίσωση (8), οπότε και η αρχική εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα το α.

(2ος τρόπος) Υπόδειξη:

Προφανής ρίζα της εξίσωσης (8) είναι το α

Για $0<x\neq\alpha$ με Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση Φ προκύπτει ότι $\Phi(x)<\Phi(\alpha)+\Phi'(x)(x-\alpha)$. Άρα ...

ΘΕΜΑ 39ο :

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(0)=0$, για την οποία ισχύουν:

- **$f(x)+x\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (1)**
- **$f(x-y)=\dfrac{f(x)+x}{f(y)+y}-x+y$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ (2)**

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν:

i) $f'(x)=f(x)+x-1$

ii) $f(x)=e^x-x$

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του α, ώστε να ισχύει:

$$f(x) \geq \alpha x \text{ για κάθε } x \in R, \text{ όπου } \alpha > -1$$

γ) Αν $z = f(x) + x + i\left(f(\ln x) + e^2 - x\right)$ και $x > 0$, να αποδείξετε ότι $|z| \geq e\sqrt{1+e^2}$

δ) i) Αν $H(x) = \int_0^x \left(t f(t) + t^2\right)dt$, $x \in R$ να αποδείξετε ότι $H(x) = xe^x - e^x + 1$ για κάθε $x \in R$

ii) Να βρείτε συνάρτηση G, η οποία να είναι συνεχής στο R, παραγωγίσιμη στο R^* και για την οποία ισχύει:

$$G'(x) + \frac{2G(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} + 1 \text{ για κάθε } x \in R^*$$

Είναι η συνάρτηση G παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$;

ΛΥΣΗ

α) i) Για $x = y = 0$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f(0-0) = \frac{f(0)+0}{f(0)+0} - 0 + 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} f(0) = 1 \quad (3)$$

Αν παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (2) ως προς y, θεωρώντας το x σταθερά, έχουμε:

$$f'(x-y)\cdot(0-1) = \frac{-\left(f(x)+x\right)\cdot\left(f'(y)+1\right)}{\left(f(y)+y\right)^2} - 0 + 1 \Rightarrow$$

$$f'(x-y) = \frac{\left(f(x)+x\right)\cdot\left(f'(y)+1\right)}{\left(f(y)+y\right)^2} - 1$$

Για $y = 0$ από την τελευταία σχέση έχουμε:

$$f'(x) = \frac{\left(f(x)+x\right)\cdot\left(f'(0)+1\right)}{\left(f(0)+0\right)^2} - 1 \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$f'(x) = \frac{\left(f(x)+x\right)\cdot\left(0+1\right)}{\left(1+0\right)^2} - 1 \Rightarrow$$

$$f'(x) = f(x) + x - 1 \text{, για κάθε } x \in R$$

ii) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = f(x) + x - 1 \Leftrightarrow f'(x) + 1 = f(x) + x \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)+x\right)' = f(x) + x \Leftrightarrow f(x) + x = ce^x \quad (4)$$

Για $x = 0$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f(0) + 0 = ce^0 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} c = 1$$

Για $c = 1$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f(x) + x = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^x - x \text{, για κάθε } x \in R$$

β) Για $\alpha > -1$ και για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f(x) \geq \alpha x \Leftrightarrow e^x - x \geq \alpha x \Leftrightarrow e^x - x - \alpha x \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \quad (5),$$

όπου $g(x) = e^x - x - \alpha x$, $x \in R$ και $\alpha > -1$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g'(x) = e^x - 1 - \alpha, \text{ όπου } \alpha > -1$$

Έχουμε:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 + \alpha \Leftrightarrow x = \ln(1+\alpha)$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 - \alpha > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 + \alpha \Leftrightarrow x > \ln(1+\alpha)$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$\ln(1+\alpha)$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘		↗
		ελάχιστο	

Η συνάρτηση g παίρνει ελάχιστη τιμή:

$$g\big(\ln(1+\alpha)\big) = e^{\ln(1+\alpha)} - \ln(1+\alpha) - \alpha\ln(1+\alpha) =$$

$$= (1+\alpha) - (1+\alpha)\ln(1+\alpha) = (1+\alpha)\big(1 - \ln(1+\alpha)\big)$$

Άρα για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g(x) \geq (1+\alpha)\big(1 - \ln(1+\alpha)\big)$$

Για να είναι $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$, αρκεί να ισχύει:

$$(1+\alpha)\big(1 - \ln(1+\alpha)\big) \geq 0, \text{ όπου } \alpha > -1$$

Έχουμε:

$$(1+\alpha)\big(1 - \ln(1+\alpha)\big) \geq 0 \overset{1+\alpha>0}{\Leftrightarrow} 1 - \ln(1+\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln(1+\alpha) \leq 1 \Leftrightarrow \ln(1+\alpha) \leq \ln e \Leftrightarrow 1 + \alpha \leq e \Leftrightarrow \alpha \leq e - 1$$

Άρα η μέγιστη τιμή του α είναι $\alpha = e - 1$

γ) Είναι:

$$z = f(x) + x + i\big(f(\ln x) + e^2 - x\big) \Rightarrow$$

$$z = e^x - x + x + i\big(e^{\ln x} - \ln x + e^2 - x\big) \Rightarrow$$

$$z = e^x + i\big(e^2 - \ln x\big), \quad x > 0$$

Άρα

$$|z| = \sqrt{e^{2x} + \left(e^2 - \ln x\right)^2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = \sqrt{e^{2x} + \left(e^2 - \ln x\right)^2}, \quad x > 0$$

Για $x>0$ έχουμε:

$$\varphi'(x)=\frac{2e^{2x}+2\left(e^2-\ln x\right)\left(-\frac{1}{x}\right)}{2\sqrt{e^{2x}+\left(e^2-\ln x\right)^2}}=\frac{xe^{2x}+\ln x-e^2}{x\sqrt{e^{2x}+\left(e^2-\ln x\right)^2}}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=xe^{2x}+\ln x-e^2,\ \ x>0$$

Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$h'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}+\frac{1}{x}>0$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$

Είναι:

$$h(1)=1\cdot e^2+\ln 1-e^2=0$$

Οπότε έχουμε:

- για $0<x<1\Rightarrow h(x)<h(1)\Rightarrow h(x)<0$ και
- για $x>1\Rightarrow h(x)>h(1)\Rightarrow h(x)>0$

Επειδή:

$$\varphi'(x)=\frac{h(x)}{x\sqrt{e^{2x}+\left(e^2-\ln x\right)^2}}$$

έχουμε:

- $\varphi'(x)=0\Leftrightarrow h(x)=0\Leftrightarrow x=1$
- $\varphi'(x)>0\Leftrightarrow h(x)>0\Leftrightarrow x>1$

Το πρόσημο της $\varphi'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης φ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$		$\searrow$	$e\sqrt{1+e^2}$	$\nearrow$	
			ελάχιστο		

Η συνάρτηση φ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$ το $\varphi(1)=\sqrt{e^2+e^4}=e\sqrt{1+e^2}$

Άρα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$\varphi(x)\geq\varphi(1)\overset{\varphi(x)=|z|}{\Rightarrow}|z|\geq e\sqrt{1+e^2}$$

δ) **i)** Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$H(x)=\int_0^x\left(tf(t)+t^2\right)dt=\int_0^x\left(t(e^t-t)+t^2\right)dt=\int_0^x te^t dt=$$

$$=\int_0^x t\,(e^t)'\,dt=\Big[t\,e^t\Big]_0^x-\int_0^x (t)'e^t\,dt=x\,e^x-0\cdot e^o-\int_0^x e^t\,dt=$$

$$=x\,e^x-\Big[e^t\Big]_0^x=x\,e^x-(e^x-e^o)=x\,e^x-e^x+1$$

ii) Για κάθε $x\in R^*$ είναι:

$$G'(x)+\frac{2G(x)}{x}=\frac{f(x)}{x}+1\Leftrightarrow$$

$$x^2G'(x)+2xG(x)=xf(x)+x^2 \qquad (6)$$

Η συνάρτηση H είναι παραγωγίσιμη στο R, ως αρχική της συνεχούς στο R συνάρτησης $t\,f(t)+t^2$ με:

$$H'(x)=x\,f(x)+x^2 \qquad (7)$$

Από τις σχέσεις (6) και (7) έχουμε:

$$x^2G'(x)+2xG(x)=H'(x)\Leftrightarrow$$

$$\left(x^2G(x)\right)'=H'(x)\ ,\quad x\in R^*$$

♦ Για κάθε $x\in(-\infty\,,0)$ είναι:

$$x^2G(x)=H(x)+c_1\Leftrightarrow x^2G(x)=x\,e^x-e^x+1+c_1 \qquad (8)$$

♦ Για κάθε $x\in(0\,,+\infty)$ είναι:

$$x^2G(x)=H(x)+c_2\Leftrightarrow x^2G(x)=x\,e^x-e^x+1+c_2 \qquad (9)$$

Επειδή η συνάρτηση G είναι συνεχής στο $x_o=0$ θα ισχύει:

$$\lim_{x\to0^-}G(x)=\lim_{x\to0^+}G(x)=G(0)$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to0^-}G(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x\,e^x-e^x+1+c_1)\Rightarrow 0\cdot G(0)=0-1+1+c_1\Rightarrow c_1=0$
- $\lim\limits_{x\to0^+}G(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x\,e^x-e^x+1+c_2)\Rightarrow 0\cdot G(0)=0-1+1+c_2\Rightarrow c_2=0$

Άρα για κάθε $x\in R^*$ είναι:

$$x^2G(x)=x\,e^x-e^x+1\Rightarrow G(x)=\frac{x\,e^x-e^x+1}{x^2}\ ,\quad x\neq0$$

Επομένως για κάθε $x\in R$ είναι:

$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{x\,e^x-e^x+1}{x^2} & ,\ x\neq0\\[2mm] G(0) & ,\ x=0\end{cases}$$

Η συνάρτηση G είναι συνεχής στο $x_o=0$, οπότε:

$$G(0)=\lim_{x\to0}G(x)=\lim_{x\to0}\frac{x\,e^x-e^x+1}{x^2}\ \underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\ \lim_{x\to0}\frac{e^x+x\,e^x-e^x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{x\,e^x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$$

Άρα:

$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2} &, \ x\neq 0\\[2mm] \dfrac{1}{2} &, \ x=0\end{cases}$$

Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{G(x)-G(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}-\dfrac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^x-2e^x+2-x^2}{2x^3}\underset{\text{D.L.H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x+2xe^x-2e^x-2x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^x-2x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x(e^x-1)}{6x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3},$$

γιατί $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^0}{x-0}=\left.\dfrac{d(e^x)}{dx}\right|_{x=0}=1$

Άρα η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ με $G'(0)=\dfrac{1}{3}$

ΘΕΜΑ 40ο :

Έστω δύο πραγματικοί αριθμοί α,β με $\alpha<\beta$, μία συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\displaystyle\int_{\alpha(x^2+1)}^{\beta(x^2+1)} f\left(\frac{t}{x^2+1}\right)dt-xe^{x^2+1}$

Αν ισχύει:

$$\left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right)^x\geq x+1,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

τότε:

α) i) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx=e$

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική θετική ρίζα x_o, για την οποία ισχύει:

$$\frac{2x_o^3+6x_o}{3}>e^{x_o^2}-1$$

β) Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση

$$h(x)=\int_1^{x^2+1} f\left(\frac{t}{x^2+1}\right)dt$$

παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στη θέση $x_o=1$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f^2(x)dx\geq f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}$$

ΛΥΣΗ

***α)* i)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi : R \to R$, $\varphi(x) = \left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right)^x - x - 1$

Παρατηρούμε ότι $\varphi(x) \geq \varphi(0)$, για κάθε $x \in R$, οπότε η συνάρτηση φ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_1 = 0$ του πεδίου ορισμού της.

Επίσης η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη ως πράξη μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$\varphi'(x) = \left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right)^x \ln\left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right) - 1$$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, οπότε έχουμε:

$$\varphi'(0) = 0 \Rightarrow \left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right)^0 \ln\left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\ln\left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right) = 1 \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx = e \quad (1)$$

ii) Θέτουμε $\dfrac{t}{x^2+1} = u \Rightarrow t = (x^2+1)u \Rightarrow dt = (x^2+1)du$

Για $t = \alpha(x^2+1) \Rightarrow u = \alpha$, ενώ για $t = \beta(x^2+1) \Rightarrow u = \beta$, οπότε έχουμε:

$$g(x) = \int_\alpha^\beta f(u)(x^2+1)\,du - xe^{x^2+1} =$$

$$= (x^2+1)\int_\alpha^\beta f(u)\,du - xe^{x^2+1} \overset{(1)}{=}$$

$$= (x^2+1)\cdot e - xe^{x^2+1} \ , \quad x \in R$$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g'(x) = 2ex - \left((x)'e^{x^2+1} + xe^{x^2+1}(x^2+1)'\right) =$$

$$= 2ex - e^{x^2+1} - 2x^2e^{x^2+1} =$$

$$= -e\cdot\left((2x^2+1)e^{x^2} - 2x\right)$$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

- $x^2 + 1 \geq 2x$ με το «ίσον» να ισχύει μόνο για $x = 1$
- $x^2 \geq 0$ με το «ίσον» να ισχύει μόνο για $x = 0$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε $2x^2 + 1 \geq 2x \quad (2)$

Επίσης είναι:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow e^{x^2} > e^0 \Rightarrow e^{x^2} > 1 \quad (3)$$

Για $x > 0$, αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$(2x^2+1)\cdot e^{x^2} \geq 2x\cdot 1 \Rightarrow$$

$$(2x^2+1)\cdot e^{x^2} - 2x \geq 0 \overset{\cdot(-e)<0}{\Rightarrow}$$

$$-e\cdot\left((2x^2+1)e^{x^2} - 2x\right) < 0 \Rightarrow$$

$$g'(x) < 0 \ , \quad x > 0$$

Για $x \le 0$ προφανώς ισχύει $g'(x) < 0$. Άρα $g'(x) < 0$ για κάθε $x \in R$

Επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο R

Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο R, άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$$g(R) = \left(\lim_{x\to+\infty} g(x) \ , \ \lim_{x\to-\infty} g(x) \right)$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(ex^2 + e - xe^{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(e + \dfrac{e}{x^2} - \dfrac{e^{x^2+1}}{x}\right) = -\infty$, διότι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2+1}}{x} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\left(2xe^{x^2+1}\right) = +\infty$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(ex^2 + e - xe^{x^2+1}\right) = +\infty$

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτηση g είναι το $g(R) = R$

iii) Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο R και έχει σύνολο τιμών το R, άρα θα υπάρχει μοναδικό x_o τέτοιο, ώστε $g(x_o) = 0$

- Για $x < x_o \overset{g\searrow}{\Rightarrow} g(x) > g(x_o) \Rightarrow g(x) > 0$
- Για $x > x_o \overset{g\searrow}{\Rightarrow} g(x) < g(x_o) \Rightarrow g(x) < 0$

Το πρόσημο της συνάρτησης g φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		x_o		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Επειδή $g(0) = e > 0$, συμπεραίνουμε ότι $0 \in (-\infty\ ,\ x_o)$. Άρα $x_o > 0$

Για κάθε $x \in [0\ ,\ x_o]$ είναι $g(x) \ge 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x = x_o$, επομένως

$$\int_0^{x_o} g(x)\,dx > 0 \Rightarrow \int_0^{x_o}\left(ex^2 + e - xe^{x^2+1}\right)dx > 0 \Rightarrow$$

$$e\int_0^{x_o} x^2\,dx + \int_0^{x_o} e\,dx - \int_0^{x_o} xe^{x^2+1}\,dx > 0 \Rightarrow$$

$$e\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{x_o} + e(x_o - 0) - \frac{1}{2}\int_0^{x_o}\left(e^{x^2+1}\right)'dx > 0 \Rightarrow$$

$$e\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{x_o} + e(x_o - 0) - \frac{1}{2}\left[e^{x^2+1}\right]_0^{x_o} > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{ex_o^3}{3} + ex_o - \frac{1}{2}\left(e^{x_o^2+1} - e\right) > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x_o^3}{3} + x_o > \frac{1}{2}\left(e^{x_o^2} - 1\right) \Rightarrow \frac{2x_o^3 + 6x_o}{3} > e^{x_o^2} - 1$$

β) Θέτουμε $\frac{t}{x^2+1}=u \Rightarrow t=(x^2+1)u \Rightarrow dt=(x^2+1)du$

Για $t=1 \Rightarrow u=\frac{1}{x^2+1}$, ενώ για $t=x^2+1 \Rightarrow u=1$, οπότε έχουμε:

$$h(x)=(x^2+1)\int_{\frac{1}{x^2+1}}^{1} f(u)\,du=-(x^2+1)\int_{1}^{\frac{1}{x^2+1}} f(u)\,du \Rightarrow$$

Η συνάρτηση h έχει πεδίο ορισμού το R και παρουσιάζει ακρότατο στη θέση $x_o=1$, επίσης είναι παραγωγίσιμη στο R, με:

$$h'(x)=-2x\int_{1}^{\frac{1}{x^2+1}} f(u)\,du-(x^2+1)\cdot f\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' \Rightarrow$$

$$h'(x)=-2x\int_{1}^{\frac{1}{x^2+1}} f(u)\,du+\frac{2x}{x^2+1}\cdot f\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

Άρα είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$, με:

$$h'(1)=-2\int_{1}^{\frac{1}{2}} f(u)\,du+f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, οπότε έχουμε:

$$h'(1)=0 \Rightarrow -2\int_{1}^{\frac{1}{2}} f(u)\,du+f\left(\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow \int_{1}^{\frac{1}{2}} f(u)\,du=\frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{1}{2}\right) \quad (4)$$

Είναι:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f^2(x)\,dx \ge f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2} \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \int_{\frac{1}{2}}^{1} f^2(x)\,dx \ge 2\int_{1}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx-1\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f^2(x)dx \ge -2\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx-\int_{\frac{1}{2}}^{1} 1dx \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1} f^2(x)dx+2\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1} 1dx \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(f^2(x)+2f(x)+1\right)dx \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(f(x)+1\right)^2 dx \ge 0$$

το οποίο είναι αληθές, διότι $\left(f(x)+1\right)^2 \ge 0$ για κάθε $x \in R$ και $\frac{1}{2}<1$

Επομένως ισχύει:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f^2(x)\,dx \ge f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ 41ο :

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z με $z \neq 1$ και $z \neq 2$, για τους οποίους ισχύει $|z-1|+|z-2|=1$ (1)

Επιπλέον θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ με $f(x)=\frac{x}{2}+\int_0^x |z-1|\, e^{\eta\mu t}dt$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z

β) Να βρείτε σημείο του γεωμετρικού τόπου των εικόνων των μιγαδικών z, αν $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$

γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{|z-1|^2}+\frac{1}{|z-2|^2}\geq 8$

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{4}}^{|z-2|}\frac{1}{x+|z-2|}dx<\ln\frac{8}{5}$

ΛΥΣΗ

α) Αν τα σημεία M, A και B είναι αντίστοιχα οι εικόνες των μιγαδικών z , $1=1+0i$ και $2=2+0i$ τότε έχουμε:

$$|z-1|+|z-2|=1 \Leftrightarrow (MA)+(MB)=(AB)$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ , εκτός των άκρων του Α και Β , αφού από υπόθεση είναι $z\neq 1$ και $z\neq 2$

β) Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{1}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+|z-1|e^{\eta\mu x}\right)=\frac{1}{2}+|z-1|$$

Όμως:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$$

Άρα:

$$\frac{1}{2}+|z-1|=1 \Rightarrow |z-1|=\frac{1}{2}$$

Οπότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι και $|z-2|=\frac{1}{2}$

Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι το μέσο του ΑΒ , δηλαδή το σημείο $\left(\frac{3}{2}\,,\,0\right)$

γ) 1ος τρόπος:

Έστω $z=x\in R-\{1,2\}$

Στο (α) ερώτημα αποδείξαμε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, όπου Α(1, 0) και Β(2, 0) με εξαίρεση τα σημεία του Α και Β, αφού από υπόθεση είναι $z\neq 1$ και $z\neq 2$

Επομένως ισχύει:

$$1<x<2$$

Είναι:

$$\frac{1}{|z-1|^2}+\frac{1}{|z-2|^2}=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-2)^2}=g(x),\ \text{με}\ 1<x<2$$

Για κάθε $x \in (1, 2)$ έχουμε:

$$g'(x) = -\frac{2}{(x-1)^3} - \frac{2}{(x-2)^3} = \frac{-2\left((x-1)^3 + (x-2)^3\right)}{(x-1)^3(x-2)^3} =$$

$$= \frac{-2(x-1+x-2)\left((x-1)^2 - (x-1)(x-2) + (x-2)^2\right)}{(x-1)^3(x-2)^3} =$$

$$= \frac{-2(2x-3)\left((x-1)^2 - (x-1)(x-2) + (x-2)^2\right)}{(x-1)^3(x-2)^3}$$

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2(2x-3)\underbrace{\left((x-1)^2 - (x-1)(x-2) + (x-2)^2\right)}_{>0} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-2(2x-3)}{\underbrace{(x-1)^3}_{>0}\underbrace{(x-2)^3}_{<0}} > 0 \overset{1<x<2}{\Leftrightarrow} 2x-3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$

Επομένως ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων για τη συνάρτηση g είναι ο παρακάτω:

x	1	$\frac{3}{2}$	2
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	8	↗ $+\infty$

ελάχιστο

Η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \frac{3}{2}$ το $g\left(\frac{3}{2}\right) = 8$

Άρα για κάθε $x \in (1, 2)$ είναι $g(x) \geq g\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{|z-1|^2} + \frac{1}{|z-2|^2} \geq 8$

2ος τρόπος:

Γνωρίζουμε ότι για $x, y \in R^*$ με $xy > 0 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

Αν λοιπόν θέσουμε:

$$x = |z-1| > 0 \quad \text{και} \quad y = |z-2| > 0,$$

τότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

$$x + y = 1$$

και έχουμε:

$$\frac{1}{|z-1|^2} + \frac{1}{|z-2|^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{(x+y)^2}{x^2} + \frac{(x+y)^2}{y^2} = \frac{x^2+y^2+2xy}{x^2} + \frac{x^2+y^2+2xy}{y^2} =$$

$$= 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\cdot\frac{y}{x} + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 + 2\cdot\frac{x}{y} = 2 + \underbrace{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}_{\geq 2} + 2\cdot\underbrace{\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)}_{\geq 2} \geq 8$$

3ος τρόπος:

Η ισότητα $|z-1|+|z-2|=1$ σε συνδυασμό με τις $z\neq 1$ και $z\neq 2$ μας δίνει τη δυνατότητα να θέσουμε:

$$|z-1|=\eta\mu^2\theta \quad \text{και} \quad |z-2|=\sigma\upsilon\nu^2\theta\ ,\ \ \theta\neq\frac{\kappa\pi}{2}\ ,\ \ \kappa\in Z$$

και έχουμε:

$$\frac{1}{|z-1|^2}+\frac{1}{|z-2|^2}=\frac{1}{\eta\mu^4\theta}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^4\theta}=\frac{(\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta)^2}{\eta\mu^4\theta}+\frac{(\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta)^2}{\sigma\upsilon\nu^4\theta}=$$

$$=\frac{\eta\mu^4\theta+\sigma\upsilon\nu^4\theta+2\eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu^4\theta}+\frac{\eta\mu^4\theta+\sigma\upsilon\nu^4\theta+2\eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^4\theta}=$$

$$=1+\sigma\varphi^4\theta+2\sigma\varphi^2\theta+\varepsilon\varphi^4\theta+1+2\varepsilon\varphi^2\theta=$$

$$=2+\underbrace{\varepsilon\varphi^4\theta+\sigma\varphi^4\theta}_{\geq 2}+2\cdot\underbrace{\left(\varepsilon\varphi^2\theta+\sigma\varphi^2\theta\right)}_{\geq 2}\geq 8$$

δ) Θέτουμε $|z-2|=\alpha$, τότε $0<\alpha<1$ έχουμε:

$$\int_{\frac14}^{|z-2|}\frac{1}{x+|z-2|}dx=\int_{\frac14}^{\alpha}\frac{1}{x+\alpha}dx=\Big[\ln|x+\alpha|\Big]_{\frac14}^{\alpha}=$$

$$=\ln(2\alpha)-\ln\left(\frac14+\alpha\right)=h(\alpha)$$

Για κάθε $\alpha\in(0\,,1)$ έχουμε:

$$h'(\alpha)=\frac{2}{2\alpha}-\frac{1}{\alpha+\frac14}=\frac{\alpha+\frac14-\alpha}{\alpha\left(\alpha+\frac14\right)}=\frac{\frac14}{\alpha\left(\alpha+\frac14\right)}>0$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0\,,1)$, οπότε

Για $0<\alpha<1\Rightarrow h(\alpha)<h(1)\Rightarrow h(\alpha)<\ln2-\ln\frac54\Rightarrow h(\alpha)<\ln\frac85$

Επομένως:

$$\int_{\frac14}^{|z-2|}\frac{1}{x+|z-2|}dx<\ln\frac85$$

ΘΕΜΑ 42ο :

Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f:R\to R$, με $|f(\alpha)-f(\beta)|\leq\frac12|\alpha-\beta|$ για κάθε $\alpha\,,\beta\in R$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=\int_0^x\left(f(t)-t\right)dt$ είναι κοίλη στο R

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^x f(t)\,dt\leq\frac{x^2}{2}$

δ) Να αποδείξετε ότι $F(x+1)-F(x)<F'(x)<F(x)-F(x-1)$ για $x\geq 1$

ε) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)\in R$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}F'(x)$

ΛΥΣΗ

α) Για $x_o \in R$ έχουμε:

$$|f(x)-f(x_o)| \le \frac{1}{2}|x-x_o| \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}|x-x_o| \le f(x)-f(x_o) \le \frac{1}{2}|x-x_o| \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}|x-x_o| + f(x_o) \le f(x) \le f(x_o) + \frac{1}{2}|x-x_o|$$

Είναι:

$$\lim_{x\to x_o}\left(-\frac{1}{2}|x-x_o| + f(x_o)\right) = f(x_o)$$

$$\lim_{x\to x_o}\left(\frac{1}{2}|x-x_o| + f(x_o)\right) = f(x_o)$$

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο τυχαίο $x_o \in R$, άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R

β) Η συνάρτηση $h(t)=f(t)-t$ είναι συνεχής στο R, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Επομένως η συνάρτηση F ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη στο R, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης h

Είναι:

$$F'(x) = f(x) - x, \text{ για κάθε } x \in R$$

Για $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$\frac{F'(x_1)-F'(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{f(x_1)-x_1-f(x_2)+x_2}{x_1-x_2} =$$

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} - \frac{x_1-x_2}{x_1-x_2} = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} - 1$$

Όμως:

$$|f(x_1)-f(x_2)| \le \frac{1}{2}|x_1-x_2| \Leftrightarrow \left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right| \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \le \frac{1}{2}$$

Επομένως:

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{F'(x_1)-F'(x_2)}{x_1-x_2} < 0 \overset{x_1<x_2}{\Rightarrow} F'(x_1) > F'(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση F' είναι γνησίως φθίνουσα στο R, οπότε η συνάρτηση F είναι κοίλη στο R

γ) Η συνάρτηση f είναι περιττή στο R, άρα για κάθε $x \in R$ είναι:

$$-x \in R \quad \text{και} \quad f(-x) = -f(x)$$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$f(0) = -f(0) \Rightarrow 2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

Είναι:

$$F(0) = \int_0^0 (f(t)-t)dt = 0 \quad \text{και} \quad F'(0) = f(0) - 0 = 0$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_F στο σημείο της $\left(0\,,\,F(0)\right)$ είναι:

$$y - F(0) = F'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = 0$$

Η συνάρτηση F είναι κοίλη στο R, άρα για κάθε $x \in R$ είναι:

$$F(x) \le y \;\Leftrightarrow\; F(x) \le 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\int_0^x \left(f(t)-t\right)dt \le 0 \Leftrightarrow \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tdt \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x f(t)dt \le \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x \;\Leftrightarrow\; \int_0^x f(t)dt \le \frac{x^2}{2}$$

δ) Η συνάρτηση F είναι:

- συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $\left[x-1,\, x\right]$, $\left[x\,,\, x+1\right]$
- παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(x-1,\, x)$, $(x\,,\, x+1)$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, οπότε θα υπάρχουν:

- ♦ $\xi_1 \in (x-1,\, x)$ τέτοιο, ώστε $F'(\xi_1) = \dfrac{F(x)-F(x-1)}{x-(x-1)} = F(x)-F(x-1)$
- ♦ $\xi_2 \in (x\,,\, x+1)$ τέτοιο, ώστε $F'(\xi_2) = \dfrac{F(x+1)-F(x)}{(x+1)-x} = F(x+1)-F(x)$

Είναι:

$$x-1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x+1 \Rightarrow \xi_1 < x < \xi_2$$

Η συνάρτηση F' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[1,+\infty\right)$, οπότε έχουμε:

$$F'\left(\xi_1\right) > F'(x) > F'\left(\xi_2\right) \Rightarrow$$

$$F(x)-F(x-1) > F'(x) > F(x+1)-F(x)$$

$$F(x+1)-F(x) < F'(x) < F(x)-F(x-1)$$

ε) Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ell\,, \quad \ell \in R$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x+1) \overset{u=x+1}{=} \lim_{u\to+\infty} F(u) = \ell \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x-1) \overset{u=x-1}{=} \lim_{x\to+\infty} F(u) = \ell$$

Άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\left(F(x+1)-F(x)\right) = \ell-\ell = 0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(F(x)-F(x-1)\right) = \ell-\ell = 0$$

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής αξιοποιώντας το ερώτημα (δ) είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} F'(x) = 0$

ΘΕΜΑ 43ο :

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$x+1\le f(x)\le e^x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \quad (1)$$

και η συνάρτηση $F(x)=\displaystyle\int_{\ell n3}^{x}\left(\sqrt{1+e^t}\left(e^x\int_{\ell n3}^{x}f(t)\,dt\right)\right)dt\,,\ x\in\mathbb{R}$ **με** $F(\ell n8)=2+\ell n\dfrac{3}{2}$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $O(0\,,f(0))$

β) Να υπολογίσετε το $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\left(f(t)-xe^x\right)dt-x}{x^2}$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x+x-\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=\frac{2014}{2013}$ **έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0\,,1)$**

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\ell n3$, $x=\ell n8$

ΛΥΣΗ

α) Για $x=0$ από τη σχέση (1) έχουμε $1\le f(0)\le1$, άρα $f(0)=1$

Για $x\ne0$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)-1}{x}$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$x+1\le f(x)\le e^x \Leftrightarrow x\le f(x)-1\le e^x-1 \quad (2)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

Αν $x>0$ τότε από τη σχέση (2) έχουμε $1\le\dfrac{f(x)-1}{x}\le\dfrac{e^x-1}{x}$

Είναι:

- $\displaystyle\lim_{x\to0^+}1=1$
- $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-e^0}{x-0}=\left.\frac{d(e^x)}{dx}\right|_{x=0}=1$

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής είναι και $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-1}{x}=1$

Αν $x<0$ τότε από τη σχέση (2) έχουμε $1\ge\dfrac{f(x)-1}{x}\ge\dfrac{e^x-1}{x}$

Είναι:

- $\displaystyle\lim_{x\to0^-}1=1$
- $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^x-e^0}{x-0}=\left.\frac{d(e^x)}{dx}\right|_{x=0}=1$

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής είναι και $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-1}{x}=1$

Είναι:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x}=1$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$ με $f'(0)=1$

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $O\left(0\,,\,f(0)\right)$ είναι:

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y-1=x\Rightarrow y=x+1$$

β) Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left(f(t)-xe^x\right)dt-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt-\int_0^x xe^x dt-x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt-xe^x(x-0)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt-x^2e^x-x}{x^2}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x f(t)dt-x^2e^x-x\right)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2xe^x-x^2e^x-1}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{f(x)-1}{x}-\frac{e^x\left(2+x\right)}{2}\right)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x+x-\int_0^x f(t)\,dt-\frac{2014}{2013}\,,\quad x\in\left[0\,,1\right]$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\left[0,1\right]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Είναι:

- $g(0)=e^0+0-0-\frac{2014}{2013}=1-\frac{2014}{2013}<0$
- $g(1)=e+1-\int_0^1 f(t)\,dt-\frac{2014}{2013}$

Όμως $f(x)\le e^x$ άρα $\int_0^1 f(x)dx\le\int_0^1 e^x dx\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx\le e-1\Leftrightarrow e+1-\int_0^1 f(x)dx\ge 2$

Οπότε

$$g(1)\ge 2-\frac{2014}{2013}>0$$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία ρίζα στο $\left(0\,,1\right)$

Για κάθε $x\in\left[0,1\right]$ είναι $g'(x)=e^x+1-f(x)>0$, επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα οπότε η ρίζα αυτή είναι και μοναδική.

δ) Επειδή $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\ell n3,\ell n8]$, το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\ell n3$ και $x=\ell n8$ είναι:

$$E=\int_{\ell n3}^{\ell n8} f(x)dx$$

Έχουμε:

$$F(\ell n8)=\int_{\ell n3}^{\ell n8}\sqrt{1+e^t}\left(e^{\ell n8}\int_{\ell n3}^{\ell n8} f(t)dt\right)dt=$$

$$=\int_{\ell n3}^{\ell n8}\sqrt{1+e^t}\left(8E\right)dt=8E\cdot\int_{\ell n3}^{\ell n8}\sqrt{1+e^t}\,dt$$

Άρα είναι:

$$E=\frac{F(\ell n8)}{8\int_{\ell n3}^{\ell n8}\sqrt{1+e^t}dt}=\frac{2+\ell n\frac{3}{2}}{8\int_{\ell n3}^{\ell n8}\sqrt{1+e^t}dt}$$

Έστω:

$$I=\int_{\ell n3}^{\ell n8}\sqrt{1+e^t}dt$$

Θέτουμε:

$$u=\sqrt{1+e^t}\Rightarrow u^2=1+e^t$$

Οπότε:

$$2udu=e^tdt\Leftrightarrow dt=\frac{2u}{u^2-1}$$

Για $t=\ell n3$ είναι $u=\sqrt{1+e^{\ell n3}}=2$ και για $t=\ell n8$ είναι $u=\sqrt{1+e^{\ell n8}}=3$

Έχουμε:

$$I=\int_2^3 u\cdot\frac{2u}{u^2-1}du=\int_2^3\frac{2u^2}{u^2-1}du=\int_2^3\left(2+\frac{2}{u^2-1}\right)du$$

Αναζητούμε πραγματικούς αριθμούς A, B έτσι, ώστε για κάθε $u\in(2,3)$ να ισχύει:

$$\frac{2}{u^2-1}=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1}\Leftrightarrow A(u+1)+B(u-1)=2\Leftrightarrow$$

$$(A+B)u+A-B=2\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=0\\A-B=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}$$

Άρα:

$$I=\int_2^3 2du+\int_2^3\frac{2}{u^2-1}du=2\cdot(3-2)+\int_2^3\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du=$$

$$=2+\int_2^3\frac{1}{u-1}(u-1)'du-\int_2^3\frac{1}{u+1}(u+1)'du=$$

$$= 2 + \int_2^3 \frac{1}{u-1}(u-1)'du - \int_2^3 \frac{1}{u+1}(u+1)'du =$$

$$= 2 + \left[\ell n|u-1|\right]_2^3 - \left[\ell n|u+1|\right]_2^3 = 2 + \ell n\frac{3}{2}$$

Οπότε:

$$E = \frac{2 + \ell n\frac{3}{2}}{8\left(2 + \ell n\frac{3}{2}\right)} \Rightarrow E = \frac{1}{8}$$

ΘΕΜΑ 44ο :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(1) + f(-1) = 0$ **και**
- $f'(x) = \sqrt{16 + f^2(x)}$ **για κάθε** $x \in R$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\left(f'(x) + f(x)\right)e^{-x}$ είναι σταθερή στο R

β) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$

γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(0) = 0$, να αποδείξετε ότι $f(x) = 2\left(e^x - e^{-x}\right)$, $x \in R$

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και την αντίστροφη συνάρτηση της f

ε) Να αποδείξετε ότι $\int_0^3 \ell n\frac{x + \sqrt{x^2 + 16}}{4}dx = 3\ell n2 - 1$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και η συνάρτηση $\sqrt{16+f^2(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο R

Από υπόθεση είναι $f'(x) = \sqrt{16+f^2(x)}$ για κάθε $x \in R$, οπότε η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με:

$$f''(x) = \frac{2f(x)f'(x)}{2\sqrt{16 + f^2(x)}} = \frac{f(x)f'(x)}{f'(x)} = f(x)$$

Άρα:

$$f''(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in R \quad (1)$$

Η συνάρτηση

$$g(x) = \left(f'(x) + f(x)\right)e^{-x}, \quad x \in R$$

είναι παραγωγίσιμη στο R, ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγισίμων συναρτήσεων.

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g'(x) = \left(f''(x) + f'(x)\right)e^{-x} + \left(f'(x) + f(x)\right)e^{-x}(-x)' =$$

$$= e^{-x}\left(f''(x) + f'(x) - f'(x) - f(x)\right) = e^{-x}\left(f''(x) - f(x)\right) \overset{(1)}{=} 0$$

Άρα η συνάρτηση g είναι σταθερή στο R

β) Έχουμε:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \overset{(1)}{=} \int_{-1}^{1} f''(x)dx = \left[f'(x)\right]_{-1}^{1} = f'(1) - f'(-1) =$$

$$= \sqrt{16 + f^2(1)} - \sqrt{16 + f^2(-1)} = \frac{f^2(1) - f^2(-1)}{\sqrt{16 + f^2(1)} + \sqrt{16 + f^2(-1)}} =$$

$$= \frac{\left(f(1) - f(-1)\right)\left(f(1) + f(-1)\right)}{\sqrt{16 + f^2(1)} + \sqrt{16 + f^2(-1)}} = 0, \text{ αφού } f(1) + f(-1) = 0$$

γ) Η συνάρτηση g είναι σταθερή στο R, άρα για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g(x) = c \Leftrightarrow \left(f'(x) + f(x)\right)e^{-x} = c \Leftrightarrow f'(x) + f(x) = ce^{x} \quad (2)$$

Είναι:

$$f(0) = 0 \quad \text{και} \quad f'(0) = \sqrt{16 + f^2(0)} = \sqrt{16} = 4$$

Για $x = 0$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f'(0) + f(0) = ce^{0} \Leftrightarrow 4 + 0 = c \Leftrightarrow c = 4$$

Οπότε από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f'(x) + f(x) = 4e^{x}, \ x \in R \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (3) με e^x, οπότε έχουμε:

$$f'(x)e^{x} + f(x)e^{x} = 4e^{2x} \Leftrightarrow \left(f(x)e^{x}\right)' = \left(2e^{2x}\right)' \Leftrightarrow$$

$$f(x)e^{x} = 2e^{2x} + c_1 \Rightarrow f(x) = 2e^{x} + c_1 e^{-x}, \ x \in R \quad (4)$$

Για $x = 0$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f(0) = 2e^{0} + c_1 e^{0} \Leftrightarrow 0 = 2 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -2$$

Οπότε από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f(x) = 2e^{x} - 2e^{-x} \Leftrightarrow f(x) = 2\left(e^{x} - e^{-x}\right), \ x \in R$$

δ) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = 2\left(e^{x} + e^{-x}\right) > 0, \ x \in R$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R και επειδή είναι και συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(A) = \left(\lim_{x \to -\infty} f(x), \ \lim_{x \to +\infty} f(x)\right)$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[2(e^x - e^{-x})\right] = -\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} \overset{-x=t}{=} \lim\limits_{t\to+\infty} e^t = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[2(e^x - e^{-x})\right] = +\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} \overset{-x=t}{=} \lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι $f(A) = (-\infty\,,+\infty) = R$

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R, θα είναι και "1−1", οπότε αντιστρέφεται.

Αν θέσουμε

$$f(x) = y \Leftrightarrow y = 2(e^x - e^{-x}) \Leftrightarrow y = 2e^x - \frac{2}{e^x} \Leftrightarrow$$

$$2(e^x)^2 - ye^x - 2 = 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} e^x = \frac{y+\sqrt{y^2+16}}{4} \Leftrightarrow$$

$$x = \ell n\left(\frac{y+\sqrt{y^2+16}}{4}\right),\quad y\in R$$

Άρα:

$$f^{-1}: R \to R \text{ με } f^{-1}(x) = \ell n\left(\frac{x+\sqrt{x^2+16}}{4}\right)$$

ε) Είναι:

$$I = \int_0^3 \ell n\frac{x+\sqrt{x^2+16}}{4}dx = \int_0^3 f^{-1}(x)\,dx$$

Θέτουμε:

$$u = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(u),\text{ οπότε } dx = f'(u)\,du$$

Για $x = 0$ είναι $u = f^{-1}(0) \Leftrightarrow u = \ell n\dfrac{0+\sqrt{16}}{4} = \ell n1 = 0$

Για $x = 3$ είναι $u = f^{-1}(3) \Leftrightarrow u = \ell n\dfrac{3+\sqrt{9+16}}{4} = \ell n2$

Είναι:

$$I = \int_0^{\ell n2} u f'(u)du = \left[uf(u)\right]_0^{\ell n2} - \int_0^{\ell n2} f(u)du =$$

$$= \ell n2\cdot f(\ell n2) - \int_0^{\ell n2}\left(2e^u - 2e^{-u}\right)du =$$

$$= \ell n2\cdot f(\ell n2) - \left[2e^u + 2e^{-u}\right]_0^{\ell n2} =$$

$$= \ell n2\cdot f(\ell n2) - \left(2e^{\ell n2} + \frac{2}{e^{\ell n2}} - 4\right) =$$

$$= 3\ell n2 - (4+1-4) = 3\ell n2 - 1,$$

αφού:

$$f(\ell n2) = 2e^{\ell n2} + \frac{2}{e^{\ell n2}} = 2 + \frac{2}{2} = 3$$

ΘΕΜΑ 45ο :

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $4\int_0^x (f'(t))^2 dt = 2f'(x)f(x) - f^2(x) - e^2$, για κάθε $x \in R$ (1)
- $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$ (2)
- $f(0) = e$ (3)

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{e^x}$, $x \in R$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 και $\xi \in (0, e)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ για τα οποία ισχύει :

$$f'(\xi_1) + (e-1)f'(\xi_2) + f'(1) = f''(\xi) + f(e)$$

γ) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\int_0^x e^t f'(t)dt}{(x^2+1)f(x)}$

δ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει: $\int_0^{x^2+1} f(t)dt + \dfrac{1}{e^{x^2+1}} \geq x^2 + 2$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$, άρα η f διατηρεί πρόσημο στο R

Είναι $f(0) = e$, άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$

Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, οπότε η συνάρτηση:

- $\int_0^x (f'(t))^2 dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης $(f'(t))^2$
- $f'(x)f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R, ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων
- $f^2(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R, ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων

Επομένως οι συναρτήσεις και στα δύο μέλη της σχέσης (1) είναι παραγωγίσιμες στο R, οπότε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης αυτής έχουμε:

$$4(f'(x))^2 = 2\left[f''(x)f(x) + f'(x)f'(x)\right] - 2f(x)f'(x) \Leftrightarrow$$

$$4(f'(x))^2 = 2f''(x)f(x) + 2(f'(x))^2 - 2f(x)f'(x) \Leftrightarrow$$

$$2(f'(x))^2 = 2f''(x)f(x) - 2f(x)f'(x) \Leftrightarrow$$

$$(f'(x))^2 = f''(x)f(x) - f(x)f'(x) \Leftrightarrow$$

$$f(x)f'(x) = f''(x)f(x) - (f'(x))^2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = c\,e^x, \ x \in R \quad (4)$$

Για $x=0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$4\int_0^0 (f'(t))^2dt = 2f'(0)f(0) - f^2(0) - e^2 \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$0 = 2f'(0)\cdot e - e^2 - e^2 \overset{(3)}{\Rightarrow} 2f'(0)\cdot e = 2e^2 \Rightarrow f'(0) = e \quad (5)$$

Για $x=0$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$\frac{f'(0)}{f(0)} = ce^0 \overset{(3),(5)}{\Rightarrow} \frac{e}{e} = c \Rightarrow c = 1$$

Επομένως , με αντικατάσταση του $c=1$, η σχέση (4) γράφεται:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow \left(\ell n f(x)\right)' = (e^x)' \Leftrightarrow \ell n f(x) = e^x + c_1 \ , \quad x\in R \quad (6)$$

Για $x=0$ από τη σχέση (6) έχουμε:

$$\ell n f(0) = e^0 + c_1 \overset{(3)}{\Rightarrow} \ell n e = 1 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

Επομένως , με αντικατάσταση του $c_1 = 0$, η σχέση (6) γράφεται:

$$\ell n f(x) = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^{e^x}, \ x\in R$$

β) Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f'(x) = \left(e^{e^x}\right)' = e^{e^x}(e^x)' = e^{e^x}e^x = e^{e^x+x}$$

Για τη συνάρτηση $f(x) = e^{e^x}$ στο διάστημα $[0,1]$ ισχύουν:

- Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$
- Η f είναι παραγώγισιμη στο $(0,1)$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[0,1]$, άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} \Leftrightarrow f'(\xi_1) = e^e - e$$

Για τη συνάρτηση $f(x) = e^{e^x}$ στο διάστημα $[1,e]$ ισχύουν:

- Η f είναι συνεχής στο $[1,e]$
- Η f είναι παραγώγισιμη στο $(1,e)$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[1,e]$, άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (1,e)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(e)-f(1)}{e-1} \Leftrightarrow f'(\xi_2) = \frac{e^{e^e} - e^e}{e-1}$$

Για τη συνάρτηση $f'(x) = e^{e^x+x}$ στο διάστημα $[0,1]$ ισχύουν:

- Η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$
- Η f' είναι παραγώγισιμη στο $(0,1)$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[0,1]$, άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f''(\xi) = \frac{f'(1)-f'(0)}{1-0} \Leftrightarrow f''(\xi) = e^{e+1} - e$$

Είναι:

$$f'(\xi_1)+(e-1)f'(\xi_2)+f'(1)=f''(\xi)+f(e)\Leftrightarrow$$

$$e^e-e+(e-1)\frac{e^{e^e}-e^e}{e-1}+e^{e+1}=e^{e+1}-e+e^{e^e}\Leftrightarrow$$

$$e^e-e+e^{e^e}-e^e+e^{e+1}=e^{e+1}-e+e^{e^e}\Leftrightarrow 0=0,\ \text{αληθές}$$

Άρα αληθής είναι και η προς απόδειξη σχέση.

γ) Υπολογίζουμε καταρχάς το ολοκλήρωμα $\int_0^x e^t f'(t)dt$

Έχουμε:

$$\int_0^x e^t f'(t)dt=\int_0^x e^t\cdot e^{e^t+t}dt=\int_0^x e^t\cdot e^{e^t}\cdot e^t dt \qquad (7)$$

Θέτουμε:

$$u=e^t,\ \text{οπότε}\ du=e^t dt$$

Για $t=0$ είναι $u=e^0=1$

Για $t=x$ είναι $u=e^x$

Οπότε από τη σχέση (7) έχουμε:

$$\int_0^x e^t f'(t)dt=\int_0^x e^t\cdot e^{e^t}\cdot e^t dt=\int_1^{e^x} ue^u du=\int_1^{e^x} u(e^u)'du=\left[ue^u\right]_1^{e^x}-\int_1^{e^x}(u)'e^u du=$$

$$=\left[ue^u\right]_1^{e^x}-\int_1^{e^x}e^u du=\left[ue^u\right]_1^{e^x}-\left[e^u\right]_1^{e^x}=e^x e^{e^x}-1\cdot e^1-\left(e^{e^x}-e^1\right)=$$

$$=e^x e^{e^x}-e-e^{e^x}+e=e^{e^x}(e^x-1)$$

Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^t f'(t)dt}{(x^2+1)f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{e^x}(e^x-1)}{(x^2+1)e^{e^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x^2+1}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$

δ) Θα αποδείξουμε καταρχάς ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει $e^x\geq x+1$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=e^x-x-1\ ,\ x\in R$$

Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$g'(x)=e^x-1$$

Έχουμε:

- $g'(x)=0\Leftrightarrow e^x-1=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow e^x=e^0\Leftrightarrow x=0$
- $g'(x)>0\Leftrightarrow e^x-1>0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow e^x>e^0\Leftrightarrow x>0$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	
			Ελάχιστο		

Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o = 0$ με ελάχιστη τιμή $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$

Άρα για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1 \quad (8)$$

Αν στη σχέση (8) θέσουμε $x = e^t$ έχουμε:

$$e^{e^t} \geq e^t + 1 \overset{x^2+1>0}{\Rightarrow} \int_0^{x^2+1} e^{e^t} dt \geq \int_0^{x^2+1} (e^t + 1) dt \Rightarrow \int_0^{x^2+1} f(t) dt \geq \int_0^{x^2+1} e^t dt + \int_0^{x^2+1} 1 dt \Rightarrow$$

$$\int_0^{x^2+1} f(t) dt \geq \left[e^t \right]_0^{x^2+1} + 1 \cdot (x^2 + 1 - 0) \Rightarrow \int_0^{x^2+1} f(t) dt \geq e^{x^2+1} - e^0 + x^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\int_0^{x^2+1} f(t) dt \geq e^{x^2+1} - 1 + x^2 + 1 \Rightarrow \int_0^{x^2+1} f(t) dt \geq e^{x^2+1} + x^2, \ x \in R \quad (9)$$

Για κάθε $x > 0$ ισχύει $x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad (10)$

Αν στη σχέση (10) θέσουμε όπου x το $e^{x^2+1} > 0$ έχουμε:

$$e^{x^2+1} + \frac{1}{e^{x^2+1}} \geq 2 \Rightarrow e^{x^2+1} \geq 2 - \frac{1}{e^{x^2+1}} \quad (11)$$

Από τις σχέσεις (9) και (11) έχουμε:

$$\int_0^{x^2+1} f(t) dt \geq e^{x^2+1} + x^2 \geq 2 - \frac{1}{e^{x^2+1}} + x^2 \Rightarrow$$

$$\int_0^{x^2+1} f(t) dt \geq 2 - \frac{1}{e^{x^2+1}} + x^2 \Rightarrow \int_0^{x^2+1} f(t) dt + \frac{1}{e^{x^2+1}} \geq x^2 + 2, \ x \in R$$