ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
Προκριματικός διαγωνισμός 2015
4 Απριλίου 2015

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1
Αν x, y, z είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$(3x+y)(3y+z)(3z+x) \geq 64xyz .$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση
Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου για 4 θετικούς όρους

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} \ ,$$

όπου η ισότητα, όταν $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.
Για κάθε $x, y > 0$, έχουμε

$$\frac{3x+y}{4} = \frac{x+x+x+y}{4} \geq \sqrt[4]{x^3y} \Rightarrow 3x+y \geq 4\sqrt[4]{x^3y} \qquad (1)$$

$$\frac{3y+z}{4} = \frac{y+y+y+z}{4} \geq \sqrt[4]{y^3z} \Rightarrow 3y+z \geq 4\sqrt[4]{y^3z} \qquad (2)$$

$$\frac{3z+x}{4} = \frac{z+z+z+x}{4} \geq \sqrt[4]{z^3x} \Rightarrow 3z+x \geq 4\sqrt[4]{z^3x} \qquad (3)$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (1) , (2) και (3) κατά μέλη λαμβάνουμε

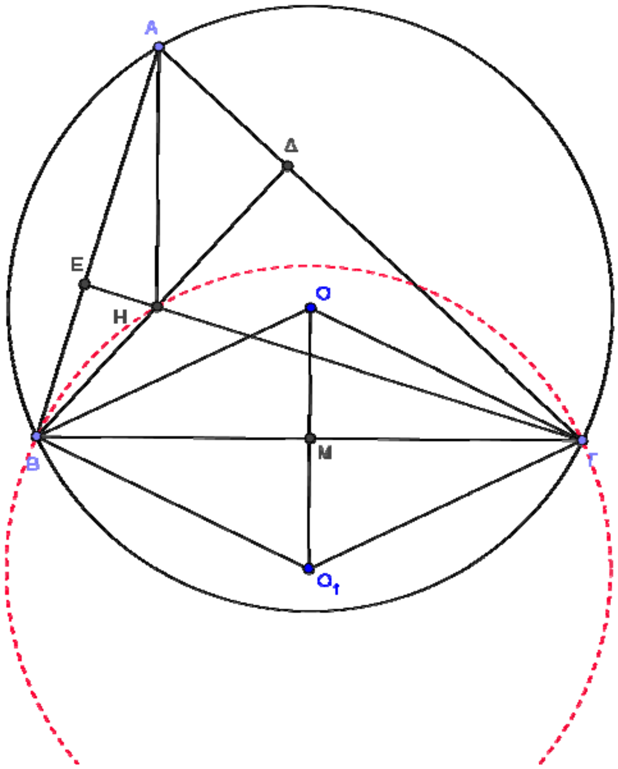
$$(3x+y)(3y+z)(3z+x) \geq 4\sqrt[4]{x^3y} \cdot 4\sqrt[4]{y^3z} \cdot 4\sqrt[4]{z^3x} = 64\sqrt[4]{x^4y^4z^4} = 64xyz.$$

Η ισότητα στις ανισότητες (1) , (2) και (3) ισχύει όταν $x = y$, $y = z$ και $z = x$, αντίστοιχα, οπότε και στην τελευταία ανισότητα η ισότητα ισχύει όταν $x = y = z$.

Πρόβλημα 2
Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ < ΑΓ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου $Ο$. Τα ύψη $ΒΔ, ΓΕ$ τέμνονται στο $Η$. Αν $Ο_1$ είναι το περίκεντρο του τριγώνου $ΒΗΓ$, να αποδείξετε ότι το $ΑΗΟ_1Ο$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση
Παρατηρούμε ότι το $Ο_1$ είναι στη μεσοκάθετη $ΟΜ$ του $ΒΓ$. Επιπλέον ισχύει ότι $ΑΗ // ΟΟ_1$ (ως κάθετες στη $ΒΓ$), οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $ΑΗ = ΟΟ_1$.
Όμως είναι γνωστό ότι $ΑΗ = 2ΟΜ$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $ΟΜ = ΜΟ_1$.

Το τετράπλευρο ΕΑΔΗ είναι εγγράψιμο, οπότε $\mathrm{B}\hat{\mathrm{H}}\Gamma = 180° - \hat{\mathrm{A}}$. Τώρα η $\mathrm{B}\hat{\mathrm{H}}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη στον περιγεγραμμένο κύκλο του ΒΗΓ και η $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}_1\Gamma$ είναι επίκεντρη. Επομένως $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}_1\Gamma = 2\hat{\mathrm{A}}$. Επομένως τα ισοσκελή τρίγωνα $\mathrm{BO}\Gamma, \mathrm{BO}_1\Gamma$ έχουν τις γωνίες της κορυφής ίσες, άρα έχουν όλες τις γωνίες ίσες και έχουν και κοινή τη ΒΓ, οπότε είναι ίσα. Επομένως η ΒΓ είναι μεσοκάθετος της OO_1, οπότε Μ μέσο του $\mathrm{O}_1\mathrm{O}$, οπότε $\mathrm{OM} = \mathrm{MO}_1$



Σχήμα 1

Πρόβλημα 3

Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος, ώστε οι αριθμοί $(n+1)2^n$ και $(n+3)2^{n+2}$ να είναι ταυτόχρονα τέλεια τετράγωνα.

Λύση.

Έστω $A = (n+1)2^n$ και $B = (n+3)2^{n+2}$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Αν n άρτιος, τότε οι αριθμοί $2^n, 2^{n+2}$ είναι τέλεια τετράγωνα, οπότε αφού οι αριθμοί $n+1, n+3$ είναι περιττοί, θα πρέπει να είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα.

Πράγματι, αν είναι $n = 2k, k \in \mathbb{N}$, και $A = (n+1)2^n = (2k+1)2^{2k} = r^2$, τότε $2^{2k} \mid r^2$, $2^k \mid r$ και $2k+1 = \left(\frac{r}{2^k}\right)^2$. Ομοίως προκύπτει και ότι ο $n+3 = 2k+3$ θα είναι τέλειο τετράγωνο.

Όμως αυτό είναι άτοπο, γιατί δεν υπάρχουν τέλεια τετράγωνα που να απέχουν κατά δύο.

Πράγματι, η διαφορά δύο οποιωνδήποτε τέλειων τετραγώνων ακεραίων $a, b, (a > b \geq 1)$ είναι της μορφής $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \geq 1 \cdot 3 = 3$.

Αν $n = 2k+1$, τότε οι αριθμοί γράφονται

$$A = (2k+1+1)2^{2k+2} = (k+1)2^{2k+2} \text{ και } B = (2k+1+3)2^{2k+3} = (k+2)2^{2k+4},$$

οπότε σε αυτή την περίπτωση οι αριθμοί $k+1, k+2$ πρέπει να είναι τέλεια τετράγωνα. Όμως, αυτό είναι άτοπο, αφού όπως αποδείξαμε προηγουμένως, δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι που να είναι τέλεια τετράγωνα και να απέχουν κατά ένα.

Πρόβλημα 4.
Σε ένα σχολείο έχουν δημιουργηθεί 112 ομάδες που η καθεμιά αποτελείται από 11 μαθητές. Επίσης, οποιεσδήποτε δύο ομάδες έχουν ακριβώς έναν κοινό μαθητή. Να αποδειχθεί ότι:
(α) Υπάρχει ένας μαθητής που ανήκει σε τουλάχιστον 12 ομάδες.
(β) Υπάρχει ένας μαθητής που ανήκει σε όλες τις ομάδες.

Λύση.
(α) Θεωρούμε μία τυχαία ομάδα O. Καθεμία από τις υπόλοιπες 111 ομάδες έχει ακριβώς έναν μαθητή της O. Αφού $111 = 11 \cdot 10 + 1$, από την αρχή της περιστεροφωλιάς, θα υπάρχει ένας μαθητής x στην O που ανήκει σε τουλάχιστον 11 ομάδες. Επομένως ο x (μαζί με την O) ανήκει σε συνολικά 12 ομάδες, έστω $\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2, ..., \mathrm{O}_{12}$.
(β) Θα δείξουμε ότι ο x ανήκει σε όλες τις ομάδες. Πράγματι, έστω ότι ο x δεν ανήκει στην ομάδα O'. Τότε η O' έχει ακριβώς έναν κοινό μαθητή με τις $\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2, ..., \mathrm{O}_{12}$, αλλά επειδή η O' έχει 11 μαθητές, θα υπάρχουν δύο ομάδες, έστω οι $\mathrm{O}_i, \mathrm{O}_j$ που ο κοινός μαθητής με την O' θα είναι ο ίδιος, έστω y. Τότε όμως οι ομάδες $\mathrm{O}_i, \mathrm{O}_j$ έχουν δύο κοινούς μαθητές, τον x και τον y, άτοπο. Άρα ο x ανήκει σε όλες τις ομάδες.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
Προκριματικός διαγωνισμός 2015
4 Απριλίου 2015

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τα ζεύγη θετικών ακέραιων (x, y) που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$xy(x+y-10)-3x^2-2y^2+21x+16y=60.$$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned}
&xy(x+y-10)-3x^2-2y^2+21x+16y=60\\
\Leftrightarrow\ &(y-3)x^2+\left(y^2-10y+21\right)x=2y^2-16y+60\\
\Leftrightarrow\ &(y-3)x^2+(y-7)(y-3)x=2(y-3)(y-5)+30\\
\Leftrightarrow\ &(y-3)x^2+(y-7)(y-3)x-2(y-3)(y-5)=30\\
\Leftrightarrow\ &(y-3)\left[x^2+(y-7)x-2(y-5)\right]=30\\
\Leftrightarrow\ &(y-3)\left(x^2-7x+xy-2y+10\right)=30\\
\Leftrightarrow\ &(y-3)\left(x^2-4-7x+xy-2y+14\right)=30\\
\Leftrightarrow\ &(y-3)\left((x-2)(x+2)-7(x-2)+(x-2)y\right)=30\\
\Leftrightarrow\ &(y-3)(x-2)(x+y-5)=30=1\cdot 2\cdot 3\cdot 5.
\end{aligned}$$

Επειδή οι παράγοντες $x-2,\ y-3$ και $x+y-5$ είναι ακέραιοι τέτοιοι ώστε:

$$(x-2)+(y-3)=x+y-5 \text{ και}$$
$$x-2\geq -1,\ y-3\geq -2, x+y-5\geq -3,$$

έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

$$\left\{\begin{matrix} x-2=2\\ y-3=3\\ x+y-5=5\end{matrix}\right\} \text{ή} \left\{\begin{matrix} x-2=3\\ y-3=2\\ x+y-5=5\end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix} x-2=1\\ y-3=5\\ x+y-5=6\end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix} x-2=5\\ y-3=1\\ x+y-5=6\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow (x,y)=(4,6) \text{ ή } (x,y)=(5,5) \text{ ή } (x,y)=(3,8) \text{ ή } (x,y)=(7,4).$$

Εναλλακτικά, στην παραπάνω διαδικασία από την εξίσωση:

$$(y-3)x^2+(y-3)(y-7)x=2\left(y^2-8y+30\right)$$

λαμβάνουμε την εξίσωση

$$(y-3)\left[x^2+(y-7)x\right]=2y^2-16y+60 \qquad (1)$$

οπότε, αφού για x, y θετικοί ακέραιοι, προκύπτει ότι: $(y-3) \mid 2y^2 - 16y + 60$. Από την τελευταία, με τη διαίρεση πολυωνύμων

$$2y^2 - 16y + 60 = (y-3)(2y-10) + 30$$

προκύπτει ότι $y-3 \mid 30$. Επομένως, έχουμε ότι

$$y-3 \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm5, \pm6, \pm10, \pm15, \pm30\},$$

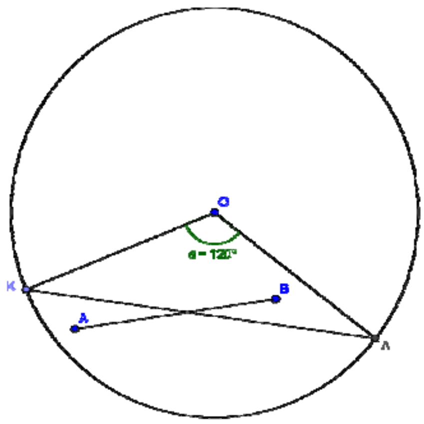
οπότε δεδομένου ότι πρέπει να ισχύει $y > 0$, δηλαδή $y - 3 \geq -2$ έχουμε ότι:

$$y-3 \in \{\pm1, \pm2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}.$$

Για καθεμία από τις παραπάνω τιμές, αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει μία δευτεροβάθμια ως προς x. Έτσι προκύπτουν οι λύσεις που έχουμε βρει και στην προηγούμενη μέθοδο επίλυσης της εξίσωσης.

Πρόβλημα 2.
Δίνονται 111 διαφορετικά μεταξύ τους σημεία που ανήκουν στο εσωτερικό ή και την περιφέρεια μοναδιαίου δίσκου. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν τουλάχιστον 1998 τμήματα που σχηματίζονται από αυτά τα σημεία και έχουν μήκος μικρότερο του $\sqrt{3}$.

Λύση



Σχήμα 2

Χωρίζουμε τον κύκλο σε τρία ίσα μέρη που αντιστοιχούν σε κεντρική γωνία $120°$ που είναι και τέτοια ώστε να μην περιέχουν κάποιο από τα σημεία στο σύνορό τους, με μόνη εξαίρεση αν κάποιο σημείο ταυτίζεται με το κέντρο του δίσκου, όπου τότε θεωρούμε ότι ανήκει σε ένα από τα μέρη. Αυτό είναι εφικτό καθώς τα σημεία είναι πεπερασμένα ενώ για την επιλογή του διαχωρισμού σε τρία ίσα μέρη έχουμε άπειρες επιλογές.

Έστω ότι έχουμε δύο σημεία A, B στον ίδιο τομέα και έστω ότι ο τομέας τέμνει τον κύκλο στα K, Λ (βλέπε σχήμα). Τότε αν οι OA, OB τέμνουν τον κύκλο στα σημεία A', B' και $A\hat{O}B = \omega < 60°$ έχουμε ότι $AB \leq A'B' = 2R\eta\mu(\omega) < 2R\eta\mu 60° = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. (Ισότητα δεν μπορεί να έχουμε στο πρώτο βήμα καθώς τα σημεία δεν ανήκουν στο σύνορο σύμφωνα με το χωρισμό σε μέρη που κάναμε στην αρχή.)

Επομένως, οποιαδήποτε δύο σημεία στο ίδιον τομέα έχουν απόσταση μικρότερη από $\sqrt{3}$.
Έστω ότι στους τρεις τομείς έχουμε αντίστοιχα x, y, z το πλήθος σημεία. Τότε $x+y+z=111$ και τα τμήματα με μήκος μικρότερο $\sqrt{3}$ είναι τουλάχιστον

$$\binom{x}{2}+\binom{y}{2}+\binom{z}{2}=\frac{x(x-1)+y(y-1)+z(z-1)}{2}=\frac{x^2+y^2+z^2-111}{2}.$$

Όμως από την ανισότητα Cauchy- Schwarz έχουμε: $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3}=\frac{111^2}{3}$.

Άρα έχουμε: $\binom{x}{2}+\binom{y}{2}+\binom{z}{2} \geq \frac{\frac{111^2}{3}-111}{2}=1998$.

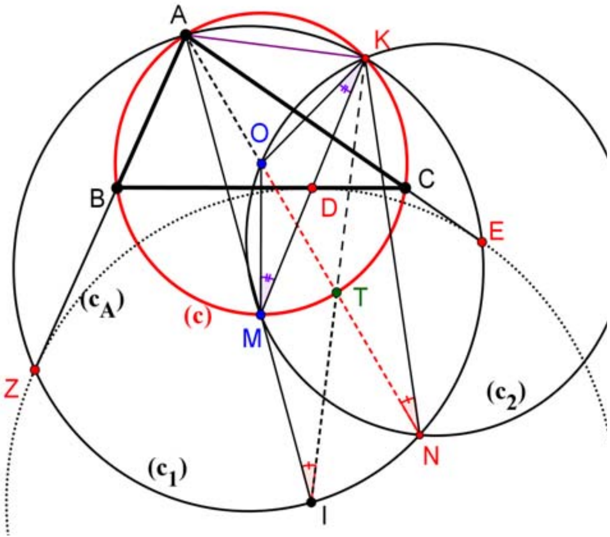
Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ABC με $AB<AC<BC$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Ο παρεγεγραμμένος κύκλος (c_A) (που αντιστοιχεί στην κορυφή A), έχει κέντρο I και εφάπτεται στις πλευρές BC, AC, AB (του τριγώνου ABC) στα σημεία D, E, Z αντίστοιχα. Η AI τέμνει το κύκλο (c) στο σημείο M και ο περιγεγραμμένος κύκλος (έστω (c_1)) του τριγώνου AZE τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο K. Ο περιγεγραμμένος κύκλος (έστω (c_2)) του τριγώνου OKM τέμνει τον κύκλο (c_1) στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες AN και KI τέμνονται επάνω στο κύκλο (c).

Λύση

Εφόσον οι AZ και AE είναι εφαπτόμενες του παρεγεγραμμένου κύκλου (c_A), θα ισχύει $IZ \perp AZ$ και $IE \perp AE$. Άρα ο κύκλος (c_2) θα περνάει από το I και η AI θα είναι διάμετρός του.
Πρώτα θα αποδείξουμε ότι AN, περνάει από το σημείο O. Δηλαδή ότι: $K\hat{N}O = K\hat{N}A \quad (*)$.
Οι γωνίες $K\hat{N}O$ και $K\hat{M}O$ είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο (c_2) και βαίνουν στο τόξο OK.
Άρα $K\hat{N}O = K\hat{M}O$. Από το ισοσκελές τρίγωνο OKM έχουμε: $K\hat{M}O = O\hat{K}M$.
Από τις τελευταίες ισότητες γωνιών προκύπτει:

$$K\hat{N}O = K\hat{M}O = O\hat{K}M \quad (1).$$



Σχήμα 3

Οι γωνίες $K\hat{N}A$ και $K\hat{I}A$ είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο (c_1) και βαίνουν στο τόξο AK.
Άρα είναι: $K\hat{N}A = K\hat{I}A$.
Το τρίγωνο AKI είναι ορθογώνιο, αφού η AI είναι διάμετρος του κύκλου (c_1).Άρα

$$K\hat{I}A = 90^o - I\hat{A}K = 90^o - M\hat{A}K.$$

Στο κύκλο (c), η γωνία $M\hat{A}K$ είναι εγγεγραμμένη με αντίστοιχη επίκεντρη την $M\hat{O}K$.

Άρα $M\hat{A}K = \dfrac{M\hat{O}K}{2}$. Επιπλέον, από το ισοσκελές τρίγωνο OKM έχουμε:

$$\mathrm{O\hat{K}M} = 90^o - \frac{\mathrm{M\hat{O}K}}{2}.$$

Από τις παραπάνω ισότητες γωνιών και την (1), έχουμε:

$$K\hat{N}A = K\hat{I}A = 90^o - I\hat{A}K = 90^o - M\hat{A}K = 90^o - \frac{M\hat{O}K}{2} = \mathrm{O\hat{K}M} \overset{(1)}{=} K\hat{N}O \quad (*).$$

Άρα τα σημεία A, O, N είναι συνευθειακά και έστω T το σημείο τομής της AN με τον κύκλο (c).

Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία K, T, I είναι συνευθειακά, δηλαδή ότι: $A\hat{K}I = A\hat{K}T$.

Η γωνία $A\hat{K}T$ είναι ορθή διότι είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο (c) και βαίνει στην διάμετρό του AT.

Η γωνία $A\hat{K}I$ είναι ορθή διότι είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο (c_1) και βαίνει στην διάμετρό του AI.

Παρατήρηση. *Εναλλακτικά μπορούμε να θεωρήσουμε το σημείο τομής , έστω* T, *της* KI *με τον κύκλο* (c), *οπότε η* AT *είναι διάμετρος του κύκλου* (c), *και στη συνέχεια να αποδείξουμε ότι τα σημεία* A, O, T, N *είναι συνευθειακά.*

Πρόβλημα 4
Να βρεθούν όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη σχέση:

$$f(xy) \le yf(x) + f(y) \qquad (1)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Λύση
Αν θέσουμε όπου y το $-y$ στην (1) θα πάρουμε

$$f(-xy) \le -yf(x) + f(-y) \qquad (2)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) έχουμε:

$$f(xy) + f(-xy) \le f(y) + f(-y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Αν στην τελευταία θέσουμε όπου y το 1, θα πάρουμε:

$$f(x) + f(-x) \le f(1) + f(-1). \qquad (4)$$

Αν στην (3) θέσουμε όπου x το $\dfrac{1}{y}$, θα πάρουμε:

$$f(1) + f(-1) \le f(y) + f(-y) \text{ για κάθε } y \ne 0. \qquad (5)$$

Από τις (4), (5) έχουμε ότι:

$$f(y) + f(-y) = f(1) + f(-1) = c \text{ για κάθε } y \ne 0,$$

οπότε η (2) γίνεται: $c - f(xy) \le -yf(x) + c - f(y)$, δηλαδή έχουμε

$$yf(x)+f(y)\le f(xy),\ \text{για κάθε } x,y\neq 0. \tag{6}$$

Από τις (1) και (6) έχουμε ότι:

$$f(xy)=yf(x)+f(y)\ \text{για κάθε } x,y\neq 0. \tag{7}$$

Από την τελευταία σχέση για $x=y=1$ λαμβάνουμε $f\left(1\right)=0$, ενώ εναλλάσσοντας τους ρόλους των x,y λαμβάνουμε:

$$f(yx)=xf(y)+f(x)\ \text{για κάθε } x,y\neq 0. \tag{8}$$

οπότε από τις σχέσεις (7) και (8) έχουμε:

$$yf(x)+f(y)=xf(y)+f(x)\Rightarrow f(x)(y-1)=f(y)(x-1)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x-1}=\frac{f(y)}{y-1}\ \text{για κάθε } x,y\neq 0,1.$$

Άρα, αφού $f\left(1\right)=0$, έχουμε:

$$f(x)=a(x-1),\ \text{για κάθε } x\neq 0.$$

Τέλος θέτοντας όπου x το 0 στην αρχική παίρνουμε: $f(y)\ge(1-y)f(0)$, για κάθε y, οπότε $a\left(y-1\right)\ge\left(1-y\right)f\left(0\right)$ για κάθε $y\neq 0$, οπότε $\left(y-1\right)\left(a+f\left(0\right)\right)\ge 0$, για κάθε $y\neq 0$ οπότε $a=-f\left(0\right)$. Άρα είναι $f\left(x\right)=-f\left(0\right)\left(x-1\right)=f\left(0\right)\left(1-x\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, που επαληθεύει την (1).