ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
19 Ιανουαρίου 2019

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{3\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{\alpha^2-3\beta^2}{\alpha^2}+\frac{13}{3}\right),$$

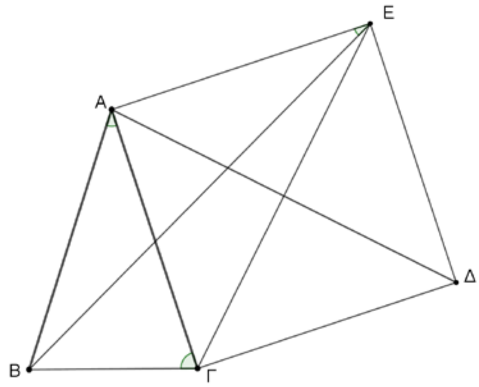
αν δίνεται ότι: $\dfrac{\alpha}{\beta}=3$.

Πρόβλημα 2
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\Gamma}=2\cdot\hat{\mathrm{A}}$. Το τετράπλευρο ΑΓΔΕ είναι τετράγωνο.

(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{A\hat{E}B}$.

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\mathrm{B\hat{A}\Delta}$ και $\mathrm{B\hat{E}\Gamma}$.

Σημείωση: Να κάνετε το δικό σας σχήμα στο φύλλο με τις απαντήσεις σας.



Πρόβλημα 3
Για τη φωταγώγηση μιας πλατείας, σχήματος ορθογωνίου, τοποθετήθηκαν περιμετρικά 182 κολώνες φωτισμού. Τέσσερις από αυτές τοποθετήθηκαν στις γωνίες τις πλατείας. Στη συνέχεια τοποθετήθηκαν και οι υπόλοιπες 178 στην περίμετρο της πλατείας έτσι ώστε κάθε δύο διαδοχικές κολώνες απέχουν τέσσερα μέτρα. Επίσης διαπιστώθηκε ότι η μεγαλύτερη πλευρά της πλατείας είχε διπλάσιες κολώνες από τη μικρή πλευρά, όπου σε κάθε πλευρά μετράμε και τις κολώνες στις γωνίες. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών της πλατείας.
Σημείωση: *Θεωρείστε τις κολώνες πάνω στις πλευρές της πλατείας ως σημεία.*

Πρόβλημα 4
(α) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 12600.
(β) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό εξαψήφιο θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 12600.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

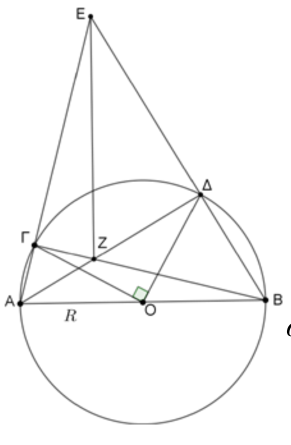
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
19 Ιανουαρίου 2019

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Να βρείτε την τιμή της παράστασης
$$\mathrm{A} = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma + \alpha + \beta - \gamma ,$$
αν δίνεται ότι $\alpha = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$, $\beta = (-2)^{-2}$, $\gamma = -\frac{1}{2^3}$.

Πρόβλημα 2
(α) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000.
(β) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό επταψήφιο θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000.
(γ) Μπορούμε να βρούμε το μεγαλύτερο δυνατό θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000;

Πρόβλημα 3
Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο κύκλος διαμέτρου $\mathrm{AB} = 2R$ και η γωνία $\Gamma\hat{\mathrm{O}}\Delta = 90^\circ$. Οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Ζ, ενώ οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ε.
(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta$ και $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\Delta$.
(β) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{EZ} = 2R$.
Σημείωση: *Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.*



Πρόβλημα 4
Έχουμε πέντε κάρτες Α, Β, Γ, Δ, Ε που πάνω σε καθεμία από αυτές είναι γραμμένος ένας θετικός ακέραιος. Με αυτές τις κάρτες σχηματίζονται συνολικά δέκα διαφορετικές τριάδες. Για καθεμία από αυτές τις τριάδες, καταγράφουμε το άθροισμα των τριών καρτών. Διαπιστώνουμε ότι προκύπτουν δύο μόνο διαφορετικά αθροίσματα, το 15 και το 13. Να προσδιορίσετε τους δυνατούς αριθμούς των πέντε καρτών.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79^ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
19 Ιανουαρίου 2019

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε: $\alpha^3+\beta^3=2\alpha\beta\left(\alpha+\beta\right)$,

να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{K}=\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$.

Πρόβλημα 2
Οι θετικοί ακέραιοι n, m είναι τέτοιοι, ώστε οι αριθμοί $\dfrac{50}{3n-2}$ και $\dfrac{243}{4m-1}$ να είναι θετικοί ακέραιοι.
(α) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση
$$A=2\left(n+1\right)-3\left(m+2\right)+7 .$$

(β) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση: $B=\dfrac{162}{n^2}-\dfrac{m^2}{3721}$.

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x, y, z που ικανοποιούν τις εξισώσεις:
$$\frac{y+3x}{xy}=\frac{3z+5y}{yz}=\frac{5x+z}{zx}=\frac{140}{x^2+y^2+z^2}$$

Πρόβλημα 4
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}}=60^\circ$. Η διάμετρος ΑΕ του περιγεγραμμένου κύκλου $C\left(\mathrm{O}, R\right)$ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ, έτσι ώστε $\mathrm{B\Delta}=2\cdot\mathrm{\Delta\Gamma}$.
(α) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{\Delta}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{\Gamma}=30^\circ$
(β) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΕΓ συναρτήσει της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}=\alpha$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
19 Ιανουαρίου 2019

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση:

$$\left||x+8|-3x\right| = \frac{x+7}{6}.$$

Πρόβλημα 2
Αν οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z ικανοποιούν τις ισότητες

$$x+2y = y+3z = z+5x,$$

να βρείτε:

(α) Την τιμή των λόγων $\frac{x}{y}$ και $\frac{z}{y}$.

(β) Τις τιμές των $x,\ y,\ z$ για τις οποίες η παράσταση $x^2+y^2+z^2-2y-144$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη (x, y) που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2+6x\cdot \sigma\upsilon\nu(xy)+9=0$$

και ανήκουν στο ορθογώνιο $D=\left\{(x,y): -\pi \le x \le \pi, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$ του Καρτεσιανού επιπέδου $\mathrm{O}xy$.

Πρόβλημα 4
Έστω ΑΒΓΔ τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο $C_1(\mathrm{O}, R)$ τέτοιο ώστε $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Delta} = 90^\circ$. Έστω Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΔ. Ο κύκλος $C_2(\mathrm{A}, \mathrm{AH})$ κέντρου Α και ακτίνας ΑΗ τέμνει τον κύκλο $C_1(\mathrm{O}, R)$ στα σημεία Ι και Κ. Να αποδείξετε ότι: $\Gamma\mathrm{I} = \Gamma\mathrm{K} = \mathrm{B}\Delta$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
19 Ιανουαρίου 2019

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε πόσοι θετικοί ακέραιοι της μορφής

$$\mathrm{A} = \overline{xxxabc} = x \cdot 10^5 + x \cdot 10^4 + x \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c,$$

όπου x, a, b, c ψηφία με $x \neq 0$, διαιρούνται με το 37.

Πρόβλημα 2

Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = |mx+4| + |mx-4|, m > 0$ και $y = 12$ ορίζουν κυρτό επίπεδο σχήμα του οποίου το εμβαδό ισούται με 20 τ. μ. Να προσδιορίσετε την τιμή της πραγματικής παραμέτρου $m > 0$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται η αλγεβρική παράσταση: $\mathrm{A} = \sqrt{3\left|4-x^2\right|^2 - 2x^4 + 16x^2 - 32}$.

Να απλοποιήσετε την παράσταση Α και να βρείτε το πλήθος των πραγματικών λύσεων της εξίσωσης $\mathrm{A} = \alpha x + 4$, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{B}} < 90^\circ$ και $\mathrm{A\Delta} + \mathrm{B\Gamma} = \Gamma\Delta$. Η παράλληλη ευθεία προς την πλευρά ΑΔ από το μέσο Ε της πλευράς ΓΔ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΔΖ τέμνει τις ευθείες ΑΔ και ΒΓ στα σημεία Κ και Λ, αντίστοιχα. Αν οι ευθείες ΓΚ και ΔΛ τέμνονται στο σημείο Θ και οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΘ είναι κάθετη προς την ευθεία ΓΔ.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!